Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych
Tom XVIII/2, 2017, s. 232 – 241
Received: 26.03.2017
Accepted: 05.07.2017

UWAGI NA TEMAT ŚREDNICH W EKONOMII

Beata Fałda, Józef Zając
Instytut Matematyki i Informatyki
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Chełmie
e-mail: bfalda@pwsz.chelm.pl, jzajac@pwsz.chelm.pl

Streszczenie: Wykorzystanie metod i narzędzi matematyki oraz statystyki stanowi od dawna nieodłączny element analiz ekonomicznych. Nie kwestionując potrzeby matematyzacji ekonomii warto przyjrzeć się niektórym „pułapkom", na które można się natknąć jeżeli bezkrytycznie wykorzystujemy dorobek nauk ścisłych. W niniejszej pracy autorzy przedstawiają wyniki studiów nad jednoznacznością związków pomiędzy podstawowymi parametrami ekonomicznymi a odpowiednimi średnimi liczbowymi.

Słowa kluczowe: średnia arytmetyczna, średnia harmoniczna, średnia geometryczna, struktura algebraiczna

MATEMATYZACJA EKONOMII

Historia rozwoju ekonomii wskazuje na pojawiającą się w pewnych okresach tendencję do jej ewolucji w kierunku stania się jedną z dyscyplin matematycznych [zob. np. Waintraub 2002]. Początkowe, opisowe wyrażanie związków i relacji zachodzących pomiędzy zjawiskami i procesami ekonomicznymi, preferowane chociażby przez J. M. Keynes'a czy F. Hayek'a, stopniowo zastępowano modelami, bazującymi np. na rachunku różniczkowym i całkowym lub na podejściu macierzowym.

Na uwagę zasługuje fakt, iż matematyzacja ekonomii dokonywała się na dwóch płaszczyznach. Pierwsza z nich wychodziła z założenia, iż poprawnie sformułowane pojęcia ekonomiczne powinny odnosić się do empirycznie mierzalnych zjawisk, zaś konstruowane przy ich użyciu teorie – do rzeczywistych związków przyczynowo-skutkowych, podlegających, chociażby hipotetycznemu, testowaniu doświadczalnemu. Drugie podejście bazowało na przyjęciu

DOI: 10.22630/MIBE.2017.18.2.22

aksjomatycznego ujęcia matematyki[1], w którym twierdzenia matematyczne nie podlegają weryfikacji empirycznej. Takie rozumienie „nowej ekonomii" spotkało się zarówno z wielkim uznaniem, czego wyrazem była Nagroda Nobla dla G. Debreu, wielkiego promotora aksjomatyzacji ekonomii, jak i z krytyką, wskazującą na zbyt formalistyczne i abstrakcyjne podejście, które ma wątpliwe znaczenie dla rozwiązywania rzeczywistych problemów ekonomicznych.[2].

Chociaż inne nauki społeczne coraz częściej wykorzystują matematykę w swoich rozważaniach analitycznych, to żadna z nich nie włączała jej do swoich badań w sposób tak znaczący i kompleksowy jak uczyniła to ekonomia. Taki stan rzeczy może wynikać z faktu, iż wielu wybitnych ekonomistów, mających obszerną wiedzę matematyczną, jak choćby A. Cournot czy L. Walras, chciało ją wykorzystać w prowadzeniu dyskursu ekonomicznego, wskazując nowe możliwości analizy zjawisk i procesów gospodarczych. Kolejnym bodźcem do stosowania metod i narzędzi nauk ścisłych była chęć upodobnienia ekonomii do nauk fizycznych. Wykorzystanie formuł i twierdzeń matematycznych uznano za drogę do stworzenia „naukowej doskonałości" ekonomii. Miały one zapewnić głębszy ogląd zachodzących w otaczającym nas świecie zależności oraz stanowić dowód prawdziwości formułowanych hipotez i argumentów ekonomicznych [Katzner 2003]. Nie wdając się w dyskusję nad trafnością takiej argumentacji warto zauważyć, że między ekonomią a matematyką zachodzi pewien rodzaj sprzężenia zwrotnego. Wyraża się ono z jednej strony możliwością wykorzystania przez ekonomistę szeregu teorii matematycznych, a z drugiej – w inspirowaniu matematyki do konstruowania nowych metod i narzędzi badawczych, użytecznych w ekonomii [Palașcă 2013].

Biorąc pod uwagę względy poznawcze wykorzystania metod matematycznych w opisie i wnioskowaniu dotyczącym rzeczywistości gospodarczej, należy uznać zasadność ich stosowania w podejmowaniu prób modelowania zjawisk i procesów ekonomicznych. Uwzględniając jednak fakt, iż matematyka jest nauką aksjomatyczną, warto pamiętać, że metody ilościowe charakteryzuje określony formalizm. Zarówno jego pominięcie jak i bezkrytyczne stosowanie może prowadzić do zubożenia wiedzy lub błędnych wniosków, co wielokrotnie stanowiło przedmiot krytyki oponentów matematyzacji ekonomii.

Z drugiej strony, złożoność otaczającego nas świata powoduje, iż odpowiedź na pytania ekonomiczne można uzyskać jedynie kosztem wprowadzenia

[1] Podejście aksjomatyczne zostało zaproponowane w drugiej dekadzie XX wieku przez D. Hilberta, który pragnął w ten sposób stworzyć „rygorystyczną" matematykę. Twierdził, że niezależność i spójność pomiędzy aksjomatami jest podstawą „stopniowego rozwoju" wiedzy w danej dziedzinie [Waintraub 2002].

[2] Stanowisko takie reprezentował chociażby M. Blaug, wskazując, iż ekonomia coraz bardziej staje się „grą intelektualną graną dla samej siebie" [Blaug 1998]. Nie jest on przeciwnikiem zastosowania matematyki, ale uważa, że nie może być ona celem samym w sobie.

dodatkowych ograniczeń. Niektóre z nich mogą być „naturalnymi" założeniami ekonomicznymi, inne zaś są formalnymi, czysto matematycznymi aksjomatami, często postrzeganymi jako sprzeczne z intuicją ekonomiczną. Przykładem tego są klasyczne działania na liczbach oraz zachodzące między nimi związki, które stosowane na gruncie ekonomii zazwyczaj nie uwzględniają, wykorzystywanego w matematyce, pojęcia ich naturalnej struktury algebraicznej.

Pojawiające się trudności metodologiczne często burzą ścisłe podejście do modelu ekonomicznego, które zakłada, iż między oryginałem a modelem musi istnieć powiązanie izomorficzne albo przynajmniej homomorficzne [Kyn i in. 1979]. Nie oznacza to jednak eliminacji metod ilościowych w analizach ekonomicznych. Konieczna jest, w takim przypadku, odpowiedź na pytanie: na ile jesteśmy skłonni zaakceptować, powstały w wyniku uproszczeń, błąd.

POJĘCIE ŚREDNIEJ

Wartość średnia, lub inaczej przeciętna czy też wartość oczekiwana[3], od dawna zajmują ważne miejsce w stosowaniu metod ilościowych w ekonomii. Wynika to z faktu, iż pozwala ona na uzyskanie skondensowanej informacji o cechach badanego zjawiska, bez czasochłonnej ich analizy w oparciu o wyniki pojedynczych obserwacji.

Wyznaczanie wartości średniej jest najczęściej kojarzone z użyciem jednej z trzech średnich: arytmetycznej, harmonicznej lub geometrycznej. Średnia arytmetyczna była znana i używana już przez Babilończyków. Wykorzystywanie w starożytnej Grecji dwóch pozostałych średnich potwierdzają badania prowadzone przez Helleńczyków w zakresie proporcji. Były one motywowane próbą zastosowania średnich: harmonicznej i geometrycznej, w teorii muzyki oraz w architekturze [Wassel 2002].

Jednym z pierwszych autorów pojęcia „średnia" w sensie matematycznym był A. L. Cauchy. W swojej pracy „Wykłady z analizy algebraicznej" z 1821 r. zdefiniował średnią jako funkcję $\mu(x_1, x_2, \dots, x_m)$ taką, że dla dowolnych $x_1, x_2, \dots, x_m$ spełniony jest warunek

$$\min(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq \mu \leq \max(x_1, x_2, \dots, x_m) \qquad (1)$$

Jednocześnie funkcja ta jest niemalejąca ze względu na każdą zmienną x_i. Przedstawione podejście ma charakter aproksymacyjny, w przeciwieństwie do funkcyjnego, zaproponowanego w 1929 r. przez O. Chisini'ego. Według niego średnią liczb $x_1, x_2, \dots, x_m$, względem funkcji g nazywamy liczbę M, która, zastępując te liczby, spełnia równanie [Fodor i in. 1995]:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_m) = g(M, M, \dots, M). \qquad (2)$$

[3] Pojęcie wartości średniej dotyczy liczb rzeczywistych, zaś wartość oczekiwana jest stosowana w terminologii rachunku prawdopodobieństwa i statystyki, odnosząc się do zmiennych losowych.

Natomiast aksjomatyczne ujęcie problemu średniej zaprezentowali m. in. M. Nagumo i A. Kołmogorow [Muliere i in. 1993, Ostasiewicz i in. 2000].

W literaturze przedmiotu znajdujemy wiele rodzajów średnich [por. np. Bullen i in. 1988]. Na gruncie ekonomii najczęściej stosuje się średnie klasyczne, tzn. średnią arytmetyczną (A), geometryczną (G) i harmoniczną (H) lub ich kombinacje[4]. Zakładając, że dane są liczby a i b, takie że $0 < a \leq b$, klasyczne średnie przyjmują postać:

$$A = A(a,b) = \frac{a+b}{2}, \quad G = G(a,b) = \sqrt{ab},$$

$$H = H(a,b) = \left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1} = \frac{2ab}{a+b}, \tag{3}$$

a ponadto wiadomo, że $G^2 = A \cdot H$, skąd wynika, że $H \leq G \leq A$. Ciekawym ich uogólnieniem jest średnia M_s postaci [Wassell 2002]:

$$M_s = M_s(a,b) = \frac{a^{s+1}+b^{s+1}}{a^s+b^s} \tag{4}$$

oraz średnia potęgowa

$$P_s(a,b) = \left(\frac{a^s+b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}, \tag{5}$$

gdzie $s \in \mathbb{R}$.

Mając dany układ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ liczb rzeczywistych dodatnich możemy rozszerzyć te pojęcia do postaci

$$\begin{gathered} \mathrm{A}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n), \\ \mathrm{G}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}, \\ \mathrm{H}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}, \\ \mathrm{M}_s(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1^{s+1}+a_2^{s+1}+\cdots+a_n^{s+1}}{a_1^s+a_2^s+\cdots+a_n^s}, \\ \mathrm{P}_s(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\frac{1}{n}(a_1^s + a_2^s + \cdots + a_n^s)\right)^{\frac{1}{s}}, \ s \neq 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Wyrażenie $P_2(a,b)$ nazywa się średnią kwadratową liczb a i b, a ponadto

$$P_1 = A = M_0, \quad P_{-1} = H = M_{-1}, \quad \lim_{s\to\infty} P_s =: P_0 = G = M_{-\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

a także $P_s \geq A$ dla dowolnego $s \geq 1$. Łatwo można zauważyć, że

[4] Ponadto, w rozważaniach statystycznych wykorzystywane są inne miary położenia, wśród których ważne miejsce zajmuje mediana, która pozwala na eliminację ze zbioru wartości obserwacji tych, które są nietypowe. Za metodę uśredniania możemy również uznać metodę najmniejszych kwadratów, której efektem jest pojęcie regresji [zob. np. Antoniewicz 2005].

$$\min(a_1, a_2, \dots, a_n) = \lim_{s\to-\infty} P_s\,(a_1, a_2, \dots, a_n) =: P_{-\infty}\ , \tag{8}$$
$$\max(a_1, a_2, \dots, a_n) = \lim_{s\to+\infty} P_s\,(a_1, a_2, \dots, a_n) =: P_{\infty}\ .$$

Dlatego też

$$P_{-\infty} \le P_{-1} \le P_0 \le P_1 \le P_s \le P_\infty, \quad s \ge 1\ , \tag{9}$$

a ponadto średnia potęgowa P_s jest funkcją rosnącą parametru s, przy tych samych wartościach $a_1, a_2, \dots, a_n$, a nawet w przypadku, gdy wprowadzamy dodatkowo stałe wagowe $w_1, w_2, \dots, w_n$, takie, że $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$.

Ciekawym przypadkiem zastosowania średnich jest tożsamość

$$AG(1+x, 1-x) = \frac{\pi}{2\mathcal{K}(x)}\ , \tag{10}$$

gdzie AG jest średnią arytmetyczno-geometryczną, zaś $\mathcal{K}$ jest całką eliptyczną pierwszego rodzaju.

Uogólnieniem średnich prostych są średnie ważone z wagą $p = \{p_i\}$, $i = 1,2,\dots,n$, które w przypadku struktury liniowej noszą nazwę wartości oczekiwanej.

Jeżeli X jest zmienną losową o wartościach rzeczywistych zadanych ciągiem $\{x_i\}$ przyjmowanych z prawdopodobieństwem $\{p_i\}$, $i = 1,2,\dots,n$, wtedy

$$\begin{gathered}
\mathrm{E}_A(X,p) = \sum_{i=1}^n p_i x_i\ ,\\
\mathrm{E}_G(X,p) = \prod_{i=1}^n x_i^{p_i} = e^{\sum_{i=1}^n p_i \ln x_i},\\
E_H(X,p) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{x_i}\right)^{-1}\ ,\\
E_{M,\alpha}(X,p) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i^{\alpha+1}}{\sum_{i=1}^n p_i x_i^{\alpha}}\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}\ ,\\
E_{P,\alpha}(X,p) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & \alpha \ne 0\ ,\\ \prod_{i=1}^n x_i^{p_i} & \alpha = 0\ . \end{cases}
\end{gathered} \tag{11}$$

W przypadku, gdy ρ jest metryką euklidesową, określoną na przestrzeni $\mathbb{V}$, zaś X zmienną losową, przyjmującą w niej swoje wartości, wtedy wyrażenie

$$\begin{gathered}
\Sigma^2(X,p) = \sum_{i=1}^n \big(x_i - E(x,p)\big)^2 p_i =\\
= \sum_{i=1}^n |x_i - E(x,p)|^2 p_i = \sum_{i=1}^n \rho(x_i, E(x,p))^2 p_i\ ,
\end{gathered} \tag{12}$$

jest wariancją zmiennej X o rozkładzie $p = \{p_i\}$.

Przeniesienie wariancji σ^2, realizowane izomorficznie na przestrzeń $\mathbb{V}_h = h(\mathbb{V})$ określone wzorem

$$\sigma_h^2(Y,p) = \sum_{i=1}^n \rho_h\big(y_i, E_h(Y,p)\big)^2 p_i = \sum_{i=1}^n h^{-1}(y_i)^2 p_i - \left[h^{-1}\big(E_h(Y,p)\big)\right]^2, \tag{13}$$

będziemy nazywać h-wariancją zmiennej losowej Y, gdzie ρ_h jest metryką, otrzymaną z metryki ρ przy pomocy izomorfizmu h i określoną wzorem

$$\rho_h(X,Z) := \rho\big(h^{-1}(Y), h^{-1}(Z)\big), \tag{14}$$

dla dowolnych $Y, Z \in \mathbb{V}_h$. Wtedy wyrażenie

$$\sigma_h(Y,p) = \sqrt{\sigma_h^2(Y,p)} \tag{15}$$

będziemy nazywać h odchyleniem standardowym.

Funkcja $h(x) = e^x$, odwzorowując $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}_+$ realizuje przeniesienie liniowej struktury probabilistycznej na strukturę multiplikatywną, zaś odwzorowanie $h(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$, przenosi strukturę liniową na strukturę harmoniczną [Fałda 2011].

ŚREDNIE W EKONOMII

Dobór odpowiedniej średniej jest zdeterminowany charakterem modelowanego zjawiska lub procesu. Należy jednak zauważyć, iż, z matematycznego punktu widzenia, zazwyczaj przyjmuje się, że wartości pomiarów są elementami ciała liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, +, \cdot)$$ lub, prościej, są liczbami rzeczywistymi nieujemnymi. To wydaje się wystarczać dla budowy poprawnej techniki dokonywania pomiarów metodą Jordana lub bardziej ogólną metodą Lebesque'a. Natomiast pomiar cech badanych procesów ekonomicznych, odbywający się poprzez wyznaczanie wartości liczbowych charakteryzujących je parametrów ekonomicznych, nakazuje baczne zwracanie uwagi na pojawiające się miana tych pomiarów. Te zaś bowiem wskazują jednoznaczne działania, lub nawet struktury działań, właściwe dla zapewnienia poprawności dalszych obliczeń. Pomijanie tego aspektu procesu mierzenia może prowadzić do istotnych rozbieżności w ocenie wartości cech badanych parametrów.

Ze względu na swoją prostotę, w analizach ekonomicznych najczęściej stosuje się średnią arytmetyczną, w przeciwieństwie do średniej harmonicznej, będącej odwrotnością średniej arytmetycznej z odwrotności liczb i średniej geometrycznej definiowanej jako średnia arytmetyczna z wartości logarytmowanych.

Rozważamy sytuację, w której $X = \{1,2,\ldots,50\}$, $p_i = \frac{1}{50}$, $i = 1, 2, \ldots, 50$. Wówczas otrzymujemy

Tabela 1. Podstawowe parametry zmiennej losowej X w terminach odpowiednich średnich

	średnia	wariancja	odchylenie standardowe	odchylenie przeciętne	współczynnik zmienności	współczynnik skupienia
H	11,11	415,23	20,37	16,63	1,83	2,20
G	19,48	244,45	15,63	13,22	0,80	2,08
A	25,50	208,25	14,43	12,50	0,56	1,63
P_2	29,30	222,69	14,92	12,78	0,50	1,94

M_2	37,87	1249742,53	1117,91	15,55	29,51	1,87^{-7}

Źródło: opracowanie własne

Z podanego przykładu liczbowego wynika, iż $H < G < A < P_2 < M_2$, przy czym możemy zauważyć, iż wartości średniej H oraz średniej M_2 wydają się nie odpowiadać podejściu intuicyjnemu. Zazwyczaj utożsamiamy bowiem wartość średnią z pojęciem średniej arytmetycznej, wykorzystywanej do wyznaczania liczbowych wartości przeciętnych. Tymczasem, warto zauważyć, iż poprawność stosowania średnich wynika z cech zmiennych, które są wykorzystywane do prowadzonych obliczeń oraz z celu, dla którego są stosowane. Z tego względu średnią harmoniczną wykorzystujemy do uśredniania wielkości względnych, np. przy obliczaniu przeciętnej prędkości, pracochłonności, średniej gęstości zaludnienia, natomiast średnia geometryczna znajduje najczęściej zastosowanie w obliczaniu przeciętnego tempa zmian zjawisk w czasie.

Wynika stąd, że jeśli podane dane liczbowe odnoszą się np. do cen pewnego dobra, wówczas zasadnym jest wykorzystanie, do poszukiwania ceny przeciętnej, średniej arytmetycznej. Jeśli jednak dane dotyczą cen względnych, wówczas poprawnym jest wykorzystanie średniej geometrycznej. Zastosowanie średniej arytmetycznej zawyżałoby poszukiwaną wartość przeciętną. Inny wynik uzyskamy, zakładając, iż przedstawione dane oznaczają cenę jednostkową. Wówczas odpowiednią jest średnia harmoniczna.

Pozostałe średnie są trudne do intuicyjnego zastosowania, jakkolwiek stanowią one podstawę konstrukcji wielu modeli ekonomicznych. Przykładowo, średnia potęgowa (ważona) występuje w ekonomii jako funkcja elastyczności produkcji, zaś przypadki $P_{-\infty}$, P_0 i P_1 są znane jako funkcja produkcji typu Leontiewa, Cobba-Douglasa i liniowa funkcja produkcji [Hegselmann i in. 2005]. Z kolei modelowe wykorzystanie średniej harmonicznej i geometrycznej znajdujemy w konstrukcji indeksów cen[5]. Postać średniej harmonicznej przyjmuje przykładowo, zaproponowany w 1874 r. przez H. Paasche'go, indeks:

$$I_p = \frac{\sum_{j=1}^{n} q_{j2} p_{j2}}{\sum_{j=1}^{n} q_{j2} p_{j1}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} w_{j2} \left(\frac{p_{j2}}{p_{j1}}\right)^{-1}}, \tag{16}$$

gdzie $w_{j2} = \frac{p_{j2} q_{j2}}{\sum_{k=1}^{n} p_{k2} q_{k2}}$, zaś p_j i q_j oznaczają odpowiednio cenę i ilość dobra j.

Obserwacja cen wskazuje, iż ich zmiany są łatwiejsze do wyrażenia w procentach, co sugeruje, że model wykładniczy może być bardziej odpowiedni

[5] Konstrukcję indeksu cen, opartą o średnią arytmetyczną, zaproponował w 1764 roku G. Carli. Indeks Carli był stosowany w Wielkiej Brytanii do 1996 roku, kiedy zamieniono go na indeks oparty o średnią geometryczną. W wyniku przeprowadzonych analiz zauważono, iż wykorzystanie indeksu Carli'ego do pomiaru inflacji powodowało znaczne zawyżanie wyników.

do badania relacji cen w różnych okresach. Indeks cen, oparty na średniej geometrycznej zaproponowała w 1863 roku W. S. Jevons:

$$J = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{p_{j2}}{p_{j1}}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{17}$$

Postać średniej geometrycznej przyjmują również: indeks Fischera z 1922 roku:

$$F = \left(\sum_{j=1}^{n} w_{j1} \left(\frac{p_{j2}}{p_{j1}}\right) \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} w_{j2} \left(\frac{p_{j2}}{p_{j1}}\right)^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

oraz indeks Törnqvista z 1936 roku:

$$T = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{p_{j2}}{p_{j1}}\right)^{\frac{w_{j1}+w_{j2}}{2}}, \tag{19}$$

gdzie $w_{j1} = \frac{p_{j1}q_{j1}}{\sum_{k=1}^{n} p_{k1}q_{k1}}$ i $w_{j2} = \frac{p_{j2}q_{j2}}{\sum_{k=1}^{n} p_{k2}q_{k2}}$ [Wegman i in. 2003].

Znaczenie właściwego, pod względem rachunkowym, operowania wynikami pomiarów parametrów ekonomicznych zostało zauważone w pierwszej połowie XIX wieku przez statystyków zajmujących się opracowywaniem metod rachunkowych zgromadzonych danych oraz wnioskowaniu na ich podstawie. Interpretacja danych oraz wyznaczane na ich podstawie odpowiednie średnie znalazły odzwierciedlenie w konstrukcji systemu wyborczego w Stanach Zjednoczonych. Trafność intuicyjna i właściwe zastosowanie różnych średnich w praktyce są imponujące nawet dla współczesnego czytelnika tamtych opracowań. Dlatego też podnosimy dzisiaj ten temat, mając na celu metodyczną budowę teorii algebraiczno-statystycznej, która pozwoli na urealnienie wyników opracowań statystycznych w ekonomii [Misztal 2012].

ZAKOŃCZENIE

Stosowanie metod matematycznych w pracy nad problemami ekonomicznymi obejmuje wybory, które są związane z niepewnością i ryzykiem, ponieważ często nie jest jasne a priori, które podejścia matematyczne są najbardziej odpowiednie. Zwykle wynika to z braku klarownego zdefiniowania modelowanego zjawiska, innym razem z jego złożoności, która ogranicza jednoznaczność stosowania metod nauk ścisłych.

Zastosowanie w ekonomii uśredniania ma na celu uzyskanie reprezentatywnego opisu badanego zjawiska opartego na dużej liczbie faktów ekonomicznych. Jak wskazano w niniejszej pracy, pomimo, wydawałoby się, prostoty narzędzi do wyznaczania wartości średniej ich dobór wymaga znajomości charakteru badanego zjawiska. Zaletą ekonomii, podobnie jak i fizyki, jest fakt, iż wielkości, które mierzymy, mają zadane miana, a te, z kolei, determinują jednoznacznie struktury matematyczne w zbiorze pomiarów. Warto jest zauważyć, iż przypadki pomiaru ekonomicznych wielkości niemianowanych, takich jak ilorazy, podlegają w ekonomii uśrednianiu geometrycznemu, podczas gdy matematycy, stosując wartości liczbowe niemianowane, na ogół przyjmują, że ich struktura ma charakter arytmetyczny, czyli że jest addytywna.

Prowadzone przez autorów badania nad związkiem pomiedzy parametrami ekonomicznymi a odpowiednimi średnimi liczbowymi prowadzą do wniosku, iż średnie te stanowią element zerowy szeregu wyrażajacego regresję uogólnioną [Partyka i in. 2015] w odpowiednio dobranej strukturze, gdzie kolejnym elementem jest regresja liniowa.

BIBLIOGRAFIA

Antoniewicz R. (2005) O średnich i przeciętnych. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. O. Langego we Wrocławiu.

Blaug M. (1998) Disturbing Currents in Modern Economics. Challenge, 41 (3), 11–34.

Bullen P. S., Mitrinović D. S., Vasić M. (1988) Means and Their Inequalities. Springer Science&Business Media B. V., Dordrecht.

Fałda B., Zając J. (2011) Analiza statystyczna parametrów ekonomicznych z ustaloną strukturą algebraiczną. [w:] Domański Cz., Majdzińska A. (red.) Zastosowanie metod ilościowych do oceny ryzyka i efektywności systemu ubezpieczeń społecznych. Acta Universitatis Lodziensis, Folia Oeconomics, 254, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, 129–141.

Fodor J., Roubens M. (1995) On meaningfulness of means. Journal of Computational and Applied Mathematics, 64, 103–115.

Hegselmann R., Krause U. (2005) Option Dynamics Driven by Various Ways of Averaging. Computational Economics, 25, 381–405.

Katzner D. W. (2000) Why mathematics in economics? Journal of Post Keynesian Economics, 25 (4), 561–574.

Kyn O., Pelikan P. (1979) Cybernetyka a ekonomia. Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

Misztal A. (2012) Degresywna proporcjonalność a kształtowanie składu Parlamentu Europejskiego. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu.

Muliere P., Parmigiani G. (1993) Utility and Means in the 1930s. Statistical Science, 8 (4), 421–432.

Ostasiewicz S., Ostasiewicz W. (2000) Means and their applications. Annals of Operations Research, 97, 337–355.

Palaşcă S. (2013) Mathematics in economics. A perspective on necessity and sufficiency. Theoretical and Applied Economics, XX/9(586), 127–144.

Partyka D., Zając J. (2015) Generalized approach to the problem of regression. Anal. Math. Phys. 5, 249–320.

Waintraub E. R. (2002) How Economics Became a Mathematical Science. Duke University Press, Durham and London.

Wassel S. R. (2002) Rediscovering family of means. Math. Intelligencer, 24 (2), 58–65.

Wegmana E. J., Dorfm A. (2003) Visualizing cereal world, Computational Statistics &Data Analysis, 43, 637–638.

REMARKS ON MEANS IN ECONOMICS

Abstract: The use of mathematical and statistical methods and tools is an integral part of economic analysis. Without questioning the need of economics mathematization, it is worth looking at some of the "traps" that can come across if we uncritically exploit the strict science. In this paper the authors present the results of studies on the uniqueness of relations between basic economic parameters and corresponding means.

Keywords: arithmetic mean, harmonic mean, geometric mean, algebraic structure