

MODELE ADAPTACYJNE W PROGNOZOWANIU NA PODSTAWIE SZEREGÓW CZASOWYCH O WYSOKIEJ CZĘSTOTLIWOŚCI Z LUKAMI SYSTEMATYCZNYMI

Jan Zawadzki

Wydział Ekonomiczny

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie

e-mail: jan.zawadzki@zut.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawione zostaną wyniki zastosowania modeli Browna, Holta i Holta-Wintersa w prognozowaniu zmiennej o bardzo wysokiej częstotliwości obserwowanej w warunkach braku pełnej informacji na podstawie danych oczyszczonych z dwóch lub trzech rodzajów sezonowości. Rozpatrywany były dwa warianty luk systematycznych.

Słowa kluczowe: prognozowanie, dane o wysokiej częstotliwości, złożona sezonowość, wyrównywanie wykładnicze, luki systematyczne

WPROWADZENIE

W pracy [Szmuksta-Zawadzka, Zawadzki 2016] wykazano, że modele wyrównywania wykładniczego mogą być z powodzeniem wykorzystane w prognozowaniu zmiennej ekonomicznej ze złożonymi wahaniami sezonowymi dla szeregów czasowych z lukami niesystematycznymi, oczyszczonych z dwóch lub trzech rodzajów sezonowości. W niniejszej pracy podjęta zostanie próba rozszerzenia rozważań na szeregi z lukami systematycznymi. Prognozy dla modeli Browna i Holta buduje na podstawie szeregów, z których wyeliminowano sezonowość: roczną, tygodniową i godziną. Natomiast w przypadku modeli Holta-Wintersa eliminowane są tylko wahania o cyklu rocznym i tygodniowym, ponieważ wahania o cyklu dobowym opisywane są za pomocą dodatkowego równania. W przypadku wszystkich modeli prognozy wyjściowe wyznaczane są na podstawie predyktorów dla danych oczyszczonych. Prognozy ostateczne natomiast są sumami prognoz wyjściowych i składników sezonowości (modele addytywne) lub iloczynami prognoz wyjściowych i wskaźników sezonowości (modele multiplikatywne). Modele wymienione wyżej są, przystosowanymi dla danych

oczyszczonych o wysokiej częstotliwości, modelami znanymi w literaturze dla wahań o niezłożonej sezonowości lub dla zmiennych, w których wahania te nie występują (por. [Pawłowski 1973], [Zeliaś, Pawełek, Wanat 2003], [Dittman 2006]).

Zapisy analityczne wymienionych wyżej modeli i opartych na nich predyktorów w postaci addytywnej i multiplikatywnej dla danych godzinnych podane zostały w pracach [Szmuksta-Zawadzka, Zawadzki 2015, 2016].

Jednym z ważnych zagadnień wymagających rozstrzygnięcia jest wybór modelu adaptacyjnego dla celów prognozowania o „optymalnych” wartościach stałych wygładzania (wyrównywania). W przypadku szeregów z lukami w grę wchodzi trzy kryteria polegające na minimalizacji przeciętnych błędów względnych:

- wartości wyrównanych obliczonych dla dostępnych danych w przedziale czasowym „próby” (K_{WW}),
- prognoz interpolacyjnych obliczonych dla podokresów, w których występowały luki (K_{IN}),
- prognoz ekstrapolacyjnych obliczonych dla okresu empirycznej weryfikacji prognoz (K_{EX}).

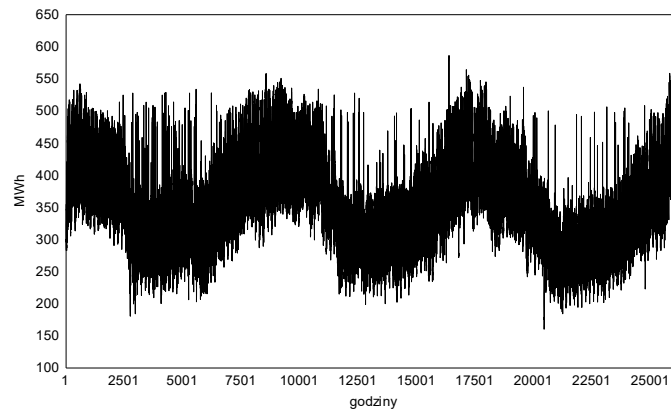
Modele tego samego rodzaju, charakteryzujące się minimalnymi ocenami mierników dla poszczególnych kryteriów dość często różnią się stałymi wygładzania. Konsekwencją tego faktu będzie występowanie dość znacznych różnic błędów prognoz, zwłaszcza ekstrapolacyjnych. W związku z tym dla każdego miernika podstawowego (K_{WW} , K_{IN} , K_{EX}) należy obliczyć dwa pozostałe rodzaje mierników, odnoszące się bądź do wartości wyrównanych, bądź i przynajmniej jednego rodzaju prognoz. Będą one oznaczone dodatkowymi indeksami. Na przykład dla kryterium K_{WW} będzie to K_{WW_IN} i K_{WW_EX} .

SYNTETYCZNA CHARAKTERYSTYKA ZMIENNEJ PROGNOZOWANEJ

Modelowaniu i prognozowaniu dla luk niesystematycznych z wykorzystaniem modeli Browna, Holta i Holta-Wintersa w postaci addytywnej i multiplikatywnej poddane zostało zapotrzebowanie na moc energetyczną w aglomeracji A.

Kształtowanie się zmiennej prognozowanej bez luk w okresie trzech lat zostało przedstawione na rysunek 1. Pierwsze dwa lata posłużą do budowy modeli i prognoz inter- i ekstrapolacyjnych, a rok trzeci będzie okresem empirycznej ich weryfikacji.

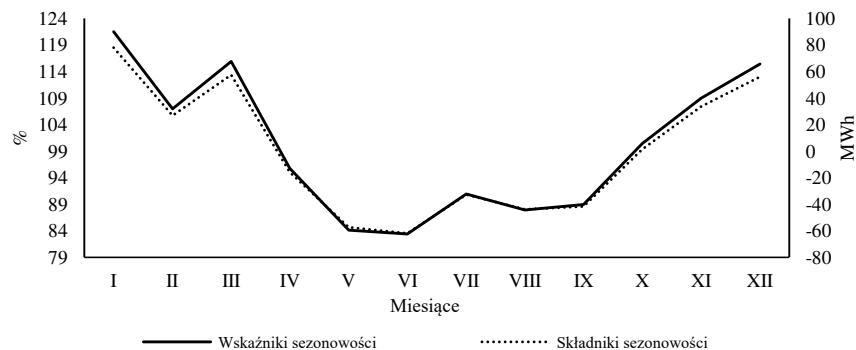
Rysunek 1. Kształtowanie się zapotrzebowania na moc energetyczną aglomeracji A (w MWh)



Źródło: Bank Danych Katedry

Poniżej zostaną przedstawione w sposób graficzny kształtowanie się ocen wskaźników sezonowości (w liczbach względnych) i składników sezonowości (w MWh) o cyklu rocznym, tygodniowym i dobowym (rysunek 2-4).

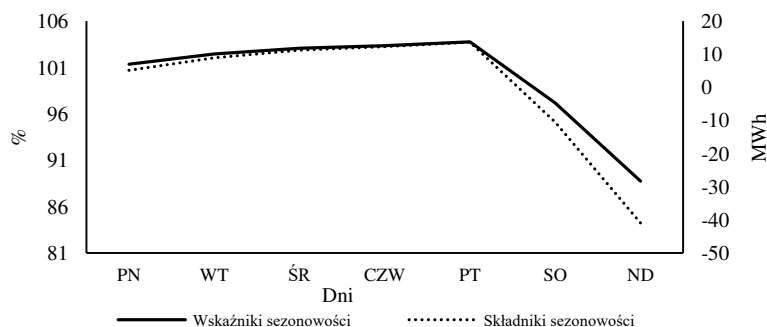
Rysunek 2. Oceny składników i wskaźników sezonowości o cyklu rocznym



Źródło: Szmuksta-Zawadzka, Zawadzki [2015] s.152

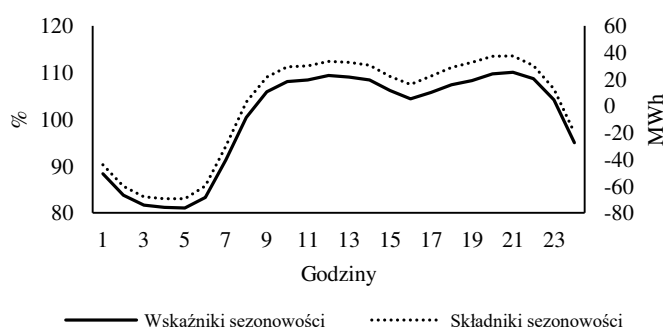
Rozstęp wskaźników sezonowości wynosił ok. 15 p.p. i był zdecydowanie niższy niż dla cyklu rocznego. Różnica skrajnych ocen składników sezonowości wynosiła ok. 55 MWh.

Rysunek 3. Oceny składników i wskaźników sezonowości o cyklu tygodniowym



Źródło: Szmuksta-Zawadzka, Zawadzki [2015] s.153.

Rysunek 4. Oceny składników i wskaźników sezonowości o cyklu 24 godzinnym



Źródło: Szmuksta-Zawadzka, Zawadzki [2015] s.153

WYNIKI MODELOWANIA I PROGNOZOWANIA DLA WARIANTU W1

Do modelowania i prognozowania brakujących danych na podstawie oczyszczonych z sezonowości godzinnych szeregach czasowych z lukami systematycznymi, dotyczącymi zapotrzebowania na moc energetyczną w aglomeracji A, wykorzystane zostały modele: Browna, Holta i Holta - Wintersa w postaci addytywnej i multiplikatywnej. W przypadku modeli Holta - Wintersa z szeregu oryginalnego zostały wyeliminowane wahania o cyklach: 12-miesięcznym i 7-dniowym. Natomiast dla Browna i Holta wyeliminowano także wahania o cyklu 24-godzinnym.

Rozpatrywane były dwa warianty systematycznych luk w danych. W wariacie pierwszym (W1) założono, że luki występują w ośmiu okresach godzinnych: 2, 6, 8, 10, 14, 16, 18 i 22 tzn. obejmują każdego dnia 8 spośród

24 godzin. Liczba brakujących danych wynosiła 5840, co stanowiło 1/3 długości pełnego szeregu liczącego 17520 obserwacji. Luki w danych otrzymano przez wymazanie wskazanej wyżej liczby obserwacji z pełnego szeregu.

W wariancie drugim (W2) luki występowały w każdym z rodzajów wahań i obejmowały: dwa miesiące (sierpień i październik), dwa dni tygodnia (wtorek i czwartek) oraz osiem godzin (2, 6, 8, 10, 14, 16, 18 i 22). Liczba brakujących danych wynosiła 10544, co stanowiło 60,18% długości pełnego szeregu. Luki w danych, podobnie jak dla wariantu W1, otrzymano przez wymazanie wskazanej wyżej liczby obserwacji z pełnego szeregu.

Na podstawie wymienionych wyżej modeli, dla danych oczyszczonych z sezonowości, budowane były prognozy wyjściowe. Prognozy ostateczne dla modeli addytywnych otrzymano dodając składniki sezonowości, a dla postaci multiplikatywnej mnożąc je przez wskaźniki sezonowości.

W tabeli 1 zostały zestawione błędy: wartości wyrównanych (K_{WW}) prognoz interpolacyjnych (K_{IN}) oraz prognoz ekstrapolacyjnych (K_{EX}) otrzymanych na podstawie predyktorów opartych na modelach: Browna (B), Holta (H) i Holta-Wintersa (HW) w postaci addytywnej i multiplikatywnej o stałych wygładzania charakteryzujących się minimalnymi ocenami poszczególnych kryteriów. Kolumna druga tabeli zawiera, podane wyżej w nawiasach, skrótowe nazwy modeli poprzedzone odpowiednio symbolami: „a_” dla modeli addytywnych oraz „m_” dla modeli multiplikatywnych.

Dla każdego z podstawowych mierników dokładności: K_{WW} , K_{IN} i K_{EX} zostały obliczone dwa pozostałe rodzaje mierników. Dla K_{WW} : K_{WW_IN} i K_{WW_EX} , dla K_{IN} : K_{IN_WW} i K_{IN_EX} , a dla K_{EX} : K_{EX_WW} i K_{EX_IN} .

W dwóch ostatnich wierszach, dla postaci addytywnej i multiplikatywnej, podane zostały oceny podstawowych mierników dokładności wartości teoretycznych i obu rodzajów prognoz otrzymane na podstawie klasycznych modeli szeregu czasowego odpowiednio: z liniowym trendem i periodycznymi składnikami sezonowymi (a_{KI}) oraz z trendem wykładniczym o stałej stopie wzrostu i relatywnie stałych waniach sezonowych (m_{KI}).

Z analizy ocen błędów wartości wyrównanych (K_{WW}) wynika, że najniższą jego oceną wynoszącą 4,629% charakteryzuje się predyktor oparty na multiplikatywnym modelu Holta-Wintersa (m_{HW}) o stałych wygładzania $\alpha=0,15$, $\beta=0,01$ i $\gamma=0,13$. Oceny te dla modeli Browna w postaci multiplikatywnej (m_B - $\alpha=0,89$) i addytywnej (a_B - $\alpha=0,91$) są odpowiednio o ok.: 0,16 i 0,21 p.p. wyższe. Najwyższą oceną miernika K_{WW} , wynoszącą 5,911%, charakteryzował się model a_H ze stałymi wygładzania: $\alpha=0,20$, $\beta=0,01$.

Tabela 1. Oceny błędów wartości wyrównanych, prognoz interpolacyjnych i prognoz ekstrapolacyjnych dla najlepszych addytywnych modeli adaptacyjnych w postaci addytywnej i multiplikatywnej dla wariantu I (w %)

Model	Oznaczenie	Wartości wyrównane (WW)						Prognozy interpolacyjne (IN)						Prognozy ekstrapolacyjne (EX)					
		Stale wygładzania			MAPE(%)			Stale wygładzania			MAPE(%)			Stale wygładzania			MAPE(%)		
		α	B	γ	K_{WW}	$K_{WW,1}$ N	$K_{WW,F}$ X	α	β	γ	$K_{IN,WW}$	K_{IN}	$K_{IN,EX}$	α	β	γ	$K_{EX,WW}$	$K_{EX,IN}$	K_{EX}
Brownna	a_B	0,91	-	-	4,842	4,087	7,627	0,98	-	-	4,858	4,065	7,834	0,62	-	-	5,028	4,477	7,247
	m_B	0,89	-	-	4,799	4,084	7,409	0,98	-	-	4,825	4,051	7,675	0,57	-	-	4,967	4,532	7,009
Holta	a_H	0,20	0,01	-	5,911	5,492	8,964	0,2	0,01	-	5,911	5,492	8,964	0,1	0,02	-	6,208	5,792	7,426
	m_H	0,20	0,02	-	5,569	5,378	209,14	0,2	0,01	-	5,577	5,376	50,036	0,12	0,01	-	5,808	5,646	7,161
Holta-Wintersa	a_HW	0,15	0,01	0,14	4,826	6,189	95,313	0,15	0,01	0,15	4,829	6,189	99,439	0,13	0,01	0,04	5,212	6,531	7,770
	m_HW	0,15	0,01	0,13	4,629	6,227	88,219	0,15	0,01	0,15	4,633	6,214	94,072	0,13	0,01	0,01	6,120	7,973	7,408
Klas. szer. czas.	a_Kl	-	-	-	9,195	-	-	-	-	-	12,76	-	-	-	-	-	-	-	10,52
	m_Kl	-	-	-	9,076	-	-	-	-	-	12,70	-	-	-	-	-	-	-	10,22

Źródło: opracowanie własne

Najniższą ocenę błędu prognoz interpolacyjnych dla tego kryterium ($K_{WW_IN} = 4,084\%$) otrzymano dla modelu m_B a najwyższą (6,227%) dla modelu m_HW . Najniższą ocenę błędu prognoz ekstrapolacyjnych dla tego kryterium otrzymano także dla modelu m_B ($K_{WW_EX} = 7,409\%$). Natomiast oceny najwyższe, przekraczające 88%, otrzymano dla: addytywnego modelu Holta (a_B) oraz obu postaci modelu Holta-Wintersa (a_HW , m_HW).

Minimalną oceną błędu prognoz interpolacyjnych (K_{IN}), wynoszącą 4,051%, otrzymano na podstawie predyktora opartego na multiplikatywnym modelu Browna (m_B), dla stałej wygładzenia $\alpha=0,98$. Dla modelu a_B i $\alpha=0,98$ była ona tylko o 0,014 pp. wyższa. Dla pozostałych modeli były one zawarte w przedziale od 5,376% (model m_H do 6,214% (model m_HW). Oceny K_{IN_WW} wahały się od 4,633% dla modelu m_HW do 5,911% dla modelu a_H .

Minimalną ocenę miernika K_{IN_EX} , wynoszącą 7,675%, otrzymano dla predyktora m_B . Oceny błędów K_{IN_EX} dla multiplikatywnej postaci modelu Holta i obu postaci modelu Holta-Wintersa były, podobnie jak dla miernika K_{WW} , przyjęły wartości znacznie wyższe i zawarte były w przedziale od 50,04% dla modelu m_H do 99,44% dla modelu m_HW .

Najniższą ocenę błędu prognoz ekstrapolacyjnych (K_{EX}), wynoszącą 7,009%, otrzymano dla modelu Browna w postaci multiplikatywnej (m_HW) o stałej wygładzania: $\alpha=0,57$. Dalszymi w kolejności, z błędami wynoszącymi: 7,161% i 7,247%, były modele: Holta (a_H) ze stałymi wygładzania $\alpha=0,12$ i $\beta=0,01$ oraz Browna o postaci addytywnej (a_B) i $\alpha=0,75$. Maksymalną oceną tego błędu (7,770%) charakteryzował się model a_HW o parametrach: $\alpha=0,13$, $\beta=0,01$ i $\gamma=0,04$.

Z analizy zamieszczonych w tabeli minimalnych wartości mierników K_{WW} , K_{IN} i K_{EX} dla poszczególnych modeli wynika, że stałe wygładzania przyjmowały na ogół różne wartości. Jedynym wyjątkiem są modele Holta dla mierników K_{WW} i K_{IN} . Natomiast w przypadku, gdy w modelach tej samej klasy o postaci addytywnej i multiplikatywnej stałe wygładzania przyjmowały te same wartości, to jednak oceny błędów były różne. Odnosi się to do miernika K_{IN} dla modeli Browna i Holta-Wintersa.

W tabeli tej, w dwóch ostatnich wierszach, podane zostały oceny błędów: wartości wyrównanych, prognoz interpolacyjnych i ekstrapolacyjnych otrzymane na podstawie modeli klasycznych w postaci addytywnej (a_Kl) i multiplikatywnej (m_Kl).

Średnie względne błędy wartości teoretycznych (wyrównanych) dla modelu addytywnego i multiplikatywnego wynoszą odpowiednio: 9,195% oraz 9,076% i są one blisko dwukrotnie wyższe od minimalnej oceny otrzymanej dla najlepszego modelu adaptacyjnego (m_HW). W przypadku prognoz interpolacyjnych względne ich błędy przyjęły wartości: 12,76% (a_Kl) oraz 12,76% (m_Kl) i są one dwukrotnie wyższe od maksymalnego średniego błędu prognoz, otrzymanego na podstawie modelu (m_HW) i ponad trzykrotnie wyższe od błędu minimalnego otrzymanego dla predyktora m_B .

W przypadku prognoz ekstrapolacyjnych otrzymanych na podstawie modeli klasycznych w postaci addytywnej i multiplikatywnej błędy te wynoszą odpowiednio 10,52 i 10,22% i są przynajmniej o 3,2 p.p. wyższe od błędu dla predyktora m_B . Znaczące różnice w dokładności prognoz przemawiają jednoznacznie za wykorzystaniem modeli adaptacyjnych.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że oceny błędów: wartości wyrównanych (K_{EX_WW}), prognoz interpolacyjnych (K_{EX_IN}), dla modelu charakteryzującego się minimalną oceną miernika K_{EX} , przyjęły wartości tylko niewiele wyższe od minimalnych ocen błędów K_{WW} oraz K_{IN} . Oznacza to, że kryterium wyboru modelu dla celów prognozowania *ex ante* powinien być miernik K_{EX} dla obu postaci modeli Browna oraz addytywny model Holta.

WYNIKI MODELOWANIA I PROGNOZOWANIA DLA WARIANTU W2

Jak wspomniano wyżej, w wariacie drugim (W2) luki występowały w każdym z rodzajów wahań i obejmowały: dwa miesiące (sierpień i październik), dwa dni tygodnia (wtorek i czwartek) oraz osiem godzin (2, 6, 8, 10, 14, 16, 18 i 22). Liczba luk w danych, a tym samym prognoz interpolacyjnych, wynosiła 10544, co stanowiło 60,18% długości pełnego szeregu. Do budowy prognoz na podstawie danych oczyszczonych z wahań o cyklu rocznym i tygodniowym, wykorzystano także modele Holta-Wintersa w postaci addytywnej i multiplikatywnej. Natomiast prognozy na podstawie prostych modeli Browna i modeli Holta były budowane dla szeregów, z których wyeliminowano ponadto wahania o cyklu 24-godzinnym.

W tabeli 2 zostały zestawione błędy: wartości wyrównanych (K_{WW}), prognoz interpolacyjnych (K_{IN}) oraz prognoz ekstrapolacyjnych (K_{EX}), otrzymanych na podstawie predyktorów opartych na modelach: Browna, Holta i Holta-Wintersa w postaci addytywnej i multiplikatywnej o stałych wygładzania charakteryzujących się minimalnymi ocenami poszczególnych kryteriów. W kolumnie drugiej tej tabeli podano, podobnie jak w tabeli 1, skrótowe nazwy modeli poprzedzone zostały odpowiednio symbolami: „a_” dla modeli addytywnych oraz „m_” dla modeli multiplikatywnych. Ponadto podano w niej te same mierniki dokładności prognoz.

Dwa ostatnie wiersze tej tabeli, podobnie jak poprzednio, zawierają oceny podstawowych mierników dokładności: wartości teoretycznych i obu rodzajów prognoz otrzymane na podstawie modeli klasycznych: z liniowym trendem i periodycznymi składnikami sezonowymi (a_{Kl}) oraz z trendem wykładniczym o stałej stopie wzrostu i relatywnie stałych wahaniami sezonowych (m_{Kl}).

Tabela 2. Oceny błędów wartości wyrównanych, prognoz interpolacyjnych i prognoz ekstrapolacyjnych dla najlepszych addytywnych modeli adaptacyjnych w postaci addytywnej i multiplikatywnej dla wariantu 2 (w %)

Model	Oznaczenie	Wartości wyrównane (WW)						Prognozy interpolacyjne (IN)						Prognozy ekstrapolacyjne (EX)					
		Stale wygładzania			MAPE(%)			Stale wygładzania			MAPE(%)			Stale wygładzania			MAPE(%)		
		α	β	γ	K_{WW}	K_{WW_IN}	K_{WW_EX}	α	β	γ	K_{IN}	K_{IN_WW}	K_{IN_EX}	α	β	T	K_{EX_WW}	K_{EX_IN}	K_{EX}
Browna	a_B	0,92	-	-	5,075	5,783	7,654	0,53	-	-	5,413	5,609	7,287	0,62	-	-	5,290	5,623	7,247
	m_B	0,89	-	-	5,010	5,733	7,409	0,45	-	-	5,564	5,540	7,049	0,57	-	-	5,214	5,571	7,009
Holta	a_H	0,2	0,01	-	6,338	6,165	43,19	0,2	0,01	-	6,338	6,165	43,19	0,2	0,02	-	6,382	6,233	7,365
	m_H	0,2	0,02	-	5,967	6,019	135,2	0,2	0,02	-	5,967	6,019	135,2	0,16	0,01	-	6,106	6,121	7,435
Holta-Wintersa	a_HW	0,15	0,01	0,11	5,633	7,186	21,99	0,15	0,01	0,15	5,658	7,139	37,65	0,03	0,01	0,04	6,416	7,758	7,808
	m_HW	0,15	0,01	0,11	5,470	7,128	42,35	0,15	0,01	0,15	5,495	7,073	51,89	0,03	0,01	0,04	6,272	7,831	7,803
Klas. szer. czas.	a_KI	-	-	-	9,323	-	-	-	-	-	15,13	-	-	-	-	-	-	-	15,01
	M_KI	-	-	-	9,191	-	-	-	-	-	14,88	-	-	-	-	-	-	-	14,65

Źródło: opracowanie własne

Z informacji zawartych w kolumnie szóstej wynika, że najniższą ocenę błędu wartości wyrównanych (K_{WW}), wynoszącą 5,010%, otrzymano dla predyktora opartego na multiplikatywnym modelu Browna (m_B) o stałej wygładzania $\alpha=0,89$. Jest ona o ok. 0,4 p.p. wyższa od oceny minimalnej otrzymanej dla wariantu W1, dla modelu m_{HW} . Ocena ta dla modelu Browna w postaci addytywnej (a_B) dla $\alpha=0,92$ jest tylko o 0,065 p.p. wyższa.

Najwyższą oceną miernika K_{WW} , wynoszącą 6,338%, charakteryzował się model a_H ze stałymi wygładzania, podobnie jak w wariancie W1, $\alpha=0,20$, $\beta=0,01$. Najniższą ocenę błędu prognoz interpolacyjnych i ekstrapolacyjnych dla tego kryterium otrzymano także dla modelu m_B . Wyniosły one odpowiednio: $K_{WW_IN}=5,733\%$ i $K_{WW_EX}=7,409\%$. Maksymalną ocenę miernika K_{WW_IN} (7,186%) otrzymano dla modelu m_{HW} . Natomiast dla obu postaci modeli Browna i Holta-Wintersa oceny błędów K_{WW_EX} kształtowały się na poziomie od 21,99% dla modelu a_{HW} do 135,2% dla modelu m_H .

Minimalną oceną błędu prognoz interpolacyjnych (K_{IN}), wynoszącą 5,540%, charakteryzował się także predyktor oparty na multiplikatywnym modelu Browna (m_B), ale ze stałą wygładzania $\alpha=0,45$. Ocena ta jest o 0,53 p.p. wyższa od otrzymanej dla wariantu W1. Dla modelu a_B i $\alpha=0,53$ była ona tylko o 0,069 pp. wyższa. Dla pozostałych modeli były one zawarte w przedziale od 6,019% dla model m_H do 7,139% dla modelu a_{HW} . Natomiast minimalną ocenę miernika K_{IN_EX} , wynoszącą 7,049%, otrzymano także dla predyktora m_B . Oceny błędów K_{IN_EX} dla obu postaci modeli Holta i Holta-Wintersa były takie same jak dla kryterium K_{WW_EX} - otrzymano je dla tych samych stałych wygładzania. Kształtowały się na poziomie od 21,99% dla modelu a_{HW} do 135,2% dla modelu m_H .

Najniższą ocenę błędu prognoz ekstrapolacyjnych (K_{EX}), wynoszącą 7,009%, otrzymano dla modelu Browna w postaci multiplikatywnej (m_H) i $\alpha=0,57$. Była ona identyczna z oceną otrzymaną dla wariantu W1. Oznacza to, że wystąpienie znacznie większej liczby luk w wariancie W2 nie miało wpływu na dokładność prognoz ekstrapolacyjnych. Natomiast oceny mierników K_{EX_WW} i K_{EX_IN} przyjęły wartości odpowiednio o ok.: 0,25 i 1,03p.p. wyższe niż w wariancie W1. Drugim w kolejności z oceną $K_{EX}=7,247\%$ był predyktor a_B ze stałą wygładzania $\alpha=0,62$. Dla pozostałych predyktorów otrzymano błędy z przedziału 7,365% (model a_H) - 7,808% (model a_{HW}).

Minimalne oceny mierników: K_{EX_WW} i K_{EX_IN} , wynoszące odpowiednio: 5,214% i 5,571%, otrzymano także na podstawie predyktora opartego na modelu m_B . Z porównania stałych wygładzania dla modeli Browna wynika, że minimalne wielkości mierników: K_{WW} , K_{IN} oraz K_{EX} otrzymano dla różnych ich wartości.

W przypadku obu postaci modeli Holta i Holta-Wintersa minimalne oceny mierników K_{EX} otrzymano także dla innych wartości stałych wygładzania niż w przypadku dwóch pozostałych mierników. Wartości mierników K_{EX_WW} i K_{EX_IN} były odpowiednio o: 0,204 p.p i 0,030 p.p wyższe od minimalnych wartości mierników K_{WW} i K_{IN} .

W dwóch ostatnich wierszach tabeli podane zostały oceny mierników: K_{ww} , K_{in} i K_{ex} , otrzymane na podstawie modeli klasycznych w postaci addytywnej (a_{kl}) i multiplikatywnej (m_{kl}). Średnie względne błędy wartości teoretycznych (wyrównanych) dla modelu addytywnego i multiplikatywnego, wynoszące odpowiednio: 9,323% oraz 9,191%, są blisko dwukrotnie wyższe od minimalnej oceny otrzymanej dla najlepszego modelu adaptacyjnego (m_{hw}). W przypadku prognoz interpolacyjnych względne ich błędy przyjęły wartości: 15,13% (a_{kl}) oraz 14,88% (m_{kl}). Oceny te są o ponad 8,5 p.p. wyższe od maksymalnego średniego błędu prognoz, otrzymanego na podstawie modelu (a_{hw}), i ponad dwu i półkrotnie wyższe od błędu minimalnego dla predyktora m_B .

W przypadku prognoz ekstrapolacyjnych otrzymanych na podstawie modeli klasycznych w postaci addytywnej i multiplikatywnej błędy te wynoszą odpowiednio: 15,01% i 14,65% i są przynajmniej o 7,64 p.p. wyższe od minimalnej oceny tego błędu otrzymanej dla predyktora m_B .

Z porównania ocen błędów otrzymanych na podstawie predyktorów klasycznych dla wariantów W1 i W2 wynika, że są one zbliżone jedynie dla wartości wyrównanych – różnice nie przekraczają 0,15 p.p. Dla prognoz interpolacyjnych dla wariantu W2 otrzymano oceny wyższe odpowiednio: o 2,18 p.p. dla modelu m_{kl} i o 2,33 p.p. dla modelu a_{kl} . Różnice te w przypadku błędów prognoz ekstrapolacyjnych wynoszą odpowiednio: 4,43 p.p. dla modelu m_{kl} i 4,49 p.p. dla modelu a_{kl} . Oznacza to, że zwiększenie liczby luk w sposób znaczący wpłynęło na dokładność prognoz, zwłaszcza ekstrapolacyjnych.

Otrzymanie dla obu wariantów znacząco niższych ocen błędów prognoz intern- i ekstrapolacyjnych dla predyktorów opartych na predyktorach opartych na modelach wyrównywania wykładniczego przemawiają jednoznacznie za wykorzystaniem modeli tej klasy w prognozowaniu brakujących danych w szeregach wysokiej częstotliwości.

Dla wariantu W2, podobnie jak dla wariantu W1, oceny błędów: wartości wyrównanych (K_{ex_ww}) i prognoz interpolacyjnych (K_{ex_in}), otrzymane dla modelu charakteryzującego się minimalną oceną miernika K_{ex} , przyjęły wartości tylko niewiele wyższe od minimalnych ocen błędów: K_{ww} oraz K_{in} . Wzmacnia to wnioski mówiący o tym, że kryterium wyboru modelu dla celów prognozowania *ex ante* nie mogą być to predyktory oparte na obu postaciach modelu Holta oraz modelu Holta-Wintersa.

W tabeli 3 zamieszczone zostały zdezagregowane według: godzin, dni tygodnia i miesięcy, oceny błędów średnich prognoz interpolacyjnych otrzymanych na podstawie predyktorów charakteryzujących się minimalnymi ocenami błędów względnych prognoz (K_{in}) dla wariantów: W1 (model $m_B_{0.98}$) i W2 (model $m_B_{0.45}$). Oceny błędów poprzedzone zostały kolumnami wskazującymi liczby tych prognoz będących jednocześnie liczbami luk. Różnice w liczbach luk wynikają z różnic dni w miesiącach oraz liczb wtorków i czwartków. W kolumnie ostatniej zamieszczono zdezagregowane oceny błędów

prognoz ekstrapolacyjnych otrzymane na podstawie, tego samego dla obu wariantów, predyktora m_B_0.57.

Tabela 3. Przeciętne względne błędy prognoz zdezagregowanych (w %)

	Liczba luk	Predyktor m_B_0.98	Liczba luk	Predyktor m_B_0.45	Predyktor m_B_0.57
Ogółem	5840	4,051	10544	5,540	7,009
G1	0	-	294	3,753	6,415
G2	730	3,345	730	4,594	6,787
G3	0	-	294	3,901	7,096
G4	0	-	294	4,756	7,602
G5	0	-	294	5,027	7,577
G6	730	5,072	730	6,197	8,454
G7	0	-	294	7,723	9,340
G8	730	5,152	730	7,858	9,879
G9	0	-	294	6,377	8,224
G10	730	3,587	730	4,471	6,349
G11	0	-	294	4,732	5,391
G12	0	-	294	4,845	5,671
G13	0	-	294	5,233	5,392
G14	730	2,646	730	3,663	5,192
G15	0	-	294	5,325	5,264
G16	730	3,041	730	3,926	5,660
G17	0	-	294	7,523	7,543
G18	730	4,160	730	6,494	8,887
G19	0	-	294	9,278	9,180
G20	0	-	294	8,848	9,060
G21	0	-	294	7,595	7,680
G22	730	5,404	730	5,344	5,619
G23	0	-	294	5,003	5,066
G24	0	-	294	4,963	4,897
PN	840	4,090	1128	5,191	7,323
WT	832	3,852	2472	5,451	6,272
ŚR	832	3,692	1136	4,249	6,713
CZ	832	3,860	2496	6,543	7,000
PT	832	3,746	1080	4,171	6,870
SO	832	4,154	1104	5,022	6,539
ND	840	4,953	1128	6,324	8,363
ST	488	3,064	768	4,498	5,955
LU	456	3,253	704	4,583	5,446
MAR	496	2,624	784	3,659	10,398

	Liczba luk	Predyktor m_B_0.98	Liczba luk	Predyktor m_B_0.45	Predyktor m_B_0.57
KW	480	3,821	736	5,410	5,791
MAJ	496	5,392	800	5,823	8,270
CZE	480	4,168	752	7,513	6,771
LIP	496	4,437	768	5,504	8,782
SIE	496	5,020	1488	5,468	6,749
WRZ	480	4,333	736	5,168	5,476
PAŹ	496	4,577	1488	5,924	5,965
LIS	480	4,261	768	7,101	6,247
GRU	496	3,592	752	5,821	7,992

Źródło: opracowanie własne

Z informacji zawartych w kolumnie czwartej, odnoszących się do okresów godzinnych, wynika, że błędy prognoz dla wariantu W1 dotyczą tych godzin, w których występowały luki w przedziale czasowym próby – ich liczba wynosiła 730. W przypadku wariantu W2 oceny błędów dotyczą wszystkich godzin, ponieważ luki wystąpiły także w dwóch dniach tygodnia (we wtorki i czwartki) oraz dwóch miesiącach (w sierpniu i październiku). Zatem możliwość bezpośredniego porównania odnosi się do tych godzin, w których wystąpiły luki w wariancie W1.

Minimalną ocenę błędu dla wariantu W1 dla okresów godzinnych wynoszącą 2,646%, otrzymano dla godz. 14 a maksymalną (5,404%) dla godz. 22. W przypadku wariantu W2 minimalną wielkość błędu, podobnie jak dla wariantu W1, otrzymano dla godz. 14 a maksymalną dla godz. 19. Oceny błędów przyjęły wartości: 3,663% oraz 9,278%. Spośród tych samych ośmiu okresów godzinnych co w wariancie W1, maksymalną wielkością błędu (9,879%) charakteryzowała się godz. 8. Dla siedmiu godzin otrzymano niższe oceny błędów prognoz interpolacyjnych. Różnice między nimi zawierały się w przedziale od 0,884 p.p dla godzin 10 i 16 do 2,706 p.p dla godz. 8. Dla wariantu W2 ocenę niższą o 0,060 p.p otrzymano dla godz. 22.

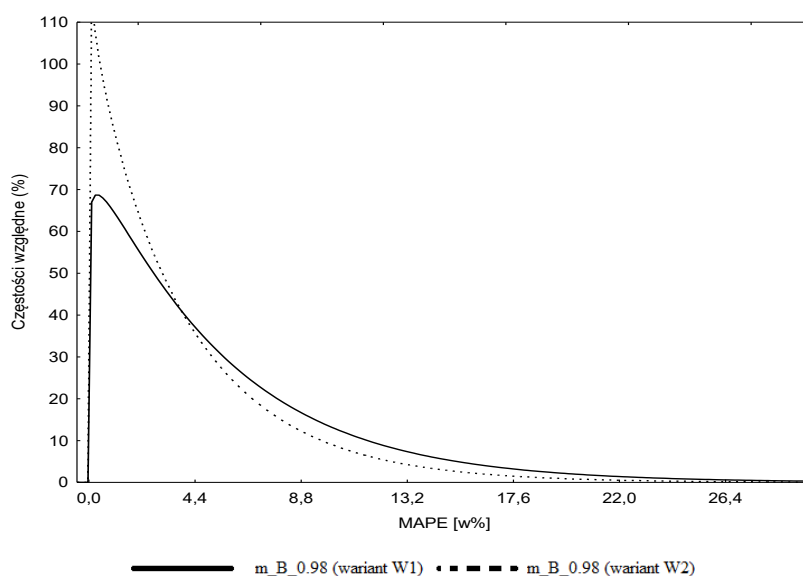
Z porównania ocen błędów prognoz interpolacyjnych dla wariantu W1 dla dni, w których wystąpiły luki w danych wynika, że minimalną wielkość błędu otrzymano dla środy (3,692%) a maksymalną dla niedzieli (4,953%). W przypadku wariantu W2 ocenę minimalną, wynoszącą 4,171%, otrzymano dla wtorku a maksymalną (6,543%), a więc obydwu dni, w których w liczbie 2496 wystąpiły luki w całym przedziale czasowym próby. Oceny błędów dla tych dni w wariancie W1 przyjęły wartości niemal identyczne (3,852% i 3,860%) i były niższe od minimalnej oceny dla wariantu W2.

Minimalne i maksymalne oceny błędów dla wariantu W1, dla miesięcy otrzymano dla marca (2,624%) i maja (5,392%). Natomiast dla wariantu W2 dla marca (3,659%) i czerwca (7,513%). Dla wszystkich miesięcy otrzymano oceny wyższe niż dla wariantu W1. Różnice ocen zawarte były w przedziale od 0,433 p.p.

dla maja do 3,344 p.p. dla czerwca. Dla miesięcy, w których wystąpiły luki w całym przedziale czasowym próby przyjęły wartości: 5,468% dla sierpnia oraz 5,924% dla października i były one odpowiednio o: 0,448 i 1,347 p.p. wyższe od otrzymanych dla wariantu W1.

Obecnie przedstawione zostaną w postaci graficznej aproksymanty teoretyczne empirycznych rozkładów błędów prognoz interpolacyjnych otrzymane na podstawie najlepszych predyktorów adaptacyjnych dla wariantów W1 (m_B_0.98) i W2 (m_B_0.45). Ze względu na różnice w liczbach prognoz zamiast liczebności podane zostały częstości. Najlepiej rozkłady empiryczne były aproksymowane za pomocą rozkładów gamma.

Rysunek 5. Rozkłady błędów prognoz interpolacyjnych otrzymanych na podstawie modeli m_B_0.98 (wariant W1) oraz m_B_0.98 (wariant W2)



Źródło: opracowanie własne

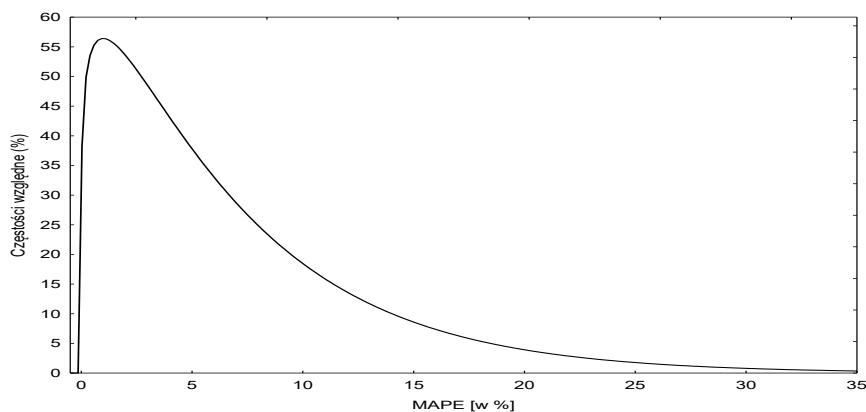
Z rysunku wynika, że błędy prognoz interpolacyjnych dla wariantu W1 przyjmują znacznie częściej wartości niższe niż dla wariantu W2.

Minimalną ocenę błędu prognoz ekstrapolacyjnych dla okresów godzinnych, wynoszącą 4,897%, otrzymano dla godz. 24, a maksymalną (9,879%) dla godz. 8. Oceny błędów dla dni tygodnia zawierały się w przedziale od 6,227% dla wtorku do 8,963% dla niedzieli. Spośród miesięcy bardzo zbliżonymi ocenami najniższymi, wynoszącymi 5,446% i 5,476%, charakteryzowały się luty i wrzesień a oceną maksymalną marzec (10,398%).

Dla miesięcy, w których w wariantcie W2 wystąpiły luki oceny błędów prognoz ekstrapolacyjnych przyjęły wartości: 6,749% dla sierpnia i 5,965% dla października - były one niższe od błędu średniego (7,009%).

Kształtowanie się wykładniczej aproksymanty rozkładu empirycznego błędów prognoz ekstrapolacyjnych otrzymanych na podstawie predyktora opartego na modelu $m_B_0.57$ przedstawione graficznie na rysunku 6.

Rysunek 6. Rozkład błędów prognoz ekstrapolacyjnych otrzymanych na podstawie modelu $m_B_0.57$



Źródło: opracowanie własne

PODSUMOWANIE

Przeprowadzone w pracy rozważania można podsumować następująco:

1. Podstawą wyboru modelu dla celów prognozowania *ex ante* nie mogą być predyktory oparte o modele Holta i Holta-Wintersa, którym odpowiadają minimalne oceny błędów wartości wyrównanych (K_{WW}) i prognoz interpolacyjnych (K_{IN}), ponieważ błędy prognoz ekstrapolacyjnych przyjmują dla nich zazwyczaj bardzo wysokie wartości. Kryterium wyboru powinny być minimalne oceny błędów prognoz ekstrapolacyjnych (K_{EX}). Minimalnym ich ocenom odpowiadają tylko nieznacznie wyższe od minimalnych oceny błędów wartości wyrównanych (K_{WW}) i prognoz interpolacyjnych (K_{IN}).
2. Dokładność prognoz interpolacyjnych dla wariantu W1 była wyższa od dokładności prognoz otrzymanych dla wariantu W2. Oznacza to istotny wpływ liczby luk. Minimalne oceny błędów prognoz ekstrapolacyjnych dla obu wariantów były takie same.
3. Minimalne oceny błędów prognoz inter- i ekstrapolacyjnych otrzymane na podstawie modeli adaptacyjnych dla obu wariantów luk systematycznych, charakteryzowały się ocenami błędów co najmniej kilkadziesiąt procent niższymi od otrzymanych na podstawie predyktorów klasycznych.
4. W toku rozważań przeprowadzonych w pracy potwierdzona została w pełni przydatność modeli wyrównywania wykładniczego w prognozowaniu zmiennej