METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XVIII/4, 2017, s. 584 – 591

Received: 05.10.2017
Accepted: 05.01.2018

WŁASNOŚCI FUNKCJI WARTOŚCI DLA STOCHASTYCZNEGO PROBLEMU STEROWANIA OPTYMALNEGO TYPU MAYERA

Wiesław Grygierzec
Wydział Rolniczo-Ekonomiczny
Uniwersytet Rolniczy w Krakowie
e-mail: rrgrygie@cyf-kr.edu.pl

Streszczenie: Niniejszy artykuł jest kontynuacją rozważań dotyczących problemu stochastycznego sterowania optymalnego w tzw. przypadku Mayera. Problemy takie opisywanego są poprzez stochastyczne równanie różniczkowe typu Ito a funkcjonał kosztu jest zależny od stanu układu w czasie końcowym. Jest to w szczególności model dyfuzyjny, modele takie są adekwatne do opisu zjawisk biologicznych i ekonomicznych w których z przyczyn naturalnych mamy do czynienia z oddziaływaniem dużej ilości niezależnych sił losowych. Problem sterowania optymalnego polega na podejmowaniu na podstawie możliwie najnowszych informacji, odpowiednich decyzji spośród wszystkich możliwych w celu osiągnięcia zamierzonego celu co realizuje się poprzez minimalizację funkcjonału kosztu. Ważną rolę odgrywa tutaj tzw. funkcja wartości. W niniejszym artykule autor udawania kolejne własności funkcji wartości dla tzw. problemu Mayera czyli dla specjalnej postaci funkcjonału kosztu.

Słowa kluczowe: stochastyczne sterowanie optymalne, funkcja wartości, problem Mayera

WSTĘP

Rozważamy problem stochastycznego sterowania optymalnego w czasie ciągłym. W najogólniejszym ujęciu składają się na niego:

- Po pierwsze: *układ dynamiczny*, którego stan $x(t,\omega)$ zmienia się w czasie, ewoluujący w losowym środowisku, formalnie ujętym jako przestrzeń probabilistyczna $(\Omega,\mathcal{F},P)$, czyli ogół wszystkich możliwych scenariuszy czynników losowych. Stan układu jest reprezentowany przez wektor liczb

DOI: 10.22630/MIBE.2017.18.4.53

potrzebny do opisu problemu i oznaczany jako - stan w chwili t przy scenariuszu $\omega \in \Omega$. Definiujemy dynamikę stanu układu, tzn. odwzorowanie:

$$[0,T] \ni t \to x(t,\omega),$$

dla każdego $\omega \in \Omega$, poprzez proces stochastyczny albo stochastyczne równanie różniczkowe.

- Po drugie: *sterowanie* albo inaczej *strategia*. Dynamika $t \to x(t)$ jest dodatkowo zależna od parametru którym jest sterowanie $u = u(t,\omega)$ a więc pewien proces którego wartość jest obliczana dla każdego t na podstawie informacji dostępnych do chwili *t,* bez posiadanej wiedzy o przyszłości. Sterowania powinny spełniać pewne ograniczenia i zbiór takich sterowań oznaczamy $\mathcal{U}$ - zbiór sterowań dopuszczalnych.
- Po trzecie: *kryterium kosztu* lub *zysku.* Zadanie polega minimalizacji (lub maksymalizacji) funkcjonału *J(x,u)* po zbiorze wszystkich dopuszczalnych sterowaniach

$$J(x,u) \to \min_{u \in U} \quad ,$$

gdzie najogólniej rozważamy funkcjonał

$$J(x,u) = E\left[\int_0^T l(x(t,\omega;u(t))dt + g(x(T,\omega;u(T))\right], \tag{1}$$

gdzie l jest tzw. kosztem bieżącym natomiast g jest kosztem końcowym. Czas T może być albo deterministyczny albo losowy tzn. $T = \tau(\omega)$ czyli tzw. *moment stopu.* Szczególną rolę odgrywa tzw. *funkcja wartości* czyli minimum funkcjonału kosztu

$$v = \min_{u,\tau} J(x,u,\tau). \tag{2}$$

Funkcja ta posiada pewne własności które pozwalają w pewnych sytuacjach na znalezienie rozwiązania problem optymalnego sterowania stochastycznego czyli na znalezieniu sterowania u i (lub) momentu stopu τ.

PROBLEM STEROWANIA OPTYMALNEGO MAYERA

Stochastyczny układ ze sterowaniem

Rozważamy następujący stochastyczny układ ze sterowaniem opisujący ewolucje funkcji stanu $y(t) \in R^d$

$$\begin{cases} dy(t) = f(t, y(t), u(t))dt + \sigma(t, y(t), u(t))dW(t), \; s \in (t_0, \infty), \\ y(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3}$$

gdzie (t_0, x_0) są ustalone, natomiast sterowanie $u = u(t, \omega)$, czyli jest w rzeczywistości funkcją dwóch argumentów, przy czym argument losowy ω jest pomijany w zapisie. Zakładamy, że dana jest przestrzeń probabilistyczna z filtracją $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq t_0}, P)$, na której jest zdefiniowany standardowy proces Wiennera Ω(τ), $u(t)$ jest parametrem który pełni rolę sterowania i należy do zbioru $\mathcal{U}$ - tzw. zbioru sterowań dopuszczalnych.

Definicja. Powiemy, że y(t) jest rozwiązaniem układu (3) przy ustalonym $u \in \mathcal{U}$ jeżeli zachodzi równanie całkowe

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(t, y(t), u(t))dt + \int_{t_0}^{t} \sigma(t, y(t), u(t))dW_t, \tag{4}$$

gdzie pierwsza całka jest całką Riemanna natomiast druga jest całką stochastyczną Ito, definicja i konstrukcja są klasyczne można znaleźć m.in. [Ikeda, Watanabe 1989[1], Kartzas, Shreve 1991[2]] również w [Grygierzec 2016[3]]. W owyższej równości w sposób niejawny występuje oczywiście argument $\omega \in \Omega$, tzn. mamy do czynienia ze zmiennymi losowymi po obu stronach nierówności, i wymagamy aby zachodziła dla P prawie wszystkich (p.w.) $\omega \in \Omega$.

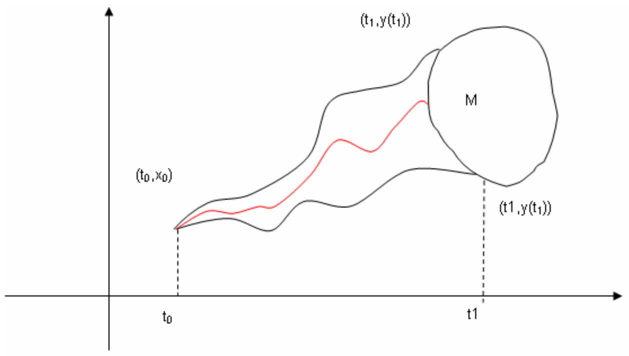
---

[1] Ikeda N., Watanabe S. (1989) Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, 2nd Edition. North Holland-Kodansha, Amsterdam-Tokyo.

[2] Kartzas I., Shreve S. E. (1991) Brownian Motion and Stochastic Calculus (Graduate Texts in Mathematics). Springer-Verlag.

[3] Grygierzec W. (2016) O pewnym problemie Mayera sterowania optymalnego w przypadku stochastycznym. Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych, XVII/2, 36-45.

Rysunek 1: Problem Mayera



Źródło: opracowanie własne

Załóżmy ze spełnione są warunki gwarantujące istnienie jednoznacznego rozwiązania $y(t) = y(t;t_0,x_0,u)$ układu (3). Problem sterowania w przypadku Mayer'a związany jest z zadanym zbiorem $M \subset R^d$ o regularnym brzegu ∂M oraz deterministyczną funkcją $g(t,x)$ określona na brzegu ∂M tego zbioru, tzn.

$$g : [t_0,\infty)\times\partial M \to R, \tag{5}$$

oraz z tzw. momentem stopu $t_1 = t_1(\omega)$, czyli momentem Markowa, który zdefiniowany jest w sposób następujący. Jako zbiór sterowań dopuszczalnych przyjmiemy tylko takie sterowania *u(t)*, które w skończonym czasie przeprowadzają wektor stanu $\psi(\tau)$ do zbioru M prawie na pewno (p.n.), oznacza to, że istnieje taki (losowy) moment stopu $t_1 = t_1(\omega)$, że $y(t_1) \in M$:

$$t_1 = \inf\{t > t_0,\ y(t;t_0,x_0,u) \in M \text{ p.n.}\}\cdot \tag{6}$$

Niech będzie zadana pewna funkcja g na brzegu ∂M zbioru M:

$$g : [t_0,\infty)\times\partial M \to R\,. \tag{7}$$

Zdefiniujemy następujący funkcjonał kosztu:

$$J(t_0,x_0;u) = Eg\big(t_1, y(t_1;t_0,x_0,u)\big), \tag{8}$$

zbiór sterowań dopuszczalnych

$$U_{t_0,x_0} = \{u : [0,\infty)\times\Omega \to U \mid F_t - \text{adaptowane}, t_1(t_0,x_0,u(\cdot)) < \infty \text{ p.n.}\} \tag{9}$$

oraz funkcja wartości v:

$$v(t_0,x_0) = \inf_{u\in U_{t_0,x_0}} Eg\big(t_1, y(t_1;t_0,x_0,u)\big). \tag{10}$$

Zagadnienie sterowania optymalnego z powyżej zdefiniowaną funkcją wartości nazywamy problemem Mayera dla sterowania optymalnego.

Powiemy, że y^* jest trajektorią optymalną a (y^*,u^*) jest parą optymalną, jeżeli

$$v(t_0,x_0)=\inf_{u\in U_{t_0,x_0}} Eg(t_1,y(t_1;t_0,x_0,u))=Eg(t_1,y^*(t_1;t_0,x_0,u^*))\,. \tag{11}$$

W teorii sterowania optymalnego rozważa się dwa zasadnicze podejścia: podejście Pontryagina, które opiera się o zasadę maksimum, dla której istnieją szerokie opracowania w literaturze m.in. [Haussman 1986[4]], [Grygierzec 2012[5]] oraz podejście Bellmana, czyli oparte o programowania dynamiczne. W tym ostatnim poszukuje się tzw. funkcji wartości, która ma tutaj kluczowe znaczenie i wykazanie pewnych jej własności jest właśnie przedmiotem niniejszego artykułu. Podobne zagadnienie w sytuacji deterministycznej jest przedstawione np. książce [Fleming Rischel 1975[6]]. Również monografie [Fleming, Soner 1993[7]] oraz [Yong, Zhou 1999[8]] są poświecone problemom m.in. własności funkcji wartości. Podejście przedstawione w niniejszej pracy jest bliskie tzw. twierdzeniu weryfikacyjnemu, stanowi istotny wkład w lepsze zrozumienie i poszukiwanie rozwiązań optymalnego sterowania.

Oznaczmy przez $Q=[0,T]\times R^d$. Przyjmiemy następujące założenia: niech funkcje

$$f: Q\times U\to R^d,$$
$$\sigma: Q\times U\to R^d\times R^d,$$

będą ciągłe oraz niech $f(\cdot,\cdot,v),\sigma(\cdot,\cdot,v)$ będą klasy *C[l](Q).* Zakładamy, że istnieje pewna stała *C>0,* taka, że:

$$(1)\,|f_t|+|f_x|+|\sigma_t|+|\sigma_x|\le C,$$
$$(2)\,|f(t,x,v)|+|\sigma(t,x,v)|\le C(1+|x|+|v|),$$

gdzie f_t,f_x oznaczają odpowiednie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial t}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial x}$, natomiast $|\sigma|$ jest normą operatorową σ, również σ_t,σ_x są pochodnymi cząstkowymi σ o wartościach macierzowych.

---

4 Haussmann U. G. (1986) A Stochastic Maximum Principle for Optimal Control of Diffusions. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 151, Longman.

5 Grygierzec W. (2012) O jednolitym podejściu do rachunku wariacyjnego i sterowania optymalnego. Metody ilosciowe w badaniach ekonomicznych, XIII/1.

6 Fleming W. H., Rishel R. W. (1975) Deterministic and Stochastic Optimal Control. Springer-Verlag.

7 Fleming W. H, Soner H. M. (1993) Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions, Springer-Verlag.

8 Yong J., Zhou X. Y. (1999) Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer-Verlag.

Z ogólnej teorii stochastycznych równań różniczkowych wiadomo [Ikeda, Watanabe 1989[9]], że przy powyższych założeniach równanie (8) ma dokładnie jedno rozwiązanie $y(t) \in L^2(\Omega; C(0,T; R^d))$, gdzie

$$L^2(\Omega; C(0,T; R^d)) = \{x_t : E \sup_{t\in[0,T]} |x_t|^2 < \infty\}.$$

WŁASNOŚCI FUNKCJI WARTOŚCI

Przy powyższych założeniach w pracy [Grygierzec 2016[10]] zostały udowodnione dwie własności funkcji wartości które przytoczymy tu bez dowodu:

Twierdzenie 1
Proces v(t,y(t)) jest podmartyngałem dla $t \in [t_0, t_1]$ *tzn.*

$$v(s, y(s)) \le E[v(t, y(t)) \mid F_s] \text{ p.n.}$$

dla $t_0 \le s \le t \le t_1$.

Twierdzenie 2
y^* *- trajektoria optymalna* $\Rightarrow \quad v(t, y(t)) \equiv const \ p.n.$

Wniosek który płynie z powyższych twierdzeń jest taki, że f*unkcja wartości* na wszystkich trajektoriach rozwiązania układu (2) jest *podmartyngałem*, jedynie na *trajektorii optymalnej* jest stała prawie wszędzie względem miary probabilistycznej *P*.

W bieżące pracy wykażemy następną własność funkcji wartości, a mianowicie:

Twierdzenie 3
Niech W(s,y) będzie funkcją rzeczywistą określoną na R^{d+1} *taką, że zachodzi:*

(i) $W(s,y)=g(s,y)$ *dla dowolnego* $(s, y) \in [t_0, \infty) \times \partial M$,

(ii) $W(s, y) \le E[W(t, y(t)) \mid F_s]$ *dla dowolnego* $t_0 \le s \le t_1$,

(iii) $W(t, \tilde{y}(t)) \equiv const$ *p.n. dla* $t_0 \le t \le t_1$,

Wtedy

$$\tilde{y} \textit{ jest trajektorią optymalną tzn. } \tilde{y} = y^* \textit{ oraz } W(t_0, x_0) = v(t_0, x_0).$$

[9] Ikeda, N., Watanabe S. (1989) Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. 2nd Edition. North Holland-Kodansha, Amsterdam-Tokyo.

[10] Grygierzec W. (2016) O pewnym problemie Mayera sterowania optymalnego w przypadku stochastycznym. Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych, XVII/2, 36-45.

Dowód. Z założeń mamy (i) i (ii) mamy

$$W(t_0, x_0) \quad \le E[W(t_1, y(t_1)) \mid F_{t_0}] = E[W(t_1, y(t_1)) =$$
$$= Eg(t_1, y(t, y(t_1)),$$

natomiast z założeń (i) i (iii) mamy

$$W(t_0, x_0,) \quad = EW(t, \tilde{y}(t)) = EW(t_1, \tilde{y}(t_1)) =$$
$$= Eg(t_1, \tilde{y}(t_1)),$$

z czego wynika, że

$$Eg(t_1, \tilde{y}(t_1)) \le Eg(t_1, y(t_1))$$

zatem $\tilde{y} = y^*$ jest trajektoria optymalną oraz

$$W(t_0, x_0) = Eg(t_1, y^*(t_1)) = v(t_0, x_0)\,,$$

czyli $W(t_0,x_0)$ jest funkcją wartości.

Powyższe twierdzenie pozwala na znalezienie zweryfikowanie czy jakaś funkcja jest funkcją wartości, ponieważ w ogólności funkcja ta nie jest dana w sposób jawny. Jeżeli np. odgadujemy pewną funkcję *W(t,y)* która to funkcja zgadza się z funkcją *g(t,y)* na brzegu ∂M zbioru *M*, i jeżeli funkcja ta jest podmartyngałem na wszystkich trajektoriach a na pewnej trajektorii jest stała to funkcja ta jest funkcją wartości.

BIBLIOGRAFIA

Fleming W. H., Rishel R. W. (1975) Deterministic and Stochastic Optimal Control. Springer-Verlag.

Fleming W. H, Soner H. M. (1993) Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. Springer-Verlag.

Haussmann U. G. (1986) A Stochastic Maximum Principle for Optimal Control of Diffusions. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 151, Longman.

Grygierzec W. (2012) O jednolitym podejściu do rachunku wariacyjnego i sterowania optymalnego. Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych, XIII/1, 118-126.

Grygierzec W. (2016) O pewnym problemie Mayera sterowania optymalnego w przypadku stochastycznym. Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych, XVII/2, 36-45.

Kartzas I., Shreve S. E. (1991) Brownian Motion and Stochastic Calculus (Graduate Texts in Mathematics). Springer-Verlag.

Ikeda N., Watanabe S. (1989) Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. 2nd Edition. North Holland-Kodansha, Amsterdam-Tokyo.

Peng S. (1990) A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM Journal on Control and Optimization, 28(4), 966-979.

Pham H. (2009) Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications. Springer-Verlag.

Szafirski B. (2012) Notes from seminar. Not published.

Yong J., Zhou X. Y. (1999) Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer-Verlag.

PROPERTIES OF VALUE FUNCTION FOR STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF MAYER TYPE

Abstract: We consider stochastic optimal control problem of Mayer type. The evolution of system is described by Ito's stochastic differential equation. Such systems are sometimes called diffusion models. The cost functional relay only on terminal condition. The value function play crucial role in determining the so called feedback optimal control. In the present paper which is a continuation of previous one the authors prove some properties of value function and gives a verification criterion.

Keywords: stochastic optimal control, value function, Mayer problem