

SKOŚNOŚĆ ROZKŁADU A ESTYMACJA KWANTYLOWYCH MIAR RYZYKA – PRZYPADEK RYNKU METALI

Dominik Krężolek

Wydział Informatyki i Komunikacji
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
e-mail: dominik.krezolek@ue.katowic.pl

Streszczenie: Pomiar ryzyka inwestycyjnego wymaga zastosowania narzędzi, które w odpowiedni sposób uwzględniają anomalie obserwowane w empirycznych rozkładach stóp zwrotu. Klasyczne modele szacowania ryzyka zakładają gaussowskie rozkłady prawdopodobieństwa, które nie uwzględniają asymetrii rozkładu, mającej związek z występowaniem obserwacji ekstremalnych. Takie obserwacje istotnie wpływają na poziom prawdopodobieństwa w ogonach rozkładów. W pracy podjęto próbę oceny wpływu skośności rozkładu prawdopodobieństwa na ocenę poziomu ryzyka inwestycji podejmowanych na rynku metali. Zastosowano kwantylowe miary ryzyka, m.in. wartość zagrożoną oraz warunkową wartość zagrożoną przy wykorzystaniu różnych teoretycznych rozkładów prawdopodobieństwa. Analizę przeprowadzono uwzględniając okres kryzysu finansowego.

Słowa kluczowe: skośność, pomiar ryzyka, Value-at-Risk, ryzyko ekstremalne, grube ogony

WPROWADZENIE

Analityka rzeczywistości gospodarczej wymaga umiejętnego rozpoznania struktury badanego zjawiska. Niejednokrotnie można wskazać różne charakterystyki, które w istotnym stopniu mogą wpływać na wartości klasycznie wykorzystywanych miar deskrypcyjnych, a tym samym na interpretację wyników. Jednym z takich problemów jest zjawisko skośności obserwowane w rozkładzie wartości danych. Skośność w wartościach danych, a dokładniej asymetria, jest to sytuacja, kiedy występuje różnica pomiędzy podstawowymi miarami tendencji centralnej, tj. średnią, medianą i dominantą. Rozważając problem z punktu widzenia graficznej prezentacji danych, z asymetrią mamy do czynienia wtedy, gdy

kształt histogramu poniżej wartości centralnej jest różny od jego kształtu powyżej tej wartości.

W przypadku analizy zjawisk rzeczywistych nie występują rozkłady idealnie symetryczne, podobnie jak nie występują rozkłady idealnie normalne. Dlatego też ważnym zagadnieniem jest wskazanie, czy takie odchylenie od symetrii jest statystycznie istotne. W prezentowanym artykule podjęto próbę oceny wpływu skośności rozkładu na oszacowania wybranych kwantylowych miar ryzyka. Ta klasa miar jest niezwykle istotna z punktu widzenia wysokiego stopnia niepewności obserwowanej na rynkach, a co za tym idzie – istotnych zmian w poziomie cen (stóp zwrotu) analizowanych aktywów. Zjawiska zmienności i niepewności nie są przypisane do konkretnych rynków, są identyfikowalne na każdym z nich, oczywiście z odpowiednią intensywnością. W środowisku teoretyków oraz praktyków dominują analizy bazujące na informacjach płynących z rynków finansowych (przede wszystkim rynek kapitałowy). Teoretycy tworzą konstrukty analityczne w oparciu o dane rynkowe, natomiast praktycy wykorzystują te konstrukty zależnie od swoich potrzeb. Okazuje się, że wiele modeli klasycznie wykorzystywanych do opisu zjawisk na rynku akcji może być z powodzeniem wykorzystywanych również na innych rynkach, takich jak np. rynek towarowy.

Wszelkie modele oraz miary prezentowane w artykule zweryfikowano na danych rzeczywistych pochodzących z rynku metali. Eksploracja tego obszaru badawczego nie jest popularyzowana wśród analityków, a jeśli prowadzone są badania, to koncentrują się na analizie fundamentalnej, długookresowej. Brak jest prac badawczych dotyczących analizy ryzyka inwestycyjnego w metale, zatem prezentowany artykuł wypełnia po części tę lukę. Należy doprecyzować, iż przedmiotem analiz jest szczególna grupa metali, określana jako metale nieżelazne. Zaliczono do nich aluminium, miedź, ołów, nikiel, cynę oraz cynk. Są to metale stanowiące tzw. dodatki stopowe, uszlachetniające jakościowo produkt finalny a tym samym istotnie wpływające na jego cenę. Zastosowanie dodatku stopowego determinowane jest przeznaczeniem wyrobu gotowego. Metale wykorzystywane są w bardzo wielu dziedzinach działalności człowieka. Można tu wskazać m.in. wykorzystanie gospodarcze (przemysł konstrukcyjny, automotive, małe i duże AGD, przemysł wojskowy i kosmiczny, etc.) czy medyczne (stomatologia, chirurgia, kosmetyka, etc.). Dodatkowo metale notowane są na giełdach towarowych, zatem podlegają podobnym prawom i wpływom rynkowym jak inne aktywa (np. akcje). Stąd naturalnym zdaje się być wykorzystanie modeli popularyzowanych na innych, podobnych rynkach, także na rynku towarowym.

METODOLOGIA

Wybrane miary skośności danych

W literaturze przedmiotu problem skośności danych omawiany jest dość obszernie. Pierwsze wzmianki na ten temat pojawiają się na podstawowym kursie statystyki, a wraz ze wzrostem zaawansowania wiedzy wprowadzane są modyfikacje miar klasycznych celem wydobycia dodatkowej, często niejawniej informacji na temat źródła, kierunku czy siły asymetrii [Aczel 2000]. Dla zmiennej losowej X skośność rozkładu prawdopodobieństwa może być określona za pomocą trzeciego momentu centralnego jako $M_3(X) = E([x - E(X)]^3)$, wskazując tym samym kierunek asymetrii. Na bazie tej miary można zdefiniować klasyczny współczynnik asymetrii:

$$AS_K(X) = \frac{M_3(X)}{\sqrt[3]{M_2(X)}}, \quad (1)$$

gdzie $M_2(X)$ określa wariancję zmiennej losowej X . Inną popularną miarą skośności jest tzw. współczynnik skośności Pearson'a wyznaczany jako:

$$AS_P(X) = \frac{m_1(X) - \text{Moda}(X)}{\sqrt{M_2(X)}}, \quad (2)$$

gdzie $m_1(X)$ oraz $\text{Moda}(X)$ oznaczają odpowiednio moment zwykły rzędu pierwszego oraz dominantę (modę) zmiennej losowej X . Zarówno $AS_K(X)$ jak i $AS_P(X)$ informują nie tylko o kierunku asymetrii, ale także o jej sile.

Ciekawe informacje o charakterze skośności rozkładu zmiennej losowej przekazują kwantylowe mierniki asymetrii. W pracy Hinkley'a z 1975 roku [Hinkley 1975] pojawia się uogólniona miara asymetrii bazująca na wybranym kwantylu zmiennej losowej. Zakładając p -ty kwantyl zmiennej losowej X oraz definiując medianę tej zmiennej dla $p = 0,5$ uogólniona kwantylowa miara asymetrii wyrażona jest formułą:

$$AS_Q(X) = \frac{F^{-1}(1-p) - 2F^{-1}(0,5) + F^{-1}(p)}{F^{-1}(1-p) - F^{-1}(p)}, \quad (3)$$

gdzie $F^{-1}(p)$ oznacza funkcję kwantylową zmiennej losowej X .

Kwantylowa miara skośności dana wzorem (3) jest uogólnieniem wprowadzonego przez Bowley'a [Bowley 1920] kwartylowego wskaźnika skośności zadanego wzorem:

$$AS_B(X) = \frac{F^{-1}(0,75) - 2F^{-1}(0,5) + F^{-1}(0,25)}{F^{-1}(0,75) - F^{-1}(0,25)}. \quad (4)$$

Zjawisko asymetrii ma swoje odzwierciedlenie w grubości lewego oraz prawego ogona rozkładu. W przypadku asymetrii prawostronnej istnieje wysokie prawdopodobieństwo występowania obserwacji o wartościach istotnie wyższych od poziomu przeciętnego (określonego jako średnia arytmetyczna lub mediana), natomiast w przypadku asymetrii lewostronnej – o wartościach istotnie niższych.

Zjawisko grubych ogonów związane jest z występowaniem w zbiorze danych obserwacji odstających (outliers), które znacząco wpływają na wyniki prowadzonych analiz. Rozwiązanie kwestii pomiaru asymetrii w przypadku zbiorów danych posiadających obserwacje odstające uzyskuje się za pomocą miary MedCouple, wprowadzonej przez Brys'a i in. [Brys i in. 2004].

Dla uporządkowanego zbioru realizacji zmiennej losowej X niech dany będzie szereg $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Niech ponadto zachodzi $x_i \neq x_j, x_i < x_j$ oraz niech określona będzie pewna funkcja h jako:

$$h(x_i, x_j) = \frac{x_j - F^{-1}(0,5) + x_i}{x_j - x_i}. \quad (5)$$

W przypadku, gdy $x_i = x_j = F^{-1}(0,5)$ funkcja h , określona jako:

$$h(x_i, x_j) = \begin{cases} -1, & i < j \\ 0, & i = j \\ 1, & i > j \end{cases}. \quad (6)$$

Ostatecznie miarę MedCouple definiuje się jako:

$$MC(X) = \text{med}_{x_i \leq F^{-1}(0,5) \leq x_j} h(x_i, x_j), \quad (7)$$

gdzie $\text{med}(h)$ oznacza medianę zbioru wartości funkcji h .

Wprowadzanie skośności do rozkładów prawdopodobieństwa

Biorąc pod uwagę klasyczne podejście do analizy zjawisk obserwowanych na szeroko rozumianym rynku finansowym zdecydowana większość modeli teoretycznych bazuje na symetrycznych rozkładach prawdopodobieństwa (np. rozkład normalny o określonych parametrach czy też rozkład t-Studenta o określonej liczbie stopni swobody). Niemniej jednak możliwa jest transformacja rozkładu symetrycznego w rozkład skośny celem uzyskania odpowiedniego dopasowania do danych [Piontek 2007].

Niech zatem $g(x)$ oznacza funkcję gęstości zmiennej losowej X opisaną pewnym ciągłym rozkładem symetrycznym. Niech dodatkowo dane będą funkcje normujące $u_1(\xi)$ oraz $u(\xi)$. Skośny rozkład $f_\xi(x)$ opisuje następująca formuła:

$$f_\xi(x) = \frac{2[g(\frac{x}{u_1(\xi)})I_{x \geq 0} + g(\frac{x}{u_2(\xi)})I_{x < 0}]}{u_1(\xi) + u_2(\xi)}, \quad (8)$$

gdzie I_x oznacza funkcję wskaźnikową. Jeśli $f_\xi(x)$ definiuje skośny rozkład prawdopodobieństwa, jako zmienne normujące u przyjmuje się najczęściej następujące pary:

$$u_I = \begin{cases} u_1(\xi) = \xi \\ u_2(\xi) = \frac{1}{\xi} \end{cases} \quad (9)$$

lub

$$u_{II} = \begin{cases} u_1(\xi) = 1 - \xi \\ u_2(\xi) = 1 + \xi \end{cases}. \quad (10)$$

Funkcja normująca u_I posiada parametr skośności $\xi \in (0, +\infty)$. Dla $\xi \in (0, 1)$ rozkład jest lewostronnie skośny, natomiast dla $\xi \in (1, +\infty)$ rozkład jest prawostronnie skośny. Z kolei funkcja normująca u_{II} posiada parametr skośności $\xi \in (-1, 1)$. Dla $\xi \in (-1, 0)$ otrzymany rozkład jest lewostronnie skośny, natomiast dla $\xi \in (0, 1)$ rozkład posiada prawostronną asymetrię. Rozkłady symetryczne uzyskuje się dla $\xi = 1$ (funkcja u_I) oraz dla $\xi = 0$ (funkcja u_{II}).

Rozważając praktyczną ocenę asymetrii empirycznego rozkładu prawdopodobieństwa wśród bardziej popularnych rozkładów symetrycznych przekształcanych na rozkłady asymetryczne wyróżnić można skośny rozkład normalny oraz skośny rozkład t-Studenta, dane następującymi wzorami [Piontek 2005]:

- skośny rozkład normalny:

$$f_{s-norm}(x) = \frac{2}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\alpha \frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad (11)$$

gdzie X jest ciągłą zmienną losową o skośnym rozkładzie normalnym opisanym parametrami położenia μ , skali σ oraz kształtu α , a dodatkowo φ oraz Φ oznaczają odpowiednio funkcję gęstości oraz funkcję dystrybuanty rozkładu normalnego standardowego.

- skośny rozkład t-Studenta:

$$f_{s-t}(x; v) = \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \left\{ g\left(\xi(ax + b); v\right) I_{x < -\frac{b}{a}} + g\left(\frac{ax+b}{\xi}; v\right) I_{x \geq -\frac{b}{a}} \right\}, \quad (12)$$

gdzie X jest ciągłą zmienną losową, ξ jest parametrem skośności, g jest funkcją gęstości standardowego rozkładu t-Studenta o v stopniach swobody, natomiast parametry a oraz b określają wzory:

$$a = \frac{\Gamma\left(\frac{v-1}{2}\right) \sqrt{v-2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) \quad (13)$$

oraz

$$b^2 = \left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1\right) - a^2, \quad (14)$$

gdzie Γ jest funkcją gamma.

Kwantylowe miary ryzyka inwestycyjnego

Problem pomiaru ryzyka inwestycyjnego jest zagadnieniem nad wyraz skomplikowanym, zależnym w dużej mierze od przedmiotu inwestycji. W artykule skoncentrowano się przede wszystkim na ocenie ryzyka inwestycji w aktywa finansowe notowane na rynku regulowanym, dla których pomiar dokonywany jest w oparciu o stopy zwrotu. Generalizując definicję ryzyka należy skupić się nie tylko na potencjalnych stratach w stosunku do wartości oczekiwanej, ale także na potencjalnych zyskach. Taki sposób oceny wynika między innymi z faktu, że rozkład zmiennej, której ryzyko dotyczy, zazwyczaj nie jest rozkładem symetrycznym, a zatem stosunek prawdopodobieństwa zysków do strat nie jest

jednostkowy. Na szczególną uwagę zasługują kwantylowe miary ryzyka, które związane są bezpośrednio z realizacją stopy zwrotu na poziomie znacznie różniącym się od oczekiwanego. Wśród kwantylowych miar ryzyka szczególną rolę odgrywa wartość zagrożona VaR, definiowana jako α -kwantyl rozkładu stopy zwrotu¹ i wskazująca liczbowo wielkość potencjalnej straty, jaka może wynikać z podjętej inwestycji w zadanym horyzoncie czasowym i przy ustalonym poziomie tolerancji $1 - \alpha$. VaR posiada jednak pewną wadę – nie jest miarą koherentną. Miernik nie spełnia aksjomatu subaddytywności, tj. założenia, że ryzyko całkowite podjętej inwestycji jest nie większe niż suma ryzyk indywidualnych, składających się na tą inwestycję [Artzner i in. 1999]. Wady tej pozbawione są dwie inne kwantylowe miary ryzyka [Kou i in. 2014]:

- warunkowa wartość zagrożona w zensie wartości oczekiwanej (Expected Shortfall), definiowana jako wartość oczekiwana ponad poziom VaR:

$$ES_{\alpha} = CVaR_{\alpha} = E(r_t - VaR_{\alpha} | r_t > VaR_{\alpha}), \quad (15)$$

- warunkowa wartość zagrożona w sensie mediany (Median Shortfall), definiowana jako mediana realizacji stopy zwrotu ponad poziom VaR:

$$MS_{\alpha} = Median(r_t - VaR_{\alpha} | r_t > VaR_{\alpha}), \quad (16)$$

gdzie r_t oznacza stopę zwrotu w okresie t .

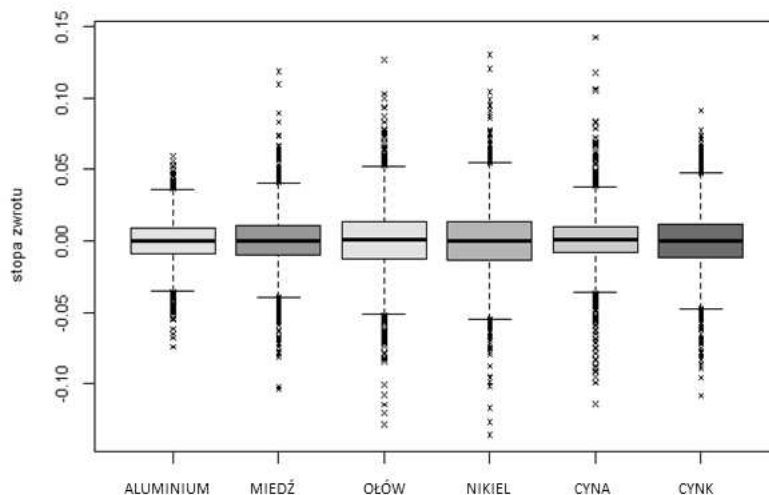
Oba mierniki spełniają aksjomaty koherentnej miary ryzyka, a dodatkowo miara Median Shortfall jest odpornym kwantylowym miernikiem ryzyka, w związku z tym może być z powodzeniem wykorzystywana do oceny ryzyka realizacji stopy zwrotu ponad poziom VaR nawet w sytuacji występowania obserwacji ekstremalnych (outliers).

ANALIZA EMPIRYCZNA

W części empirycznej pracy przedstawiono problem asymetrii w danych oraz jej wpływu na ocenę ryzyka za pomocą miar kwantylowych. Przedmiotem badania są inwestycje realizowane na rynku metali nieżelaznych: aluminium, miedź, ołów, nikiel, cyna oraz cynk. Na podstawie dziennych kursów spot dla badanych metali notowanych na London Metal Exchange w okresie styczeń 2006 – czerwiec 2015 wyznaczonoienne logarytmiczne stopy zwrotu, które były przedmiotem analizy. Zaproponowano porównanie rozkładów symetrycznych: normalnego oraz t-Studenta z wyznaczonymi na ich podstawie analogicznymi rozkładami skośnymi. Wśród mierników kwantylowych wykorzystano VaR oraz ES dla kwantyli na poziomie 0,01, 0,05, 0,95 oraz 0,99. Graiczną prezentację rozkładów przedstawiono na wykresie pudełkowym.

¹ Jest to jedna z wielu definicji miary prezentowanych w literaturze (przyp. autora).

Rysunek 1. Wykres pudełkowy empirycznych rozkładów stóp zwrotu analizowanych metali



Źródło: obliczenia własne

Wykres nie wskazuje jednoznacznie na występowanie asymetrii w danych, ale na jego podstawie można zidentyfikować istotną ilość realizacji stopy zwrotu zarówno w lewym jak i w prawym ogonie rozkładu. Podstawowe statystyki opisowe przedstawia tabela 1.

Tabela 1. Statystyki opisowe

Miara	Aluminium	Miedź	Ołów	Nikiel	Cyna	Cynk
średnia	-0,00013	0,00011	0,00021	-0,00006	0,00031	0,00002
odchylenie standardowe	0,01515	0,01959	0,02340	0,02446	0,01991	0,02163
kurtoza	1,39506	3,34158	2,65182	2,51252	5,03549	1,86027
minimum	-0,07437	-0,10400	-0,12850	-0,13605	-0,11435	-0,10832
maksimum	0,05913	0,11880	0,12675	0,13060	0,14253	0,09135

Źródło: obliczenia własne

Statystyki podstawowe wskazują, że w badanym okresie inwestycje w aluminium oraz nikiel generowały średniokresowe straty. Ponadto inwestycje w nikiel cechowały się najwyższym poziomem ryzyka. Z kolei najwyższy oczekiwany zysk zaobserwowano dla inwestycji w cynę, przy relatywnie niskim ryzyku (porównując z pozostałymi aktywami). Empiryczne rozkłady stóp zwrotu dla każdego z metali wykazują wysoki stopień leptokurtozy. W tabeli 2 zaprezentowano wyniki oceny skośności tych rozkładów.

Tabela 2. Miary skośności

Miara	Aluminium	Miedź	Ołów	Nikiel	Cyna	Cynk
MC	0,04014	0,01102	-0,01107	0,01807	-0,02695	-0,00768
AS _K	-0,15932	-0,03863	-0,20146	-0,01393	-0,13275	-0,18044
AS _P	-0,00827	0,00557	0,00877	-0,00254	0,01550	0,00076
AS _Q	0,04876	0,04145	-0,03028	0,03331	-0,00507	0,00401
AS _{Q=0,05}	0,03265	0,00152	-0,04002	-0,00693	-0,08454	0,02161
AS _{Q=0,01}	-0,05618	0,00586	-0,06783	0,00664	-0,04071	-0,03664

Źródło: obliczenia własne

Wyniki oceny asymetrii w empirycznych rozkładach wykazują różnice ze względu na przyjęty miernik. Miary MC oraz kwantylowy AS_Q przyjmują odmienne (dodatnie) co do kierunku wartości niż pozostałe mierniki dla niektórych z metali. Przykładowo, rozkład stopy zwrotu cen aluminium w ocenie MC oraz AS_Q jest rozkładem prawostronnie skośnym, z kolei według miar AS_K oraz AS_P jest to rozkład o lewostronnej asymetrii. Należy zwrócić uwagę, że w przypadku różnic co do znaku wartości mierników kwantylowych (w tym MC) częściej przyjmują wartości oscylujące bliżej zera. Może to być podyktowane faktem wpływu obserwacji odstających i ekstremalnych na wartości miar klasycznych.

Do oceny poziomu ryzyka inwestycji w analizowane metale wykorzystano wartość zagrożoną VaR oraz miarę ES. Oszacowano wartości miar dla rozkładu empirycznego, skośnego normalnego oraz skośnego t-Studenta dla kwantyla na poziomie 0,01, 0,05, 0,95 oraz 0,99. Dodatkowo w tabeli zamieszczono oszacowania parametru skośności ξ (zgodnie z funkcją normującą u_I) dla każdego z prezentowanych rozkładów teoretycznych. Wyniki przedstawiono w tabelach 3-4.

Tabela 3. Oszacowanie VaR

VaR	Aluminium	Miedź	Ołów	Nikiel	Cyna	Cynk
Rozkład empiryczny						
VaR _{0,01}	-0,04346	-0,05599	-0,06650	-0,06284	-0,05605	-0,06118
VaR _{0,05}	-0,02390	-0,03089	-0,03865	-0,03997	-0,03241	-0,03455
VaR _{0,95}	0,02471	0,03099	0,03694	0,03880	0,02915	0,03608
VaR _{0,99}	0,03810	0,05665	0,05929	0,06305	0,05353	0,05685
Rozkład skośny normalny						
ξ	0,94217	0,95721	0,96338	0,97626	0,98311	0,99036
VaR _{0,01}	-0,03537	-0,04544	-0,05422	-0,05696	-0,04599	-0,05030
VaR _{0,05}	-0,02504	-0,03210	-0,03828	-0,04029	-0,03343	-0,03556
VaR _{0,95}	0,02366	0,02809	0,03521	0,03627	0,02739	0,03542
VaR _{0,99}	0,03624	0,04527	0,05631	0,06022	0,04992	0,05127

Rozkład skośny t-Studenta						
ξ	0,92132	0,93196	0,94188	0,95173	0,96419	0,98128
VaR _{0,01}	-0,03977	-0,05125	-0,05744	-0,05871	-0,04723	-0,05437
VaR _{0,05}	-0,02419	-0,03176	-0,03831	-0,04014	-0,03275	-0,03497
VaR _{0,95}	0,02391	0,02911	0,03572	0,03724	0,02843	0,03579
VaR _{0,99}	0,03786	0,04971	0,05727	0,06182	0,05019	0,05217

Źródło: obliczenia własne

Tabela 4. Oszacowanie ES

ES	Aluminium	Miedź	Ołów	Nikiel	Cyna	Cynk
Rozkład empiryczny						
ES _{0,01}	-0,05179	-0,07126	-0,08290	-0,08282	-0,07631	-0,07669
ES _{0,05}	-0,03459	-0,04590	-0,05539	-0,05514	-0,04878	-0,05043
ES _{0,95}	0,03259	0,04489	0,05169	0,05511	0,04469	0,04809
ES _{0,99}	0,04417	0,06831	0,07610	0,08170	0,07370	0,06573
Rozkład skośny normalny						
ξ	0,94217	0,95721	0,96338	0,97626	0,98311	0,99036
ES _{0,01}	-0,04050	-0,05208	-0,06215	-0,06525	-0,05273	-0,05762
ES _{0,05}	-0,03137	-0,04028	-0,04806	-0,05051	-0,04074	-0,04459
ES _{0,95}	0,02982	0,04173	0,04896	0,05320	0,04198	0,04612
ES _{0,99}	0,04276	0,06018	0,06944	0,07532	0,06866	0,06320
Rozkład skośny t-Studenta						
ξ	0,92132	0,93196	0,94188	0,95173	0,96419	0,98128
ES _{0,01}	-0,04281	-0,05941	-0,07412	-0,07219	-0,06432	-0,06220
ES _{0,05}	-0,03219	-0,04186	-0,05122	-0,05184	-0,04313	-0,04616
ES _{0,95}	0,03019	0,04220	0,04917	0,05388	0,04313	0,04699
ES _{0,99}	0,04320	0,06430	0,07388	0,07813	0,07093	0,06412

Źródło: obliczenia własne

Wyniki zamieszczone w tabelach 3-4 informują, że oszacowanie parametru skośności dla klasycznie symetrycznych rozkładów prawdopodobieństwa wskazuje na lewostronną asymetrię empirycznych rozkładów. Asymetria jest słaba, niemniej jednak występuje. Widoczne jest to już przy porównaniu miar dla kwantyli symetrycznych parami, tj. 0,01-0,99 oraz 0,05-0,95. Biorąc pod uwagę wykorzystanie rozkładów skośnych w estymacji VaR i ES zaobserwowano, że oszacowania bliższe rzeczywistym uzyskano dla rozkładu skośnego t-Studenta. Rozkład ten, w porównaniu z rozkładem normalnym posiada w wersji

standardowej grubszy ogon, co przekłada się na jego wersję skośną. Zatem zasadna jest estymacja miar ryzyka z wykorzystaniem skośnego rozkładu t-Studenta.

PODSUMOWANIE

W prezentowanej pracy podjęto dyskusję na temat możliwości oceny asymetrii rozkładu empirycznego przy pomocy różnych mierników oraz poruszono problem wpływu asymetrii na oszacowanie wybranych kwantylowych mierników ryzyka. Rozważania teoretyczne zobrazowano na przykładzie inwestycji na rynku metali nieżelaznych. Ocena stopnia asymetrii empirycznych rozkładów stóp zwrotu analizowanych metali wykazała różnice w zależności od przyjętej miary przede wszystkim w sensie kierunku asymetrii. Wynik ten można tłumaczyć występowaniem obserwacji ekstremalnych w przestrzeni realizacji stóp zwrotu oraz rozbieżnością rozkładu empirycznego z rozkładem normalnym (rozkłady empiryczne cechowały się grubymi ogonami). Do oceny ryzyka wykorzystano dwie popularne miary: wartość zagrożoną oraz warunkową wartość zagrożoną. Jako rozkłady teoretyczne dla stóp zwrotu zaproponowano skośny rozkład normalny oraz skośny rozkład t-Studenta. Wyniki analizy wskazują, że bardziej rzeczywiste oszacowania miar ryzyka uzyskano przy wykorzystaniu skośnego rozkładu t-Studenta. Jest to uzasadnione, gdyż rozkład ten ma własność uwzględniania występowania w danych obserwacji ekstremalnych. Reasumując należy podkreślić konieczność uwzględniania momentów wyższych rzędów w analizie i ocenie ryzyka inwestycyjnego, gdyż pominięcie tego faktu może skutkować niewłaściwymi prognozami oczekiwanych zysków lub strat.

BIBLIOGRAFIA

- Aczel A. D. (2000) Statystyka w zarządzaniu. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 34-35.
- Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. (1999) Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9 (3), 203-228.
- Bowley A. L. (1920) *Elements of Statistics*, Charles Scribner's Sons, New York.
- Brys G., Hubert M., Struyf A. (2004) A Robust Measure of Skewness. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 13 (4), 996-1017.
- Hinkley D. V. (1975) On Power Transformation to Symmetry. *Biometrika*, 62, 101-111.
- Kou S., Peng X. (2014) Expected Shortfall or Median Shortfall. *Journal of Financial Engineering*, 1 (1), 1-6.
- Piontek K. (2005) Modelowanie własności szeregów stóp zwrotu – skośność rozkładów. *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu 1096, Ekonometria 15*, 297-308.
- Piontek K. (2007) Pomiar i testowanie skośności rozkładów stóp zwrotu instrumentów finansowych. *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu 1096, Taksonomia*, 122-130.

**SKEWNESS OF THE DISTRIBUTION AND ESTIMATION
OF QUANTILE RISK MEASURES – THE CASE OF METALS
MARKET**

Abstract: Investment risk measurement requires specific statistical tools which take into account anomalies observed in empirical distributions of returns. Classical models used for modelling risk are based on gaussian approach and do not include asymmetry in data, which is significantly related to extreme observations. These observations affect the thickness of both right and left tails of the empirical distributions. In this paper the influence of skewness observed in empirical probability distributions on the assessment of extreme risk is examined. The area of research is the metals market within the period including economic crisis. The analysis contains some selected quantile risk measures and their estimation using chosen theoretical distributions.

Keywords: skewness, risk measurement, Value-at-Risk, extreme risk, heavy tails