Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych
Tom XXI/2, 2020, s. 113 -119

Received: 03.12.2020
Accepted: 23.12.2020

MAKSYMALNA POTĘGA OGÓLNA GRUPY PAŃSTW

Zofia Zielińska-Kolasińska https://orcid.org/0000-0001-8845-758X
Instytut Matematyki
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach
e-mail: zofia.zielinska-kolasinska@uph.edu.pl

Streszczenie: Jednym z aspektów badań politologicznych jest analiza potęgi grupy państw. Zagadnienie to należy do zakresu metod ilościowych analizy politycznej [King 1991]. W niniejszej pracy udowodniono, jak powinny rozkładać się udziały grupy państw w poszczególnych czynnikach uwzględnionych w modelu potęgi ogólnej (inaczej: gospodarczej) Sułka, aby łączna siła tej grupy była maksymalna. Wskazano także górne oszacowanie łącznej potęgi, zależne od liczebności grupy. W modelu Sułka kluczową rolę odgrywa produkt krajowy brutto, liczba ludności oraz powierzchnia państwa. Ogólna potęga grupy państw jest sumą potęg państw wchodzących w skład analizowanej grupy.

Słowa kluczowe: potęgometria, potęga ogólna, potęga gospodarcza

JEL classification: C00, C02

WSTĘP

W badaniu stosunków międzynarodowych dużą rolę odgrywa potęga pewnej grupy państw. Istnieje wiele modeli potęgometrycznych [Sułek 2013], które różnią się uwzględnianymi czynnikami. Wybór tych czynników zależy od rodzaju badanej potęgi np. ogólna, militarna, geopolityczna. Do najważniejszych czynników zaliczyć można następujące [Lach 2014]: ludność, kierowanie/przywództwo, zasoby naturalne, cechy narodowe, położenie geograficzne, siła militarna, wielkość terytorium państwa, nauka i technologia, typ państwa, integralność narodowa/spójność, relacje dyplomatyczne, finanse/zasoby, produkcja przemysłowa, wzrost ekonomiczny, ideologia, handel międzynarodowy, żywność/produkcja, pozycja strategiczna/partnerstwo, stabilność polityczna, granice i sąsiedztwo, ukształtowanie/topografia, klimat, wartość PKB, media, homogeniczność etniczna, transport, zdolności (możliwości) strategiczne.

W pracy rozważany jest model Sułka [Sułek 2013] (dokładna jego definicja podana została w następnym rozdziale), który dzięki swojej nieskomplikowanej formie może być z powodzeniem wykorzystywany nie tylko przez specjalistów. Czynniki

https://doi.org/10.22630/MIBE.2020.21.2.11

w nim uwzględnione to wartość PKB, liczba ludności oraz wielkość terytorium jednostki politycznej. Dzięki takiemu doborowi zmiennych, przy określaniu potęgi bierze się pod uwagę trzy ważne aspekty funkcjonowania państwa: ekonomiczny, demograficzny oraz przestrzenny [Kiczma, Sułek 2020].

Na uwagę zasługuje fakt, że rozpatrywana w długim horyzoncie czasowym, potęga ogólna jest najważniejszym wskaźnikiem relacji między jednostkami politycznymi, ponieważ odzwierciedlany przez nią rozkład sił formowany jest w wyniku procesów historycznych, a dzięki temu ten rodzaj potęgi jest mało podatny na decyzje polityczne (w przeciwieństwie do potęg militarnej i geopolitycznej, które mogą ulegać dynamicznym zmianom w stosunkowo krótkich okresach czasu). Ze względu na tę dużą stabilność w czasie, warto przyjrzeć się, w jaki sposób formuje się łączna potęga ogólna grupy państw i zbadać jej zależność od potęg poszczególnych jednostek. Szczególnie interesujący jest problem znalezienia takiego rozkładu sił, dla którego łączna potęga grupy jest największa. W pracy wyznaczono maksymalną łączną potęgę ogólną grupy państw oraz wskazano udziały poszczególnych państw maksymalizujące łączną potęgę ogólną.

Model potęgi ogólnej Sułka

Sułek zaproponował następujący model ogólnej potęgi grupy n państw:

$$P_d = \sum_{i=1}^{n} D_i^{\alpha} L_i^{\beta} p_i^{\gamma}.$$

Poszczególne składniki sumy są uogólnionymi funkcjami produkcji Cobba-Douglasa.

Niech PKB_i oznacza produkt krajowy brutto i-tego państwa, Lud_i oznacza liczbę ludności i-tego państwa oraz niech pow_i oznacza powierzchnię tego państwa. W powyższym wzorze D_i oznacza udział produktu krajowego brutto i-tego państwa w ogólnym produkcie krajowym brutto badanej grupy państw:

$$D_i = \frac{PKB_i}{\sum_{i=1}^{n} PKB_i}.$$

Przez L_i oznaczono udział ludności i-tego państwa w ogólnej liczbie ludności badanej grupy państw:

$$L_i = \frac{Lud_i}{\sum_{i=1}^{n} Lud_i},$$

natomiast p_i oznacza udział powierzchni i-tego państwa w ogólnym terytorium badanej grupy państw:

$$p_i = \frac{pow_i}{\sum_{i=1}^{n} pow_i}.$$

Jako współczynniki α, β oraz γ zostały przyjęte wartości

$$\alpha = 0,652, \;\; \beta = 0,217, \;\; \gamma = 0,109.$$

Wybór takich wartości współczynników Sułek [Sułek 2020] uzasadnia tym, że potęga w największym stopniu zależy od produktu krajowego brutto, następnie od liczby ludności, a w najmniejszym stopniu od terytorium państwa, zatem $\alpha > \beta > \gamma$. Powołując się na prawo malejącej użyteczności krańcowej, autor modelu postuluje, że $\alpha + \beta + \gamma < 1$. Dalsze zależności, czyli $\gamma = \frac{\beta}{2}$ oraz pozostawanie współczynników w proporcji $3 : 1 : \frac{1}{2}$ są wyborem arbitralnym, przy czym Sułek powołuje się na związek z ciągiem Fibonacciego oraz złotą proporcją, dokonując ostatecznie drobnej korekty współczynników.

Ogólna potęga grupy n państw określana jest jako

$$P_d = \sum_{i=1}^{n} D_i^{0{,}652} L_i^{0{,}217} p_i^{0{,}109}.$$

Chcemy wyznaczyć maksymalną wartość potęgi P_d oraz udziały produktów krajowych brutto $D_1, \ldots, D_n$, liczby ludności $L_1, \ldots, L_n$ oraz powierzchni $p_1, \ldots, p_n$ poszczególnych państw, dające największą potęgę grupy państw.

Maksymalna potęga grupy państw

W dalszym ciągu rozważymy ogólniejszą postać modelu potęgometrycznego. Mianowicie

$$P_d = \sum_{i=1}^{n} D_i^{\alpha} L_i^{\beta} p_i^{\gamma},$$

gdzie α, β oraz γ są danymi dodatnimi liczbami, takimi że $\alpha + \beta + \gamma \leq 1$. Znajdziemy takie udziały D_i, L_i, p_i dla $i = 1, \ldots, n$, dla których powyższa funkcja osiąga maksimum, a także wyznaczymy to maksimum.

Ogólna potęga grupy n państw jest funkcją $3n$ zmiennych. Uwzględniając warunek sumowania do jedności udziałów poszczególnych państw

$$\sum_{i=1}^{n} D_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} L_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

udział jednego z tych państw można zapisać za pomocą udziałów pozostałych $n-1$ państw (dla ustalenia uwagi wybieramy n-te państwo):

$$D_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} D_i, \quad L_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} L_i, \quad p_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i,$$

a funkcję ogólnej potęgi możemy potraktować jako funkcję $3(n-1)$ zmiennych.

W dalszym ciągu dokonamy drobnej zmiany oznaczeń. Niech $f : (0,1)^{3(n-1)} \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(a_1, \ldots, a_{n-1}; b_1, \ldots, b_{n-1}; c_1, \ldots, c_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^p b_i^r c_i^s + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^p \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)^r \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_i\right)^s.$$

Jest to potęga ogólna n analizowanych państw.

Niech $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1})$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_{n-1})$ oraz $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_{n-1})$ będą $n-1$ wymiarowymi wektorami opisującymi udziały kolejnych państw.

W celu wyznaczenia maksimum tej funkcji wyznaczamy jej gradient. Jak łatwo sprawdzić

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = pa_i^{p-1}b_i^r c_i^s - p(1-\sum_{j=1}^{n-1} a_j)^{p-1}(1-\sum_{j=1}^{n-1} b_i)^r(1-\sum_{j=1}^{n-1} c_j)^s, \text{ dla } i = 1, \ldots, n-1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_i} = ra_i^p b_i^{r-1} c_i^s - r(1-\sum_{j=1}^{n-1} a_j)^p(1-\sum_{j=1}^{n-1} b_j)^{r-1}(1-\sum_{j=1}^{n-1} c_j)^s, \text{ dla } i = 1, \ldots, n-1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial c_i} = sa_i^p b_i^r c_i^{s-1} - s(1-\sum_{j=1}^{n-1} a_j)^p(1-\sum_{j=1}^{n-1} b_j)^r(1-\sum_{j=1}^{n-1} c_j)^{s-1}, \text{ dla } i = 1, \ldots, n-1,$$

A zatem gradient funkcji f w punkcie $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ wyraża się wzorem:

$$\nabla f(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$$
$$\begin{bmatrix} pa_1^{p-1}b_1^r c_1^s - p(1-\sum_{i=1}^{n-1} a_i)^{p-1}(1-\sum_{i=1}^{n-1} b_i)^r(1-\sum_{i=1}^{n-1} c_i)^s \\ \vdots \\ pa_{n-1}^{p-1}b_{n-1}^r c_{n-1}^s - p(1-\sum_{i=1}^{n-1} a_i)^{p-1}(1-\sum_{i=1}^{n-1} b_i)^r(1-\sum_{i=1}^{n-1} c_i)^s \\ ra_1^p b_1^{r-1} c_1^s - r(1-\sum_{i=1}^{n-1} a_i)^p(1-\sum_{i=1}^{n-1} b_i)^{r-1}(1-\sum_{i=1}^{n-1} c_i)^s \\ \vdots \\ ra_{n-1}^p b_{n-1}^{r-1} c_{n-1}^s - r(1-\sum_{i=1}^{n-1} a_i)^p(1-\sum_{i=1}^{n-1} b_i)^{r-1}(1-\sum_{i=1}^{n-1} c_i)^s \\ sa_1^p b_1^r c_1^{s-1} - s(1-\sum_{i=1}^{n-1} a_i)^p(1-\sum_{i=1}^{n-1} b_i)^r(1-\sum_{i=1}^{n-1} c_i)^{s-1} \\ \vdots \\ sa_{n-1}^p b_{n-1}^r c_{n-1}^{s-1} - s(1-\sum_{i=1}^{n-1} a_i)^p(1-\sum_{i=1}^{n-1} b_i)^r(1-\sum_{i=1}^{n-1} c_i)^{s-1} \end{bmatrix}.$$

Niech $\mathbf{a}_* = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$, $\mathbf{b}_* = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ oraz $\mathbf{c}_* = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$. Ponieważ

$$\nabla f(\mathbf{a}_*, \mathbf{b}_*, \mathbf{c}_*) = 0,$$

więc punkt $(\mathbf{a}_*, \mathbf{b}_*, \mathbf{c}_*)$ jest punktem stacjonarnym funkcji f.

Zbadamy jakim punktem stacjonarnym jest $(\mathbf{a}_*, \mathbf{b}_*, \mathbf{c}_*)$, tzn. czy w tym punkcie funkcja f osiąga maksimum, minimum czy też jest to punkt siodłowy. W tym celu zbadamy określoność hesjanu.

Mamy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_i^2} = -(1-p)p\left(a_i^{-2+p} b_i^r c_i^s + \left(1-\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{-2+p}\left(1-\sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)^r\left(1-\sum_{i=1}^{n-1} c_i\right)^s\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_j} = -(1-p)p\left(1-\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{-2+p}\left(1-\sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)^r\left(1-\sum_{i=1}^{n-1} c_i\right)^s,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial b_i} = pr\left(a_i^{-1+p} b_i^{-1+r} c_i^s + \left(1-\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{-1+p}\left(1-\sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)^{-1+r}\left(1-\sum_{i=1}^{n-1} c_i\right)^s\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial b_j} = pr\left(1-\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{-1+p}\left(1-\sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)^{-1+r}\left(1-\sum_{i=1}^{n-1} c_i\right)^s.$$

Pozostałe drugie pochodne wyglądają podobnie.

Hesjan w punkcie stacjonarnym $(\mathbf{a}_*, \mathbf{b}_*, \mathbf{c}_*)$ można zapisać w postaci (po odpowiednich uproszczeniach):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -(1-p)p & pr & ps \\ pr & -(1-r)r & rs \\ ps & rs & -(1-s)s \end{bmatrix} \otimes n^{2-p-r-s}\left(\mathbf{I}_{n-1} + \mathbf{J}_{n-1}\right),$$

gdzie $\mathbf{I}_{n-1}$ jest macierzą jednostkową stopnia $n-1$ oraz $\mathbf{J}_{n-1}$ jest macierzą samych jedynek stopnia $n-1$. Symbol $\otimes$ oznacza iloczyn Kroneckera macierzy. Zauważmy, że $\mathbf{J}_{n-1} = \mathbf{1}_{n-1}\mathbf{1}_{n-1}^T$, gdzie $\mathbf{1}_{n-1}$ jest kolumnowym wektorem samych jedynek.

Macierz $(\mathbf{I}_{n-1} + \mathbf{J}_{n-1})$ jest dodatnio określona.

Macierz

$$-\begin{bmatrix} -(1-p)p & pr & ps \\ pr & -(1-r)r & rs \\ ps & rs & -(1-s)s \end{bmatrix}$$

również jest dodatnio określona (kolejne minory główne wynoszą odpowiednio: $(1-p)p$, $pr(1-p-r)$, $prs(1-p-r-s)$).

Zatem hesjan w punkcie stacjonarnym jest macierzą ujemnie określoną, czyli punkt $(\mathbf{a}_*, \mathbf{b}_*, \mathbf{c}_*)$ jest punktem maksimum funkcji f.

Otrzymujemy górne oszacowanie całkowitej potęgi ogólnej n państw:

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \leq f(\mathbf{a}_*, \mathbf{b}_*, \mathbf{c}_*) = n^{1-(p+r+s)}.$$

W głównej formule potęgi ogólnej wartości wykładników ustalone są następująco: $p = 0,652$, $r = 0,217$, $s = 0,109$. A zatem górne oszacowanie ogólnej potęgi grupy n państw wynosi:

$$\sum_{i=1}^{n} P_d^i = \sum_{i=1}^{n} D_i^{0,652} L_i^{0,217} p_i^{0,109} \leq n^{0,022}.$$

Największą potęgą ogólną charakteryzuje się grupa państw o jednakowych udziałach w całkowitym PKB, całkowitej liczbie ludności oraz całkowitej powierzchni. To znaczy, że

$$D_1 = \cdots = D_n = \frac{1}{n},\ L_1 = \cdots = L_n = \frac{1}{n},\ p_1 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}.$$

Stąd wynika, że grupa n państw ma największą potęgę, gdy

$$PKB_1 = \cdots = PKB_n,\ Lud_1 = \cdots = Lud_n,\ pow_1 = \cdots = pow_n.$$

Innymi słowami, jest to grupa państw o jednakowym PKB, jednakowej liczbie ludności oraz o jednakowej powierzchni.

Podsumowanie

Uzyskany wynik jest ważnym rezultatem, ponieważ pokazuje, w jaki sposób powinna być rozłożona siła w grupie państw, aby ich łączna potęga była jak największa. Maksimum osiągane jest przy takim rozkładzie, w którym każda jednostka polityczna posiada równe udziały w PKB, liczbie ludności oraz terytorium. W sytuacji, gdy któreś państwo dominuje nad innymi w którymkolwiek zakresie, łączna wartość potęgi ogólnej spada, co nie jest korzystne z punktu widzenia całego układu.

Wśród wielu znanych modeli siły państw, na szczególną uwagę zasługuje model Sułka, którego prostota sprawia, że jest on doskonałym punktem wyjścia do różnego rodzaju analiz i interpretacji. Równomierny rozkład PKB, liczby ludności oraz terytorium w obrębie grupy jednostek politycznych, gwarantuje w rozpatrywanym modelu największą łączą wartość potęgi. Gdyby zmodyfikować model poprzez wprowadzenie dodatkowych czynników, ale zachować obecną strukturę modelu (czyli iloczyn pewnych udziałów w potęgach, których wykładniki są liczbami z przedziału $[0; 1]$ o sumie mniejszej, bądź równej 1), to udowodniony wynik pozostałby bez zmian.

Zaprezentowane rozumowanie można powtórzyć dla modelu potęgi wojskowej Sułka [Kiczma, Sułek 2020].

BIBLIOGRAFIA

Kiczma Ł., Sułek M. (2020) National Power Rankings of Countries 2020. Oficyna Wydawnicza ASPRA-JR, Warszawa.

King G. (1991) On Political Methodology, Political Analysis. Political Analysis, 2, 1-30.

Lach Z. (2014) Analiza poziomu rozwoju społeczno-ekonomicznego i potęgi państw Europy Środkowo-Wschodniej. Przegląd Geopolityczny, 9, 31-52.

Sułek M. (2013) Potęga państw. Modele i zastosowania. Rambler, Warszawa.

Sułek M. (2020) Measurement of national power - a powermetric model. Przegląd Geopolityczny, 32, 35-57.

The Maximum of National Power of a Group of Political Entities

Abstract: One of the aspects of quantitative methods in political science is the analysis of national power of a group of political entities. In Sułek's model of national power there are three factors in the main formula (Gross Domestic Product (GDP), population size and the area of territory). The aim of this paper is to find such a distribution of shares of each of the factors among the countries of a certain group, that maximises the joint national power. The upper evaluation of the joint national power, in respect to the number of countries in the group, is also given.

Keywords: powermetrics, national power, economic power

JEL classification: C00, C02