METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XXI/3, 2020, s. 121 – 133

Received: 12.10.2020
Accepted: 17.12.2020

DOPASOWANIE MODELI GARCH A JAKOŚĆ UZYSKANYCH PROGNOZ

Sylwia Anna Domańska https://orcid.org/0000-0002-9418-778X
Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski
e-mail: sdomanska@wne.uw.edu.pl

Streszczenie: Analiza dopasowania modeli GARCH przedstawiona w artykule składa się z trzech części. Po pierwsze, dokonano rozważań teoretycznych w tym zakresie, odnosząc się do zaleceń wskazanych w literaturze przedmiotu. Po drugie, przedstawiono praktyczne aspekty właściwego doboru modelu GARCH dla danego szeregu czasowego na podstawie wartości kryteriów informacyjnych. Po trzecie, wskazano, za pomocą narzędzi analizy ilościowej, związek jakości dopasowania modelu z jakością uzyskanych za jego pomocą prognoz. Celem niniejszego artykułu jest sprawdzenie czy lepsze dopasowanie modelu skutkuje lepszą jakością uzyskanej prognozy.

Słowa kluczowe: prognozowanie, modele GARCH, szeregi czasowe, dopasowanie

JEL classification: C32, C53, C58, G10, G17

WSTĘP

Istotną cechą rynków finansowych, odgrywającą ważną rolę przy ich wycenie, jest zmienność cen instrumentów finansowych. Wysoka zmienność cen to z jednej strony szansa na ponadprzeciętny zysk, z drugiej możliwość dużej straty. W literaturze przedmiotu wymienia się dwie główne cechy zmienności, które komplikują wycenę instrumentów finansowych. Po pierwsze, zmienność cen instrumentów finansowych ewoluuje w czasie oraz posiada tendencję do tworzenia skupień. Jeśli w jakimś okresie pojawi się większa wartość wariancji, to najprawdopodobniej pociągnie ona za sobą kolejna większą wartość i odwrotnie. Po drugie, cechą zmienności jest jej nieobserwowalność, która wymusza poszukiwanie różnego rodzaju miar zmienności. Ważnym sposobem prognozowania zmienności jest wykorzystanie modeli GARCH.

https://doi.org/10.22630/MIBE.2020.21.3.12

Analiza dopasowania modeli GARCH przedstawiona w artykule składa się z trzech części. Po pierwsze, dokonano rozważań teoretycznych w tym zakresie, odnosząc się do zaleceń wskazanych w literaturze przedmiotu. Po drugie, przedstawiono praktyczne aspekty właściwego doboru modelu GARCH dla danego szeregu czasowego na podstawie wartości kryteriów informacyjnych. Po trzecie, wskazano, za pomocą narzędzi analizy ilościowej, związek jakości dopasowania modelu z jakością uzyskanych za jego pomocą prognoz. Celem niniejszego artykułu jest sprawdzenie czy lepsze dopasowanie modelu skutkuje lepszą jakością uzyskanej prognozy.

CHARAKTERYSTYKA SZEREGÓW FINANSOWYCH

Finansowe szeregi czasowe różnią się pod wieloma względami od typowych danych statystycznych. Kursy akcji czy indeksów zawsze odnoszą się do zysków lub strat określonej grupy inwestorów. Wpływ na nie mają często wydarzenia gospodarcze, ogólnospołeczne, polityczne czy też nieracjonalne zachowania inwestorów.

W badaniach ekonometrycznych dotyczących finansowych szeregów czasowych modeluje się najczęściej tempo wzrostu instrumentów finansowych, klasycznie definiowane jako[1]:

$$r_t = (y_t - y_{t-1}) / y_{t-1} \tag{1}$$

gdzie y_t jest kursem danego instrumentu finansowego. W literaturze finansowej r_t nazywane jest stopą zwrotu. Alternatywnie stosuje się przyrost logarytmu kursu y_t:

$$r_t = \ln y_t - \ln y_{t-1} = \ln(y_t / y_{t-1}) \tag{2}$$

Charakter szeregów różni się w zależności od segmentów, z którego pochodzą. Zwroty cen akcji maja inne własności niż zwroty kursów walutowych, bądź zwroty notowań indeksów[2]. Możemy jednak wyróżnić grupę cech charakterystyczną dla większości finansowych szeregów zwrotów logarytmicznych.

Po pierwsze bardzo często pojawia się zjawisko grupowania wariancji, czyli seryjne występowanie wysokich i niskich wartości wariancji kursu danego instrumentu finansowego, w kolejnych następujących po sobie okresach. W literaturze przedmiotu można znaleźć wiele hipotez próbujących wyjaśnić przyczynę występowania tego efektu. Najbardziej popularna dotyczy charakteru samego procesu napływu informacji na rynek. W zależności od rodzaju informacji oraz jej subiektywnej oceny inwestorzy mogą sprzedawać lub kupować

---

[1] Brzeszczyński J., Kelm R. (2002) Ekonometryczne modele rynków finansowych, WIG-Press, Warszawa, s. 37.

[2] Doman M., Doman R. (2009) Modelowanie zmienności i ryzyka, Oficyna Wolters Kluwer, Kraków, s. 22.

instrumenty finansowe. Występują więc po stronie popytu, bądź podaży kształtując ceny giełdowe.

Zjawisko grupowania wariancji pojawia się jako skutek reakcji rynku na napływ informacji, które powodują rodzaj zaburzenia. Efektem jest wzrost, bądź spadek danego zjawiska, co w konsekwencji prowadzi do zwiększenia jego zmienności[3]. Pojawienie się informacji może spowodować krótkookresowe wzrosty, bądź spadki wartości kursu, które nie powodują zmiany dotychczasowego trendu. Zazwyczaj taka sytuacja pojawia się w relatywnie krótkich okresach, kiedy występuje niepewność związana z efektem oddziaływania danej informacji w najbliższej przyszłości.

Alternatywna hipoteza głosi, że zjawisko grupowania wariancji pochodzi z otoczenia makroekonomicznego, w którym funkcjonuje rynek. Czynnikami determinującymi zmienność cen giełdowych są bowiem: regulacje prawne, zmiany podaży pieniądza, wielkość dywidendy, fazy cyklu gospodarczego, jak również zmiany stóp procentowych[4]. Czynniki te oddziałują na rynek papierów wartościowych, przyczyniając się do powstawania efektu grupowania wariancji.

Zgodnie z inna hipotezą zjawisko grupowania wariancji powstaje jako efekt grupowania kolejnych wartości obrotu giełdowego dla danego instrumentu finansowego[5]. Badania empiryczne wskazały bowiem na wysoką korelację pomiędzy zmiennością indeksu a wartością obrotu na giełdzie. Pokazano również, że duże zmiany kursów akcji poszczególnych spółek są powiązane z wysoką wartością obrotów tymi papierami wartościowymi.

Drugą charakterystyczną cechą szeregów finansowych jest ich leptokurtyczność. Przeprowadzone analizy wskazują na występowanie grubych ogonów, zaś typowe oszacowania kurtozy mieszczą się w granicach od 4 do 50, co świadczy o dużym odstępstwie od rozkładu normalnego. Na leptokurtyczność wskazuje również indeks ogona rozkładu, który przyjmuje wartości między 2 a 5[6]. Oznacza to, że prawdopodobieństwo wystąpienia nietypowych zmian kursów jest większe niż w przypadku rozkładu normalnego. Warto jednak zauważyć, że zwiększając jednostkę skali czasowej, względem której obliczane są zwroty, rozkład zwrotów upodabniają się do normalnego.

Rozkłady zwrotów instrumentów finansowych są również prawostronnie skośne, czyli wzrosty kursów występują częściej niż spadki. W szeregach notowań indeksów giełdowych i akcji, rzadziej w szeregach kursów walutowych, zauważyć

[3] Brzeszczyński J., Kelm R. (2002) Ekonometryczne modele rynków finansowych, WIG-Press, Warszawa, s. 41.

[4] Bollerslev T., Chou R. Y., Kroner K. F. (1992) ARCH Modeling in Finance: A Selective Review of the Theory and Empirical Evidence. Journal of Econometrics, 52, 5-59.

[5] Gallant A., Rossi P., Tauchen G. (1992) Stock Prices and Volume. The Review of Financial Studies, 5(2), 199-242.

[6] Doman M., Doman R. (2009) Modelowanie zmienności…, op.cit., s. 24.

można asymetrię spadków i wzrostów. Oznacza to, że znacznie częściej pojawiają się ruchy w dół co do wartości bezwzględnej większe niż znaczne wzrosty.

Kolejną cechą finansowych szeregów finansowych jest występowanie efektu dźwigni. Zmiany kursów są ujemnie skorelowane ze zmiennością ich wariancji. Wraz ze spadkiem wartości danych kursów ich zmiany względne są bowiem wyższe, o ile zmiany bezwzględne są w przybliżeniu stałe.

Finansowe szeregi czasowe cechują się również występowaniem autokorelacji stóp zwrotu. Stopy zwrotu w danym okresie zależą bowiem od ich realizacji w okresach poprzednich. Autokorelacja może dotyczyć większego rzędu opóźnień niż jeden. Efekt ten określa się jako AR(p) gdzie p – to rząd opóźnień. Badanie empiryczne wykazują, że autokorelacja może dotyczyć także wariancji. Także i w tym przypadku oznacza to, że zmienność w jednym podokresie zależy od zmienności zrealizowanej w okresach poprzednich. Własność tą oznacza się ją jako efekt ARCH(q) gdzie q także i w tym przypadku – określa rząd opóźnień. Na rynkach finansowych często występuje zależność między wariancją tempa wzrostu kursów i ich autokorelacją. Autokorelacja występuje zazwyczaj w przypadku małej zmienności kursowej, zaś duża wariancja powoduje brak autokorelacji.

SPECYFIKACJE MODELI GARCH

Ogromne znaczenie w zarządzaniu ryzykiem odgrywa możliwości skutecznego prognozowania przyszłej zmienności poszczególnych instrumentów finansowych lub złożonych z nich portfeli. Przez zmienność ceny instrumentu finansowego rozumie się zazwyczaj warunkową wariancje zwrotu. Najczęściej stosowanym narzędziem prognozowania zmienności są uogólnione modele warunkowej autoregresyjnej heteroskedastyczności – GARCH.

Powszechność użycia modeli GARCH wynika z faktu, że uwzględniają one większość empirycznych własności finansowych szeregów czasowych. Na uwagę zasługuje również łatwość estymacji ich parametrów oraz łatwość rozszerzania modeli[7]. Ze względu na bardzo duża liczbę uogólnień, najlepszym sposobem wyboru odpowiedniej specyfikacji jest analizowanie wybranych modeli GARCH.

Uogólniony model autoregresyjny warunkowej heteroskedatycznosci minimalizuje liczbę parametrów przy dużej liczbie opóźnień oraz dobrze opisuje rozkłady o dużych ogonach. Został on zaproponowany przez Bollersleva [1986] jako uogólnienie procesu ARCH wprowadzonego przez Engle'a w 1985r.
Model GARCH(p, q) można zdefiniować jako proces stochastyczny $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ spełniający następujące warunki[8]:

---

[7] Fiszeder P. (2009) Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, s. 21.

[8] Pipień M. (2006) Wnioskowanie bayesowskie w ekonometrii finansowej. Zeszyty Naukowe, Akademia Ekonomiczna w Krakowie. Seria Specjalna. Monografie. 176, s. 52.

1) $\varepsilon_t = z_t\sqrt{h_t}$,
2) $h_t = a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j}$, $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$, dla i = 1,…,q oraz $\beta_j \geq 0$ dla j = 1,…,p,
3) $\{z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa, spełniającym warunki: $E(z_t) = 0$, $E(z_t^2) = 1$, $E(z_t^3) = 0$, $E(z_t^4) = \lambda > 0$.

Równanie wariancji warunkowej h_t uzależnia zmienność zarówno od jej wartości z przeszłości, jak również od wartości zaobserwowanych kwadratów stóp zwrotu. Parametry a_t decydują więc o wpływie, jaki na zmienność mają nowe napływające informacje zawarte w kwadratach ε_{t-i}^2. Parametry β_j charakteryzują zaś tę część dynamiki, która opisuje oczekiwania rynku odnośnie tego, że w przyszłości proces zmienności będzie przebiegał podobnie jak dotychczas.

Typowym i najczęściej spotykanym w badaniach empirycznych procesem jest model GARCH(p, q) dla p=1 i q=1. Przyjęcie bowiem takich rzędów opóźnień umożliwia w sposób oszczędny uzależnienie h_t od całej historii ε_t. Oryginalny, zgodny z definicją Bollersleva[9], proces GARCH(1, 1) ma warunkowy rozkład normalny o zerowej wartości oczekiwanej i wariancji h_t:

$\varepsilon_t|\psi_{t-1}(\varepsilon) \sim N(0, h_t)$, jeśli $z_t \sim iiN(0,1)$,

$h_t = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$, $a_0 \geq 0$, $a_1 > 0$ oraz $\beta_1 > 0$, $\beta_1 < 1$. (3)

Rozkład bezwarunkowy ε_t ma zerową wartość oczekiwaną oraz wariancję równą $a_0(1 - a_1 - \beta_1)^{-1}$ dla $a_1 + \beta_1 < 1$. Rozkład ten ma ogony grubsze niż rozkład warunkowy. Dodatkowo jeśli przyjmiemy, że z_t ma rozkład normalny, to rozkład bezwarunkowy modeli GARCH (1, 1) ma ogony cięższe niż rozkład normalny. Bollerslev dowiódł również, że dla $a_1 + \beta_1 < 1$ GARCH(1, 1) jest stacjonarny w sensie kowariancji. D. Nelson[10] wyprowadził natomiast warunek konieczny i wystarczający ścisłej stacjonarności modeli typu GARCH. Zgodnie z tym, jeśli parametry modelu GARCH (1, 1) spełniają warunek: $E(ln(a_1 z_t^2 + \beta_1)) < 0$, to jest on ściśle stacjonarny.

Bardzo często w badaniach empirycznych suma ocen parametrów a_1 *i* β_1 w modelu GARCH(1, 1) jest bliska jedności. Tę własność można potraktować jako typową dla szeregów finansowych. Przypadek, gdy $a_1 + \beta_1 = 1$, jest określany jako zintegrowany model GARCH(1, 1) – *Integrated GARCH(1, 1)*; IGARCH. Model IGARCH nie jest procesem stacjonarnym kowariancyjnie, jednak jest on

[9] Bollerslev T. (1986) Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. Journal of Econometrics, 31(3), s. 311.

[10] Nelson D. (1990) Stationarity and Persistence in GARCH(1, 1) Model. Econometric Theory, 6, s.324.

nadal procesem ściśle stacjonarnym. W przypadku modeli GARCH stacjonarność kowariancyjna jest więc własnością znacznie mocniejszą niż ścisła stacjonarność[11].

Zgodnie z definicją model IGARCH(p, q) to taki proces stochastyczny, który dla każdego $t \in \mathbb{Z}$ spełnia następujące warunki[12]:

$$\varepsilon_t = z_t\sqrt{h_t}, \tag{4}$$

$$h_t = a_0 + \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=2}^{q} a_i(\varepsilon_{t-i}^2 - \varepsilon_{t-1}^2) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j(h_{t-j} - \varepsilon_{t-1}^2) \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{q} a_i + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j = 1 \tag{6}$$

gdzie: $\{\varepsilon_t\} \sim iiD(0,1)$, $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$, dla i = 1,…,q, $\gamma_j \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ dla j = 1,…,p, $a_q \neq 0, \gamma_p \neq 0$.

Najczęściej stosowanym modelem do opisu długiej pamięci w zmienności jest model FIGARCH. Jest to proces niestacjonarny kowariancyjnie (nie istnieje wariancja bezwarunkowa ε_t) oraz procesem ściśle stacjonarnym. Model FIGARCH(p, d, q) został zdefiniowany przez Baillie'a, Bolersleva i Mikkelsena następująco[13]:

$$\varphi(L)(1-L)^d\varepsilon_t^2 = a_0[1 - \beta(L)]\nu_t \tag{7}$$

gdzie: $\nu_t = \varepsilon_t^2 - h_t$, $\varphi(L) = 1 - \sum_{j=1}^{q}\varphi_j L^j$, $\beta(L) = \sum_{j=1}^{p}\beta_j L^j$, $L^s\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$, dla 0 < d < 1, a wszystkie pierwiastki równania $\varphi(L) = 0$ leżą poza kołem.

Jeżeli d = 1, to model FIGARCH jest modelem IGARCH, zaś dla d = 0 jest procesem GARCH. Należy jednak podkreślić, że proces FIGARCH(p, 0, q) nie zawsze redukuje się do procesu GARCH(p, q). Wpływ obecnej zmienności na jej prognozowane wartości w przypadku kowariancyjnie stacjonarnego modelu GARCH maleje do zera w tempie wykładniczym. Dla modelu IGARCH bieżąca zmienność ma nieskończony wpływ na prognozę wariancji warunkowej. W przypadku modeli FIGARCH wpływ ten maleje do zera zgodnie z funkcją hiperboliczną. Warto również zauważyć, że funkcja autokorelacyjna dla ε_t^2 w przypadku procesów GARCH oraz IGARCH wygasa w tempie wykładniczym, zaś dla FIGARCH – w tempie hiperbolicznym[14]. Proces IGARCH charakteryzuje

[11] Osiewalski J., Pipień M. (1999) Bayesowskie wnioskowanie o stacjonarności procesów GARCH(1, 1). Dynamiczne Modele Ekonometryczne, Materiały na VI Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, UMK, Toruń.

[12] Pajor A. (2010) Wielowymiarowe procesy wariancji stochastycznej w ekonometrii finansowej. Ujęcie bayesowskie. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, s. 40.

[13] Baillie R. T., Bollerslev T., Mikkelsen H. O. (1996) Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. Journal of Econometrics, 74, 3-30.

[14] Ding Z., Granger C. W. J. (1996) Modeling Volatility Persistence of Speculative Returns: A New Approach. Journal of Econometrics, 73, 185-215.

się krótką pamięcią, natomiast FIGARCH dla 0 < d < 1 ma długą pamięć w zmienności.

Ogólne modele GARCH zakładają, że zarówno pozytywne jak i negatywne zmiany cen mają ten sam wpływ na przyszłą zmienność. Tymczasem zauważyć można, że ich wpływają one asymetrycznie na poziom przyszłej zmienności. Asymetrię tę uwzględnia model APARCH, którymi szczególnymi przypadkami są m.in. modele: TS-GARCH, NARCH, Log-ARCH oraz GJR-GARCH.

Model APARCH(p, q) autorstwa Dinga, Grangera i Engle'a został określony w następujący sposób[15]:

$$z_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t} \tag{8}$$

$$h_t^{\delta/2} = a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i(|z_{t-i}| - \gamma_i z_{t-i})^{\delta} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j}^{\delta/2} \tag{9}$$

gdzie: $\delta > 0, \gamma \in (-1; 1)$, i = 1, 2, …, q.

Cechą charakterystyczną tego modelu, oprócz obecności współczynników asymetrii, jest możliwość dopasowania wykładnika δ, gwarantującego istnienie bezwarunkowego momentu rzędu δ dla procesu σ_t.

Szczególnym przypadkiem modelu APARCH jest zaproponowany przez Glostena, Jagannanthana i Runkle'a model GJR-GARCH(p, q). Wariancja warunkowa w tym modelu określona jest równaniem:

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \omega_i I_{t-i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j} \tag{10}$$

gdzie $I(\cdot)$ jest funkcją wskaźnikową.

Warto zauważyć, że model GJR-GARCH(1, 1) jest kowariancyjnie stacjonarny, gdy spełnia warunek:

$$a_1 + \beta_1 + \frac{1}{2}\gamma_1 < 1 \tag{11}$$

Modelem, który pozwala opisać zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a ryzykiem wyrażonym za pomocą warunkowej wariancji, bądź warunkowego odchylenia standardowego jest model GARCH-M. Proces ten został zaproponowany przez Engle'a, Liliena i Robinsa[16] jako odpowiedź na postulowaną w licznych teoriach finansowych bezpośrednią zależność pomiędzy wielkością zwrotu a ryzykiem. Model GARCH-M(p, q) ma następującą postać:

$$r_t = x_t' \xi + \delta g(h_t) + \varepsilon_t \tag{12}$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \tag{13}$$

---

[15] Ding Z., Granger C. W. J., Engle R. F. (1993) A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. Journal of Empirical Finance, 1, s. 99.

[16] Engle R. F., Lilien D. M., Robins R. P. (1987) Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: the ARCH-M Model. Econometrica, 55, s. 394.

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j} \tag{14}$$

gdzie: x_t– wektor zmiennych objaśniających, zaś δ zgodnie z jego interpretacją ekonomiczną nosi nazwę parametru premii za ryzyko.

Jak widać powyższy model uwzględnia w równaniu średniej warunkowej zmiennej reprezentującej zwrot, funkcję, której argumentem jest zmienność.

Tabela 1. Specyfikacje modeli GARCH

Model	Postać modelu	Objaśnienia zmiennych oraz warunki zapewniające dodatniość h_t
GARCH(p, q)	$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j}$	$a_0 > 0$, $a_i \geq 0$, dla i = 1,…,q oraz $\beta_j \geq 0$ dla j = 1,…,p.
GJR-GARCH(p, q)	$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \omega_i I_{t-i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j}$	$I_{t-i} = 1$ gdy $\varepsilon_{t-i} \leq 0$ i $I_{t-i} = 0$ gdy $\varepsilon_{t-i} > 0$, $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$, $a_i + \omega_i \geq 0$, dla i = 1,…,q, $\beta_j \geq 0$ dla j = 1,…,p.
GARCH-M(p, q)	$r_t = x_t' \xi + \delta g(h_t) + \varepsilon_t$ $h_t = a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j}$	$g(h_t) = h_t$ lub $g(h_t) = \sqrt{h_t}$ lub $g(h_t) = \ln(h_t)$, x_t– wektor zmiennych objaśniających oraz $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$, dla i = 1,…,q, $\beta_j \geq 0$ dla j = 1,…,p.
IGARCH(p, q)	$h_t = a_0 + \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=2}^{q} a_i(\varepsilon_{t-i}^2 - \varepsilon_{t-1}^2) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j (h_{t-j} - \varepsilon_{t-1}^2$	$a_0 > 0$, $a_i \geq 0$, dla i = 2,…,q, $\beta_j \geq 0$ dla j = 1,…,p oraz $\sum_{i=2}^{q} a_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \leq 1$.
FIGARCH(p, d, q)	$\varphi(L)(1-L)^d \varepsilon_t^2 = a_0[1 - \beta(L)]\nu_t$	$\nu_t = \varepsilon_t^2 - h_t$, $\varphi(L) = 1 - \sum_{j=1}^{q} \varphi_j L^j$, $\beta(L) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j L^j$, $L^s \varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$, $0 < d < 1$, wszystkie pierwiastki równania $\varphi(L) = 0$ leżą poza kołem jednostkowym.

Model	Postać modelu	Objaśnienia zmiennych oraz warunki zapewniające dodatniość h_t
APARCH(p, q)	$h_t^{\delta/2} = a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i(\lvert z_{t-i}\rvert - \gamma_i z_{t-i})^{\delta} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j}^{\delta/2}$	$\delta > 0, a_0 > 0, a_i \geq 0$, dla i = 1,…,q, $-1 < \gamma_i < 1, \beta_j \geq 0$ dla j = 1,…,p.

Źródło: opracowanie własne na podstawie Fiszeder P. [2009] Modele klasy GARCH...,op.cit, Toruń, s. 25

TESTOWANIE JAKOŚCI DOPASOWANIA MODELU ORAZ OCENA JAKOŚCI PROGNOZ

Miary syntetyczne pozwalają zmierzyć precyzje i obciążenie prognoz. Precyzję mierzymy najczęściej za pomocą miar absolutnych: średniego błędu bezwzględnego (*mean absolute error – MAE*) i średniego bezwzględnego błędu procentowego (*mean absolute percentage error – MAPE*):

$$MAE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \lvert y_{T+i} - \hat{y}_{T+i}\rvert \tag{15}$$

$$MAPE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\lvert y_{T+i} - \hat{y}_{T+i}\rvert}{y_{T+i}} \tag{16}$$

oraz kwadratowych, m.in. pierwiastka błędu średniokwadratowego (*root mean square error – RMSE*):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (y_{T+i} - \hat{y}_{T+i})^2} \tag{17}$$

Obciążenie, czyli średnie systematyczne odchylanie się prognoz od wartości empirycznych jest mierzone natomiast za pomocą błędu średniego (*mean error – ME*), wyrażonego wzorem:

$$ME = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (y_{T+i} - \hat{y}_{T+i}) \tag{18}$$

Porównanie odpowiednich miar absolutnych i kwadratowych informuje o nietypowo dużych błędach prognoz. Porównując miry precyzji i obciążenia możemy wywnioskować, czy prognozy nie są w sposób systematyczny obciążone[17].

Najpopularniejszą miarą precyzji modelu jest błąd średniokwadratowy (*mean square terror – MSE*):

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_{T+i} - \hat{y}_{T+i})^2 \tag{19}$$

Z kwadratowym błędem prognozy związany jest również współczynnik Theila, wyrażony wzorem:

$$TIC = \frac{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_{T+i} - \hat{y}_{T+i})^2}}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_{T+i}^2} + \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{y}_{T+i}^2}} \tag{20}$$

Jego pierwiastek informuje o całkowitym względnym błędzie prognozy w okresie testowania. Współczynnik Theila przyjmuje wartość zero dla prognoz idealnie trafnych. Im jego wartość jest mniejsza, tym mniejsze są różnice między prognozami a wartościami rzeczywistymi zmiennej prognozowanej. Współczynnik ten można rozdzielić na sumę trzech składników, dzięki czemu można ocenić źródła błędów predykcji:

$$TIC^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 \tag{21}$$

Poszczególne elementy równania określane są następująco:

1) $I_1^2 = \frac{N(\bar{y}_{T+i} - \hat{\bar{y}}_{T+i})^2}{\sum_{i=1}^{N} y_{T+i}^2}$, gdzie $\bar{y}_{T+i} = I_1^2$ odzwierciedla obciążenie predykcji, czyli w jakim stopniu nie udało się odgadnąć średniej wartości zmiennej prognozowanej.
2) I_2^2 określa, w jakim stopniu zmienność prognozy i zmiennej prognozowanej są do siebie zbliżone. Nieodgadnięcie wahań zmiennej prognozowanej na skutek wygładzania szeregów związane jest na ogół z mniejszą zmiennością prognoz niż wartości empirycznych. Składnik ten ma związek z precyzją prognozowania.
3) I_3^2 określa, czy wystąpiła zgodność kierunków zmian prognoz z rzeczywistym kierunkiem zmian zmiennej prognozowanej. I_3^2 = 0, gdy współczynnik korelacji między nimi wynosi jeden. Nieodgadnięcie kierunku tendencji w szeregu świadczy o słabej przydatności modelu do odwzorowania tych tendencji.

[17] Doman M., Doman R. (2009) Modelowanie zmienności…, op.cit., s. 94.

PROGNOZOWANIE ZMIENNOŚCI PRZY UŻYCIU PAKIETU SAS

Do analizy empirycznej wykorzystano logarytmiczne stopy zwrotu indeksu WIG w okresie od 8 listopada 2010 do 6 listopada 2020. Dane z okresu od 8 listopada 2010 do 6 listopada 2019 wykorzystano do estymacji modeli. Na okres od 6 listopada 2019 do 6 listopada 2020 dokonano prognozy. Do zbadania zmienności stóp zwrotu wykorzystano różne modele z rodziny GARCH. Na podstawie analizy statystyk opisowych ustalono, że najlepiej dopasowanymi modelami GARCH będą modele z rozkładem błędu t-Studenta. Wyniki testu Engle'a przesądziły o wyborze modeli z opóźnieniem 1. Niezależnie od jakości dopasowania oraz poziomu istotności parametrów wyznaczono prognozy.

W wyniku estymacji modeli GARCH otrzymano następujące wartości kryteriów informacyjnych:

Tabela 2. Kryteria informacyjne

Obs	Model	SBC	AIC
1	ar_1_garch_1_1	14922,4866	14896,8615
2	st_garch_1_1	14947,8663	14928,6475
3	qgarch_1_1	14957,3193	14931,6943
4	tgarch_1_1	14966,2723	14938,6473
5	pgarch_1_1	14972,0388	14940,0075
6	garch_1_1	14976,0503	14956,8315
7	garchm_1_1	14983,2484	14957,6234
8	egarch_1_1	14988,1548	14962,5297
9	igarch_1_1	16512,2964	16505,8901

Źródło: opracowanie własne na postawie estymacji w SAS

Ocena jakości dopasowania na podstawie kryteriów informacyjnych pozwala uszeregować modele w rankingu. Najlepszy okazał się model ar(1)-garch(1, 1), wartość kryteriów informacyjnych jest bowiem najniższa. Kolejny jest model st-garch(1, 1). Najgorzej dopasowany okazał się model igarch (1,1).

Kolejny etap polega na sprawdzeniu, czy z najlepiej dopasowanych modeli otrzymamy najlepszej jakości prognozy. Do oceny jakości prognoz zastosowano porównanie na podstawie wymienionych wcześniej błędów prognozy (tabela 3).

Tabela 3. Ocena jakości prognoz

Obs	Model	MSE	MAE	MAPE
1	ar_1_garch_1_1	0,0003054	0,01063896	57,69
2	st_garch_1_1	0,0002648	0,02066475	60,26
3	qgarch_1_1	0,0003123	0,01631352	58,02
4	tgarch_1_1	0,0003326	0,02252550	52,49
5	pgarch_1_1	0,0002622	0,01075550	48,22
6	garch_1_1	0,0003054	0,02407896	62,41

Obs	Model	MSE	MAE	MAPE
7	garchm_1_1	0,0002826	0,01785352	61,47
8	egarch_1_1	0,0003748	0,02650297	65,59
9	igarch_1_1	0,0003194	0,01208901	58,62

Źródło: opracowanie własne na podstawie wyliczeń w SAS

Jak widać nie ma bezpośredniego związku pomiędzy jakością dopasowania modelu a jakością uzyskanych z niego prognoz. Różnice zarówno w dopasowaniu poszczególnych modeli, jak również jakością uzyskanych prognoz są niewielkie.

BIBLIOGRAFIA

Baillie R. T., Bollerslev T., Mikkelsen H. O. (1996) Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. Journal of Econometrics, 74, 3-30.

Bollerslev T. (1986) Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. Journal of Econometrics, 31(3), 307-327.

Bollerslev T., Chou R. Y., Kroner K. F. (1992) ARCH Modeling in Finance: A Selective Review of the Theory and Empirical Evidence. Journal of Econometrics, 52, 5-59.

Brzeszczyński J., Kelm R. (2002) Ekonometryczne modele rynków finansowych, WIG-Press, Warszawa.

Ding Z., Granger C. W. J., Engle R. (1993) A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. Journal of Empirical Finance, 1, 83-106.

Ding Z., Granger C. W. J. (1996) Modeling Volatility Persistence of Speculative Returns: A New Approach. Journal of Econometrics, 73, 185-215.

Doman M., Doman R. (2009) Modelowanie zmienności i ryzyka, Oficyna Wolters Kluwer, Kraków.

Engle R. F., Lilien D. M., Robins R. P. (1987) Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: the ARCH-M Model. Econometrica, 55(2), 391-407.

Fiszeder P. (2009) Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.

Gallant A., Rossi P., Tauchen G. (1992) Stock Prices and Volume. The Review of Financial Studies, 5(2), 199-242.

Nelson D. (1990) Stationarity and Persistence in GARCH(1, 1) Model. Econometric Theory, 6(3), 318-334.

Osiewalski J., Pipień M. (1999) Bayesowskie wnioskowanie o stacjonarności procesów GARCH(1, 1). Dynamiczne Modele Ekonometryczne, Materiały na VI Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, UMK, Toruń.

Pajor A. (2010) Wielowymiarowe procesy wariancji stochastycznej w ekonometrii finansowej. Ujęcie bayesowskie. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie.

Pipień M. (2006) Wnioskowanie bayesowskie w ekonometrii finansowej. Zeszyty Naukowe, Akademia Ekonomiczna w Krakowie. Seria Specjalna. Monografie, 176.

THE ADAPTATION OF GARCH MODELS AND THE QUALITY OF OBTAINED FORECASTS

Abstract: Analysis of the adaptation of GARCH models presented in the paper consists of three parts. Firstly, the theoretical considerations in this regard was made, referring to the recommendations identified in the literature. Secondly, practical aspects of the proper selection of GARCH model for the time series based on the values of information criteria was presented. Thirdly, the relation between the quality of adaptation and the quality of obtained forecasts was indicated, using the tools of quantitative analysis. The aim of this paper is to verify if the improvement of the goodness of GARCH models results in better volatility forecasts.

Keywords: forecasting, GARCH models, time series, adaptation

JEL classification: C32, C53, C58, G10, G17