METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XXI/3, 2020, s. 157 – 167
Received: 04.12.2020
Accepted: 23.12.2020

WYKORZYSTANIE WZORCÓW POŚREDNICH DO BUDOWY MIERNIKÓW SYNTETYCZNYCH

Zbigniew Binderman https://orcid.org/0000-0003-2917-4381
Bolesław Borkowski https://orcid.org/0000-0001-6073-6173
Instytut Ekonomii i Finansów
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
Wiesław Szczesny https://orcid.org/0000-0002-8083-4624
Instytut Informatyki Technicznej
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
e-mail: zbigniew_binderman@sggw.pl; boleslaw_borkowski@sggw.edu.pl; wiesław_szczesny@sggw.edu.pl

Streszczenie: W pracy zaproponowano użycie oprócz wzorców negatywnego i pozytywnego dodatkowego wzorca pośredniego do budowy miernika syntetycznego, przeznaczonego do porządkowania i podziału obiektów na grupy. Na przykładzie rzeczywistego podziału funduszu premiowego pomiędzy jednostki biznesowe w dużej korporacji, zaprezentowano użyteczność takiego podejścia. Przeprowadzone badania wykazały dużą przydatność omówionej metody do porządkowania i grupowania obiektów.

Słowa kluczowe: trójwzorcowe mierniki syntetyczne, mediana Webera, metoda TOPSIS, klasyfikacja, funkcja użyteczności

JEL classification: C1, G2

WSTĘP

Podstawowym celem Wielowymiarowej Analizy Porównawczej (WAP) jest dokonanie porządkowania, a następnie grupowania obiektów (jednostek), które są opisane wektorami z wielowymiarowej przestrzeni cech. Do porządkowania i grupowania stosowanych jest wiele metod [zob. Binderman 2006; Binderman i inni 2008, 2010; Borkowski i inni 2020; Cieślak 1976; Borys 1978; Hellwig 1968; Kukuła 2000; Malina 2004; Młodak 2006; Panek 2010; Gatnar, Walesiak 2009; Zeliaś 2000], które zazwyczaj dają różne wyniki. Metody te są często stosowane

https://doi.org/10.22630/MIBE.2020.21.3.15

w praktyce do oceny pracy (także do jej premiowania) zespołów ludzkich w złożonych strukturalnie korporacjach. Jednakże wybór wskaźnika syntetycznego będącego podstawą oceny, a szczególnie podziału zespołów na tzw. grupy premiowe budzi niejednokrotnie wiele dyskusji. Jest to spowodowane faktem, że niejednokrotnie niewielkie zmiany w sposobie budowy wskaźnika wpływają na znaczące zmiany w klasyfikacji poszczególnych zespołów do grup premiowych. Dlatego ważnym zagadnieniem jest ograniczenie tego typu wrażliwości. Z tego powodu celem tej pracy było wskazanie możliwości ograniczenia wrażliwości wyników grupowania opartych o wartości różnych mierników/wskaźników wykorzystywanych do oceny i klasyfikacji badanych obiektów. Jednym ze sposobów osiągniecia tego celu jest - według naszych badań - oparcie definicji wskaźników o więcej niż 2 wzorce, czyli zastosowanie tzw. wzorców pośrednich.

METODY I TECHNIKI BUDOWY WSKAŹNIKA SYNTETYCZNEGO

Ogólnie w naukach przyrodniczych (fizyce matematycznej, matematyce) uważa się, że zagadnienie (brzegowe, początkowe) jest *poprawnie postawione*, jeżeli:

- przy określonych warunkach istnieje rozwiązanie tego zagadnienia,
- rozwiązanie to jest jednoznaczne,
- rozwiązanie to zależy w sposób ciągły od zadanych warunków (jest *stabilne*).

W naukach ekonomicznych zagadnienie poprawnie postawione jest różnie opisywane. Na przykład, według określeń podanych w serii prac Jacksona [1969] zagadnienie jest *poprawnie postawione*, jeżeli:

- w wyniku zastosowanego algorytmu otrzymujemy jeden wynik,
- otrzymana klasyfikacja (uporządkowanie) jest stabilna. (Czyli otrzymana klasyfikacja nie może być „rażąco odmienna” od klasyfikacji otrzymanych przy małych zmianach w danych wejściowych).
- użyty algorytm musi być niezmienniczy względem permutacji zarówno zmiennych i nazw obiektów, które mają być klasyfikowane. Oznacza to, że algorytm musi być niezależny od etykietowania zmiennych i obiektów.
- użyty algorytm musi być niezależny od skali. Oznacza to, że algorytm musi być niezmienniczy przez mnożenie macierzy podobieństwa przez stałą dodatnią, różną od zera.

Warunki te są wyraźnie nie wystarczające, ponieważ pomijają zupełnie problem nierozwiązanych kwestii adekwatności konfiguracji poszczególnych klas w stosunku do szczegółowych związków między obiektami, czy do szczególnych potrzeb. Do powyższego problemu odnosi się praca Binderman [2015]. Z kolei Breiman [1994] w swojej pracy stwierdza, że pojedynczy klasyfikator (miernik syntetyczny) może być daleki od optymalnego, natomiast kombinacje wielu dają klasyfikator bliski optymalnemu i stabilny. Niestety w przypadku" słabych" klasyfikatorów w wyniku kombinacji można otrzymać klasyfikator jeszcze gorszy.

Ogólnie z literatury przedmiotu wynika, że nie ma jednego uniwersalnego klasyfikatora i zazwyczaj zalecane jest stosowanie mierników będących funkcją różnych klasyfikatorów. Oczywiście każdy badacz dąży do ideału, czyli wyników, które nie zależałyby od doboru cech, sposobu normalizacji zmiennych, wyboru miary odległości (niepodobieństwa) i techniki budowy miernika syntetycznego.

W polskojęzycznej literaturze wielu autorów nie zawsze uwzględnia powyższe zalecenia. Skłoniło nas to podjęcia próby poprawy technik konstrukcji nowych mierników, jak również do poprawy już używanych mierników. W pracy ograniczyliśmy się do mierników, które mają charakter funkcji użyteczności w warunkach niedosytu [Binderman, Borkowski, Szczesny 2008]. W tym celu wprowadziliśmy pewne oznaczenia formalne.

Niech $\mathbf{X}=\mathcal{R}^n$, $\mathcal{R}=(-\infty,+\infty)$, $n\in\mathcal{N}$ oznacza n-wymiarową przestrzeń wektorową. Rozważmy problem polegający na klasyfikacji $m\in\mathcal{N}$ obiektów $\mathbf{O}_1$, $\mathbf{O}_2,\ldots,\mathbf{O}_m$ badanego zjawiska za pomocą $n\in\mathcal{N}$ zmiennych (cech). Niech wektor $\mathbf{x}_i=(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{in})\in X$, $i=1,2,\ldots,m$, opisuje i-ty obiekt. Jeżeli $x_{ik}>x_{jk}$ $(x_{ik}\geq x_{jk})$ dla $k=1,2,\ldots,n$, to pisać będziemy

$$\mathbf{x}_i>\mathbf{x}_j,\ (\mathbf{x}_i\geq\mathbf{x}_j),$$

gdzie $i, j \in[1,m]$.

Nietrudno zauważyć, że jeżeli $\mathbf{x}_i>\mathbf{x}_j$ i $\mathbf{x}_i\neq\mathbf{x}_j$ to w niektórych przypadkach naturalnym jest nazywać obiekt $\mathbf{x}_i$ lepszym (wyżej ocenianym) od obiektu $\mathbf{x}_j$. Oznacza to, że żadna ze składowych wektora $\mathbf{x}_i$ nie jest mniejsza od odpowiednich składowych wektora $\mathbf{x}_j$, a przynajmniej jedna z nich ma wartość większą, tj. istnieje takie $k\in[1,n]$, że $x_{ik}>x_{jk}$.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$x_{0,k}=\min_{1\leq i\leq m} x_{i,k}, \qquad x_{0,k}=\max_{1\leq i\leq m} x_{i,k},\ \mathrm{k}=1,2,\ldots\mathrm{n}$$

$$x_{med,k}=mediana(x_{1,k},x_{2,k},\ldots,x_{m,k}),\quad k=1,2,\ldots,n,$$

$$\mathbf{x}_0:=(x_{0,1},x_{0,2},\ldots,x_{0,n}),\quad \mathbf{x}_{m+1}:=(x_{m+1,1},x_{m+1,2},\ldots,x_{m+1,n}),$$

$$\mathbf{x}_{med}:=(x_{med,1},x_{med,2},\ldots,x_{med,n}).$$

Niech obiekt $\mathbf{O}_0$ będzie opisany przez wektor $\mathbf{x}_0$, obiekt $\mathbf{O}_{m+1}$ będzie opisany przez wektor $\mathbf{x}_{m+1}$, zaś $\mathbf{O}_{med}$ jest obiektem opisanym przez wektor „medianowy" $\mathbf{x}_{med}$.
Oczywistym jest, że obiekty: $\mathbf{O}_0$, $\mathbf{O}_{m+1}$ (być może fikcyjne) są odpowiednio nie lepsze, nie gorsze od pozostałych obiektów $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2, \ldots, \mathbf{O}_m$, tj.

$$\mathbf{x}_{m+1} \geq \mathbf{x}_i \text{ oraz } \mathbf{x}_i \geq \mathbf{x}_0 \text{ dla każdego } i: m \geq i \geq 1.$$

W związku z powyższym oznaczmy przez

$$<\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{m+1}>:=\{\mathbf{x} \in \Re_+^n : \mathbf{x}_0 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{m+1}\}.$$

Oczywiście, $\mathbf{x}_{med} \in <\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{m+1}>$

W przypadku gdy obiekty $\mathbf{O}_0$ i $\mathbf{O}_{m+1}$ są różne od rozważanych obiektów $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2, \ldots, \mathbf{O}_m$, to obiekty te spełniają rolę **obiektu najlepszego**, **obiektu najgorszego**, odpowiednio i będą traktowane, jako **wzorce**. Podobnie jako wzorzec będziemy traktowali **obiekt medianowy** $\mathbf{O}_{med}$. Oczywiście w zależności od praktycznych zastosowań zamiast obiektu $\mathbf{O}_{med}$ można wziąć inny obiekt modelowy (np. rzeczywisty) na podstawie ustaleń eksperckich. Można także wybrać więcej takich obiektów wzorcowych. W pracy prezentujemy efekt przyjęcia jednego obiektu, ale czytelnik w łatwy sposób może wykorzystać tę ideę na większą liczbę obiektów, określając jakie wartości powinien przyjąć wskaźnik syntetyczny w przypadku tych dodatkowo wybranych obiektów.

Funkcję użyteczności u, która spełnia warunek:

$$u(\mathbf{x}_0) = 0 \quad \text{i} \quad u(\mathbf{x}_{m+1}) = 1,$$

nazywać będziemy *znormalizowaną* funkcją użyteczności [Panek 2000].

Zauważmy, że jeżeli dana funkcja użyteczności u indukuje relacje preferencji w zbiorze *m+3* obiektów

$$\mathcal{W} := \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1}, \mathbf{x}_{med}\},$$

to funkcja złożona $g(u(\mathbf{x}))$, gdzie $g: \Re \to \Re$ jest funkcją rosnącą, jak również funkcją użyteczności, generującą tą samą relację preferencji w zbiorze obiektów $\mathcal{W}$ co funkcja $u(\mathbf{x})$.

Wykorzystując powyższą własność celowe jest unormowanie funkcji użyteczności polegające na wybraniu takiej funkcji, g aby jej wartość dla obiektu najgorszego $\mathbf{x}_0$ wynosiła *0*, wartość zaś dla obiektu najlepszego $\mathbf{x}_{m+1}$ wynosiła *1*, tj., aby:

$$1.\ g(u(\mathbf{x}_0)) = 0,$$

$$2.\ g(u(\mathbf{x}_{m+1})) = 1.$$

Korzystając ze znanych postaci funkcji $u(\mathbf{x})$ w naszej pracy (zdając sobie sprawę, że takich funkcji jest nieskończenie wiele) podajemy przykład takiej funkcji jednej zmiennej $g(u)$, która spełniałaby jeszcze jeden warunek:

3. $g(\mathcal{U}(\mathbf{x}_{med})) = 1/2$.

Najprostszą funkcją spełniającą te trzy warunki jest funkcja kawałkami liniowa

$$g(u)=\begin{cases} \frac{1}{2\alpha}u & dla\ \ 0 \le u < \alpha \\ \frac{(u-1)}{2(1-\alpha)}+1 & dla\ \ \alpha \le u \le 1 \end{cases} \quad (1),$$

$$\alpha := \mathcal{U}(\mathbf{x}_{med}).$$

Dużą klasę mierników syntetycznych wykorzystywanych w badaniach naukowych i praktyce gospodarczej można wyrazić jako odległość od jednego lub dwu wzorców. Jeśli symbolem d oznaczymy miarę odległości między obiektami, symbolami $\mathbf{x}_{min}$, $\mathbf{x}_{max}$ wektory opisujące, odpowiednio obiekt ***najgorszy*** i ***najlepszy***, charakteryzowane za pomocą cech będących stymulantami, to dla $\mathbf{x} \in \left\langle \mathbf{x}_{min}, \mathbf{x}_{max} \right\rangle$ znane z literatury są następujące mierniki syntetyczne:

$$\mathcal{M}_1(\mathbf{x}) = \frac{d(\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x})}{d(\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x}_{max})} ,$$

$$\mathcal{M}_2(\mathbf{x}) = 1 - \frac{d(\mathbf{x}_{max}, \mathbf{x})}{d(\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x}_{max})} ,$$

$$\mathcal{M}_3(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{M}_1(\mathbf{x})+\mathcal{M}_2(\mathbf{x})}{2} = \frac{1}{2} + \frac{d(\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x})-d(\mathbf{x}_{max}, \mathbf{x})}{2d(\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x}_{max})} ,$$

$$\mathcal{M}_4(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathcal{M}_1(\mathbf{x})\mathcal{M}_2(\mathbf{x})}$$

lub w postaci tradycyjnej czyli „w języku odległości”

$$\mathcal{M}_4(\mathbf{x}) = \frac{1}{d(\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x}_{max})}\sqrt{d(\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x})d(\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x}_{max})\text{-}d(\mathbf{x}_{max}, \mathbf{x})} ,$$

$$\mathcal{M}_5(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{M}_1(\mathbf{x})}{1+\mathcal{M}_1(\mathbf{x})-\mathcal{M}_2(\mathbf{x})} = \frac{1}{2} + \frac{d(\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x})}{d(\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x})+d(\mathbf{x}_{max}, \mathbf{x})} ,$$

Mierniki $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ wykorzystują w zasadzie tylko jeden wzorzec, natomiast $\mathcal{M}_3$, $\mathcal{M}_3$ i $\mathcal{M}_5$ wykorzystują dwa wzorce. Mierniki te można potraktować jako narzędzia rozwiązywania wielokryterialnych problemów decyzyjnych. Mierniki $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ wykorzystują jedno kryterium natomiast $\mathcal{M}_3$, $\mathcal{M}_3$ i $\mathcal{M}_5$wykorzystują dwa kryteria.

Podane wyżej mierniki są znormalizowane tj.

$$0 \le \mathcal{M}_{\mathrm{k}}(\mathbf{x}) \le \mathbf{1} \text{ dla } \mathbf{x} \in <\mathbf{x_0}, \mathbf{x}_{\boldsymbol{m+1}}> \text{ dla } \mathrm{k} = 1,2,\ldots,5.$$

Zauważmy ponadto, że:

$$\mathcal{M}_{\mathrm{k}}(\mathbf{x_0}) = 0,\ \mathcal{M}_{\mathrm{k}}(\mathbf{x}_{\boldsymbol{m+1}}) = 1 \text{ dla } \mathrm{k} = 1,2,\ldots,5.$$

W pracy Hellwiga 1968 podany miernik obiektów przy zastosowaniu standaryzacji cech, wykorzystuje obiekt najlepszy $\mathbf{x}_{\boldsymbol{max}}$ i miernik $\boldsymbol{\mathcal{M}_2}$.

Miernik $\boldsymbol{\mathcal{M}_5}$ związany jest z metodą TOPSIS (Technique for order Preference by Similarity to Ideal Solution) [Hwang, Yoon 1981]. Metodę TOPSIS można zakwalifikować do metod rankingowych służących do podejmowania decyzji wielokryterialnych. Metodami tego typu są również znane metody SAW (*Simple Additive Weighting)* [Chen, Hwang 1992; Neuman 1998; Zhang 2004] oraz AHP (*Analytical Hierarchy Process*) [Saaty 1980, 1995].

W szeregu prac m.in. Binderman [2006] podano teorie i zastosowania miernika $\boldsymbol{\mathcal{M}_1}$ $(\boldsymbol{\mathcal{M}_2})$ w ocenie regionalnego zróżnicowania rolnictwa w Polsce, pokazano, że stosowanie metod opartych tylko na jednym wzorcu, w wielu przypadkach prowadzi do otrzymania błędnych wyników, które nie spełniają warunków poprawności, według Jacksona [1969], zobacz również Kukuła, Luty [2017].

W pracy proponujemy zmodyfikowaną technikę budowy miernika syntetycznego, poprzez dodanie co najmniej jednego dodatkowego wzorca, czyli dołożenie w technologii budowy wskaźnika przekształcenia jego wartości według wzoru (1) lub bardziej rozbudowanej funkcji g jeśli chcemy włączyć więcej niż jeden punkt wzorcowy. Rekomendujemy metody oparte o co najmniej trzy wzorce: wzorzec minimalny, maksymalny i wzorzec pośredni oparty np. na medianach danych, czyli miernik o postaci:

$$\mathcal{M}_6(*) = \mathbf{g}(\mathrm{u}(*)), \quad \text{gdzie } \mathrm{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{M}_1(\mathbf{x}).$$

Nowy miernik $\boldsymbol{\mathcal{M}_6}$ ma następujące własności:

$$\mathcal{M}_6(\mathbf{x_0}) = 0,\ \ \mathcal{M}_6(\mathbf{x}_{\boldsymbol{med}}) = 1/2,\ \ \mathcal{M}_{\mathrm{k}}(\mathbf{x}_{\boldsymbol{m+1}}) = 1\ ,$$

gdzie $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_{med}$, $\mathbf{x}_{m+1}$ są określonymi wcześniej wektorami wzorcowymi.

BADANIE EMPIRYCZNE

W tabeli 1 zamieszczono 5 stymulant służących do oceny efektów biznesowych pracy 16 oddziałów pewnego dużego Banku (archiwalne dane rzeczywiste). Wartości stymulant zostały znormalizowane przy wykorzystaniu techniki nazywanej unitaryzacją zerowaną [Kukuła 2000]. Oddziałom nadano sztuczne nazwy **O**01,…,**O**16.

W standardowej procedurze premiowania oddziały są dzielone na 4-ry uporządkowane grupy, i każda grupa otrzymuje ustalony procent funduszu płac jako fundusz premiowy. Oczywiście współczynniki stanowiące procent funduszu płac są zazwyczaj dość znacząco zróżnicowane w zależności od grupy, do której przydzielono poszczególne oddziały (największy otrzymują oddziały z grupy 1 a najmniejszy z grupy 4). W tabeli tej zostały podane także wartości 6-ciu wskaźników syntetycznych otrzymanych jako odległość od jednego lub dwu wzorców (kolumny W1,…,W6) oraz informacje o podziale oddziałów na 4-ry grupy w zależności od wartości poszczególnych mierników/wskaźników w stosunku do 3-ech następujących progów: m_i-S_i, m_i, m_i+S_i dla i=1,…,6 gdzie m_i oznacza średnią wartość W_i, a S_i odchylenie standardowe W_i. Jako wzorce w tym przypadku posłużyły wektory

$$\mathbf{x}_{0} = (0,0,0,0,0) \text{ oraz } \mathbf{x}_{17} = (1,1,1,1,1).$$

Natomiast wskaźniki zostały określone jako: W1 - odległość od pozytywnego wzorca według metryki Minkowskiego z p=1, W2 oraz W3 – odpowiednio odległość euklidesowa od negatywnego i pozytywnego wzorca, W4- to odległość euklidesowa od obu wzorców według formuły Topsis, a W5=(W2+W3)/2, W6=(W2*W3)^0,5.

Z przeprowadzonej analizy wynika, iż podziały na grupy zależą od wybranego miernika/wskaźnika syntetycznego (por. tabela 1). Można oczywiście przeanalizować np. macierz podobieństw dotycząca tych 6-ciu podziałów i wybrać reprezentanta. Jednak wtedy rozpocznie się dyskusja jaką miarę podobieństwa wektorów wybrać. Naszym zdaniem lepszym rozwiązaniem jest wybranie dodatkowego pośredniego wzorca (lub więcej wzorców pośrednich) i ustalenie wartości naszego miernika. W tabeli 2 przedstawiliśmy wyniki dla tych 6-ciu wskaźników w przypadku, gdy zastosujemy funkcję opisaną wzorem (1).

W oparciu o przeliczone wartości mierników dokonaliśmy podziału na cztery grupy. Wektor odpowiadający dodatkowemu wzorcowi to $\mathbf{x}_{med}$ = (0,378; 0,406; 0,343; 0,362; 0,195), a wartości wskaźników W1,…,W6 dla tego wzorca wynoszą odpowiednio 0,337; 0,345; 0,333; 0,509;0,506 oraz 0,480. Po takim przekształceniu wartości mierników syntetycznych w tym przypadku otrzymaliśmy pełną zgodność podziału na grupy. Oczywiście nie zawsze tak się musi wydarzyć. Jednak zazwyczaj dołożenie wzorca pośredniego zmniejszy różnorodność podziałów na grupy. W bardziej skomplikowanych przypadkach należy zastanowić się nad użyciem większej niż jeden liczby wzorców pośrednich. Innym rodzajem wzorca pośredniego może być zamiast $\mathbf{x}_{med}$ wektor $\mathbf{x}_{web}$ indukowany przez mediany Webera danych. Wektor ten minimalizuje sumę odległości od obiektów $\mathbf{O}_{01}$, $\mathbf{O}_{02}$,...,$\mathbf{O}_{16}$ [Młodak 2006].

W przypadku danych podanych w tabeli 2 i odległości euklidesowej jest to wektor $\mathbf{x}_{web}$ = (0,374; 0,434; 0,384; 0,408; 0,307). Sprawdziliśmy, że w przypadku wykorzystania tego wzorca w procesie podziału na grupy do danych z tabeli 1 otrzymujemy podział identyczny z tym zapisanym w tabeli 2. Zmienią się oczywiście wartości w kolumnach W1-W6.

Tabela 1. Ocena 16 obiektów opisanych 5-cioma wskaźnikami cząstkowymi za pomocą 6-ciu wybranych wskaźników syntetycznych

	wartości wskaźników cząstkowych					wartości wskaźników						grupy					
	X1	X2	X3	X4	X5	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W 1	W 2	W 3	W 4	W 5	W 6
O01	0	0,586	0,4	0,324	0,119	0,286	0,353	0,256	0,322	0,305	0,301	3	3	3	4	4	4
O02	0,344	0,401	0	0,203	0,515	0,293	0,342	0,271	0,319	0,306	0,304	3	3	3	4	4	4
O03	0,341	0	0,154	0,304	0,039	0,168	0,216	0,156	0,204	0,186	0,184	4	3	4	4	4	4
O04	0,204	0,305	0,255	0,352	0,355	0,294	0,300	0,292	0,297	0,296	0,296	3	3	3	4	4	4
O05	0,385	0,304	0,146	0,536	0,104	0,295	0,335	0,277	0,317	0,306	0,305	3	3	3	4	4	4
O06	0,591	0,487	0,194	0,399	0,497	0,434	0,454	0,418	0,438	0,436	0,436	2	2	2	3	3	3
O07	0,398	0,702	0,582	0,496	0	0,436	0,497	0,387	0,448	0,442	0,439	2	2	2	3	3	3
O08	0,674	0,971	1	0,79	0,729	0,833	0,843	0,788	0,799	0,815	0,815	1	1	1	1	1	1
O09	0,37	0,266	0,163	0,371	0,125	0,259	0,278	0,252	0,271	0,265	0,265	3	3	3	4	4	4
O10	0,449	0,56	0,848	0,479	1	0,667	0,702	0,602	0,638	0,652	0,650	1	1	1	2	2	2
O11	0,441	0,544	0,455	0	0,053	0,299	0,374	0,263	0,337	0,319	0,314	3	3	3	3	4	3
O12	1	0,411	0,507	0,169	0,265	0,470	0,552	0,397	0,478	0,474	0,468	2	2	2	3	3	3
O13	0,144	0,187	0,208	0,247	0,079	0,173	0,182	0,171	0,180	0,177	0,177	4	4	4	4	4	4
O14	0,087	0,023	0,356	0,63	0,43	0,305	0,379	0,270	0,341	0,324	0,320	3	3	3	3	3	3
O15	0,438	1	0,543	1	0,552	0,707	0,747	0,619	0,662	0,683	0,680	1	1	1	2	2	1
O16	0,119	0,202	0,33	0,229	0,045	0,185	0,209	0,179	0,203	0,194	0,194	4	3	4	4	4	4
m	0,374	0,434	0,384	0,408	0,307	0,381	0,384	0,380	0,503	0,502	0,488						
S	0,239	0,282	0,259	0,240	0,283	0,192	0,192	0,174	0,172	0,182	0,181						
V	0,639	0,649	0,675	0,588	0,921	0,504	0,500	0,457	0,342	0,362	0,372						
Q1	0,159	0,218	0,171	0,234	0,060	0,266	0,284	0,253	0,278	0,273	0,273						
Q2	0,378	0,406	0,343	0,362	0,195	0,297	0,364	0,274	0,329	0,313	0,309						
Q3	0,447	0,580	0,534	0,526	0,511	0,462	0,538	0,413	0,470	0,466	0,461						

Źródło: opracowanie własne

Na zakończenie analizy warto zwrócić uwagę, iż rozkłady wartości 6-ciu wskaźników syntetycznych po zastosowaniu wzorca pośredniego stały się mniej skośne oraz ich średnia i mediana są w pobliżu wartości 0,5. Wydaje się, iż takie przeskalowanie wartości wskaźników syntetycznych prowadzi do bardziej czytelnego przedstawienia efektów oceny poszczególnych obiektów. Takie postepowanie jest także bardziej odporne na zaburzenia, spowodowane dodaniem jednego lub więcej obiektów, które mają znacząco lepsze wyniki niż pozostałe obiekty (czyli na zjawisko znacznego spłaszczenia wyników pozostałych obiektów).

Tabela 2. Wartości wskaźników z tabeli 1 po przekształceniu przez funkcję g(u)

	wartości wskaźników						rangi						grupy					
	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W1	W2	W3	W4	W5	W6
O01	0,425	0,506	0,386	0,316	0,301	0,314	12	9	12	9	11	11	3	3	3	3	3	3
O02	0,435	0,497	0,407	0,314	0,303	0,317	11	10	9	10	9	10	3	3	3	3	3	3
O03	0,249	0,314	0,235	0,201	0,184	0,192	16	14	16	14	15	15	4	4	4	4	4	4
O04	0,437	0,435	0,439	0,292	0,292	0,308	10	12	7	12	12	12	3	3	3	3	3	3
O05	0,438	0,486	0,417	0,311	0,302	0,318	9	11	8	11	10	9	3	3	3	3	3	3
O06	0,573	0,583	0,564	0,430	0,431	0,454	6	6	4	6	6	6	2	2	2	2	2	2
O07	0,575	0,616	0,541	0,440	0,437	0,457	5	5	6	5	5	5	2	2	2	2	2	2
O08	0,874	0,880	0,841	0,795	0,813	0,822	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
O09	0,385	0,404	0,379	0,266	0,262	0,276	13	13	13	13	13	13	3	3	3	3	3	3
O10	0,749	0,773	0,702	0,632	0,648	0,664	3	3	3	3	3	3	1	1	1	1	1	1
O11	0,444	0,523	0,396	0,331	0,315	0,327	8	8	11	8	8	8	3	3	3	3	3	3
O12	0,601	0,658	0,548	0,469	0,469	0,488	4	4	5	4	4	4	2	2	2	2	2	2
O13	0,257	0,265	0,257	0,177	0,175	0,184	15	16	15	16	16	16	4	4	4	4	4	4
O14	0,453	0,526	0,406	0,336	0,320	0,333	7	7	10	7	7	7	3	3	3	3	3	3
O15	0,779	0,807	0,715	0,656	0,679	0,693	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1
O16	0,275	0,303	0,270	0,199	0,192	0,202	14	15	14	15	14	14	4	4	4	4	4	4
m	0,497	0,536	0,469	0,385	0,383	0,454												
S	0,179	0,174	0,167	0,171	0,181	0,182												
V	0,359	0,324	0,356	0,445	0,474	0,401												
Q1	0,395	0,412	0,381	0,273	0,270	0,284												
Q2	0,441	0,514	0,412	0,324	0,309	0,322												
Q3	0,594	0,648	0,560	0,462	0,461	0,480												

Źródło: opracowanie własne

PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Zazwyczaj w praktycznych zastosowaniach podział ocenianych obiektów na uporządkowane grupy realizuje się w oparciu o arbitralne progi lub arbitralny sposób ich ustalania. Jednakże taki podział zależy od wybranego do oceny miernika/wskaźnika. Wynika to z faktu, iż rozkład wartości poszczególnych tradycyjnie wykorzystywanych mierników może znacząco się różnić. Jeśli prowadzimy ocenę z uwagi na pewien aspekt (kryterium) przez kilka okresów sprawozdawczych, to zazwyczaj mamy wyobrażenie jaką wartość wskaźnika należałoby nadać w przypadku dla pewnych szczególnych, wybranych wektorów. Na przykład część analityków uważa, że miernik powinien przyjmować wartość 0,5 w przypadku, gdy mamy do czynienia z obiektem wzorcowym, który jest opisany wektorem generowanym przez medianę Webera, w badanym zbiorze wektorów opisujących oceniane obiekty. W naszym przypadku gdybyśmy użyli metryki euklidesowej i wektora $\mathbf{x}_{web}$ (mediana Webera) zamiast użytego w $\mathbf{x}_{med}$ do budowy tabeli 2, to podział na grupy pozostał by identyczny jak w tabeli 2 - zmieniłyby się tylko wartości wskaźników W1,…,W6.

W podsumowaniu należy dodać, że im więcej użyje się pośrednich wzorców uzgodnionych z ekspertami z danej dziedziny, to dokładniej wyskaluje się tworzony miernik według wymagań dostosowanych do badanego (ocenianego) problemu. Dalsze prace powinny być skoncentrowane na symulacjach zjawisk gospodarczych w poszukiwaniu optymalnych rozwiązań (najlepszego miernika syntetycznego).

BIBLIOGRAFIA

Binderman A. (2006) Klasyfikacja obiektów oparta na dwóch wzorcach. EiOGŻ, Zeszyty Naukowe SGGW, 60, Warszawa, 25-37.

Binderman Z. (2015) Zagadnienia poprawnie postawione w ekonomii i zarządzaniu, (klasyfikacja i porządkowanie obiektów, pomiar koncentracji). Розвиток національної економіки: теорія і практика, Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції 3-4 квітня 2015 року Частина 2 Івано-Франківськ, s. 318-321.

Binderman Z., Borkowski B., Szczesny W. (2008) O pewnej metodzie porządkowania obiektów na przykładzie regionalnego zróżnicowania rolnictwa. Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych. Warszawa. Wydawnictwo SGGW, s. 39-48.

Borkowski B., Wiliński A , Binderman Z., Szczesny W. (2020) Mathematical Analysis of Synthetic Measures Based on Radar Charts. Mathematical Modelling and Analysis, 25(3), 473-489.

Breiman L. (1994) Bagging Predictors. Technical Report 420, Department of Statistics, University of California, USA.

Cieślak M. (1993) Ekonomiczne zastosowanie mierników syntetycznych ze zmiennym wzorcem. [w:] Przestrzenno-czasowe modelowanie i prognozowanie zjawisk gospodarczych, AE, Kraków.

Hellwig Z. (1968) Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju oraz zasoby i strukturę kwalifikowanych kadr. Przegląd Statystyczny, 4, 307-327.

Hwang. C. L., Yoon K. (1981) Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications. Springer-Verlag, New York.

Gatnar E., Walesiak M. (2009) Statystyczna analiza danych z wykorzystaniem programu R. PWN, Warszawa.

Jackson D. H. (1969) Comparison of Classification. Academic Press. Cambridge University.

Kukuła K. (2000) Metoda unitaryzacji zerowanej. PWN, Warszawa.

Kukuła K., Luty L. (2017) Jeszcze o procedurze wyboru metody porządkowania liniowego. Przegląd Statystyczny, 64(2), 163-176.

Młodak A. (2006) Analiza taksonomiczna w statystyce regionalnej. DIFIN, Warszawa.

Panek E. (2000) Ekonomia matematyczna. AE Poznań.

Panek T. (2009) Statystyczne metody wielowymiarowej analizy porównawczej. Wyd. SGH, Warszawa.

Zeliaś A. (2000) Taksonomiczna analiza przestrzennego zróżnicowania poziomu życia w Polsce w ujęciu dynamicznym. Wydawnictwo AE, Kraków.

AN APPLICATION OF INDIRECT MODELS FOR THE CONSTRUCTION OF SYNTHETIC MEASURES OF CLASSIFICATION

Abstract: The work is a direct continuation of the series of authors articles concerning the construction of new indicators of classification. In the present paper, a manner of classification of objects which is based on three model objects is proposed. An example of the actual distribution of a bonus fund among business units in a large corporation demonstrates the usefulness of such an approach. Studies have shown that this method is very useful for organizing and grouping objects.

Keywords: classification, synthetic measure, Weber median, TOPSIS method, utility function

JEL classification: C1, G2