METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XI/2, 2010, str. 62–70

ZJAWISKO NIEDOSYTU W POLU PREFERENCJI INDUKOWANEJ PRZEZ MIERNIK DWUWZORCOWY

Zbigniew Binderman
Katedra Ekonometrii i Statystyki SGGW
e-mail: zbigniew_binderman@sggw.pl

Streszczenie: W pracy, dla miernika syntetycznego zbadano problem wyboru takiego sposobu mierzenia odległości między obiektami, aby w polu preferencji indukowanym przez ten miernik występowało zjawisko niedosytu. Rozważany w pracy miernik, wykorzystywany do porządkowania i grupowania danych obiektów ekonomicznych jest oparty na dwóch wzorcowych obiektach.

Słowa kluczowe: zjawisko niedosytu, pole preferencji, mierniki syntetyczne, funkcje użyteczności, semimetryka, metryka normalna, metryka quasi-normalna, uporządkowanie liniowe, klasyfikacja

WSTĘP

A. Binderman w swoich pracach do porządkowania i klasyfikacji obiektów wykorzystywała miernik syntetyczny, który oparty jest na dwóch wzorcowych obiektach [zob. Binderman A. 2006a, 2006b, 2006c, 2007a, 2007b, 2008a, 2008b, 2009a, 2009b]. W cytowanych pracach, poświęconym regionalnemu zróżnicowaniu rolnictwa w Polsce wykazano przydatność tego miernika i podano jego podstawowe własności – przy założeniu, że odległości między obiektami obliczane są za pomocą metryki Minkowskiego. W naukach ekonomicznych, w dziale zwanym taksometrią [Kukuła 2000, Młodak 2006, Pociecha , Walesiak M. 2006, Zeliaś 2000] do obliczania odległości, podobieństwa między obiektami stosuje się wiele innych sposobów.

Z uwagi na dużą przydatność i prostotę stosowalności omawianego miernika, autor swoją pracą chciałby zapoczątkować badania nad wykorzystaniem różnych sposobów mierzenia odległości do jego obliczania. W wyniku, których uzyskuje się miernik syntetyczny, generujący pole preferencji, w którym występuje zjawisko niedosytu [Panek 2000, Panek 2003, Malawski 1999, Allen 1964].

RELACJE PREFERENCJI I FUNKCJE UŻYTECZNOŚCI

Niech $X \subset \Re_+^n$, gdzie $\Re_+^n := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Uporządkowaną parę $(X,\succcurlyeq)$ $\{(X,\succ),\ (X,\sim)\}$ gdzie $\succcurlyeq$ oznacza relację słabej preferencji $\{\succ$ − relacja silnej preferencji, $\sim$ - relacja indyferencji$\}$ nazywać będziemy polem słabej preferencji { silnej preferencji, indyferencji} [zob. np. Panek 2000].

Przydatność relacji preferencji w naukach ekonomicznych ma znaczenie głównie teoretyczne. W celu nadania tym relacjom znaczenia praktycznego relacje preferencji zastępuje się ilościowymi miernikami zwanymi funkcjami użyteczności.

Funkcję u: $X \rightarrow \Re^1$ nazywać będziemy funkcja użyteczności związaną z relacją preferencji $\succcurlyeq$ jeżeli dla wszystkich $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X : u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$.

Liczby u(**x**), u(**y**) określając użyteczność dwóch obiektów reprezentowanych przez wektory **x**, **y**, odpowiednio są wielkościami względnymi, pozwalającymi jedynie na dokonanie porównania między nimi. Oczywiście, jeżeli dla danej relacji preferencji istnieje jedna funkcja użyteczności, to istnieje również nieskończenie wiele funkcji użyteczności generowanych przez tą relacje. Jeżeli dana jest relacja preferencji to istotnym problem jest wyznaczenie funkcji użyteczności przez nią indukowanej. Dokonując odpowiednio wyboru funkcji użyteczności określamy relacje preferencji, która tą funkcję opisuje. Mając, zatem daną funkcję użyteczności można badać, jak jej własności przekładają się na własności relacji ją indukującą.

Niech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in X \subset \Re^n$, przyjmijmy oznaczenia:

$$x \geq y \Leftrightarrow \forall i : x_i \geq y_i ; x > y \Leftrightarrow \forall i : x_i > y_i \ \ , i = 1, 2, ..., n.$$

Mówimy, że w polu preferencji $(\Re_+^n, \succcurlyeq)$ występuje *zjawisko niedosytu*, jeżeli dla wszystkich wektorów $x, y \in \Re_+^n$ prawdziwa jest implikacja:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{y} .$$

Jeżeli w polu preferencji $(\Re_+^n, \succcurlyeq)$ występuje zjawisko niedosytu to każda funkcja użyteczności u(**x**)=u(x_1,x_2,...,x_n) związana z relacją preferencji $\succcurlyeq$ traktowana, jako funkcja wielu zmiennych jest rosnąca względem każdej ze zmiennych x_i, i=1,2,...,n. Jest to równoważne warunkowi: jeżeli wektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re_+^n : y \neq \mathbf{0} = (0, 0, ..., 0) \Rightarrow u(\mathbf{x} + \mathbf{y}) > u(\mathbf{x})$. Odwrotnie, jeżeli rosnąca funkcja użyteczności u(**x**) jest indukowana przez relację preferencji $\succcurlyeq$ to w polu preferencji $(\Re_+^n, \succcurlyeq)$ występuje zjawisko niedosytu [Panek 2000, 2003].

Rozważmy teraz problem polegający na klasyfikacji $m\in N$ obiektów $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, …,$\mathbf{Q}_m$ badanego zjawiska za pomocą $n\in N$ zmiennych, mających charakter cech ilościowych. Przyjmijmy założenie, że każdy taki obiekt daje się przedstawić za pomocą wektora należącego do przestrzeni $\Re_+^n$.

Niech wektor $\mathbf{x}_i=(x_{i1},x_{i2},...,x_{in})$ opisuje i-ty obiekt $\mathbf{Q}_i$, i=1,2,...,m,. Jeżeli $\mathbf{x}_i\geq\mathbf{x}_j$ i $\mathbf{x}_i\neq\mathbf{x}_j$ to przy pewnych założeniach naturalnym jest nazywać obiekt $\mathbf{x}_i$ lepszym (wyżej ocenianym) od obiektu $\mathbf{x}_j$. Oznacza to, że żadna ze składowych wektora $\mathbf{x}_i$ nie jest mniejsza od odpowiednich składowych wektora $\mathbf{x}_j$, a przynajmniej jedna z nich ma wartość większą, tj. istnieje takie $k\in[1,n]$, że $x_{ik}>x_{jk}$. Fakt ten można zapisać: $\mathbf{Q}_i \succ \mathbf{Q}_j$.

Niech

$$x_{0,k} := \min_{1\leq i\leq m} x_{ik}, \quad x_{m+1,k} := \max_{1\leq i\leq m} x_{ik}, \quad k=1,2,...,n.$$

Przyjmijmy następujące oznaczenia wektorów:

$$\mathbf{x}_0:=(x_{0,1},x_{0,2},...,x_{0,n}), \quad i \quad \mathbf{x}_{m+1}:=(x_{m+1,1},x_{m+1,2},...,x_{m+1,n}),$$

Załóżmy, że zdefiniowane wyżej wektory $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_{m+1}$ opisują obiekt $\mathbf{Q}_0$ (najgorszy) i obiekt $\mathbf{Q}_{m+1}$ (najlepszy), odpowiednio. Oczywiście, wektory te spełniają nierówności:

$$\mathbf{x}_0 \leq x_i \leq \mathbf{x}_{m+1} \text{ dla każdego } i\in[1,m].$$

Obiekty Q_0 i Q_{m+1} będą pełnić w naszych rozważaniach rolę wzorców. Załóżmy ponadto, że $\mathbf{x}_0\neq\mathbf{x}_{m+1}$, oznacza to, że wektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2,..., \mathbf{x}_m$ nie są identyczne.

W pracach Binderman A. [2006a, 2007a] do liniowego uporządkowania obiektów $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, …,$\mathbf{Q}_m$ wykorzystana została następującą funkcja:

$$U(\mathbf{x}_i) := \frac{d(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_i)+d(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_{m+1})-d(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{m+1})}{2d(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_{m+1})}, \quad i=0,1,...,m,m+1,$$

gdzie $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ oznacza odległość między wektorami $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Re^n$, obliczoną za pomocą metryki Minkowskiego ($1\leq p<\infty$).

W pracach [Binderman A. 2006a, 2006b, 2007a, 2007b, 2008a, 2008b, 2009a, 2009b, Binderman A., Krawiec 2006c], zaprezentowano dużą przydatność rozważanej funkcji, w porównaniu do innych metod, podano podstawowe własności oraz zbadano stabilność wyników, uzyskiwanych przy jej pomocy.

Naturalnym, zatem problemem do rozwiązania jest podanie warunków dotyczących sposobu mierzenia odległości miedzy wektorami, przy których funkcja U jest rosnąca.

Niech wektory $\mathbf{x_m},\mathbf{x_M}\in\Re_+^n$: $\mathbf{x_m}\leq\mathbf{x_M}\wedge\mathbf{x_m}\neq\mathbf{x_M}$ będą dowolnie ustalone i $[\mathbf{x_m},\mathbf{x_M}]:=\{\mathbf{x}\in\Re^n:\mathbf{x_m}\leq\mathbf{x}\leq\mathbf{x_M}\}$. Określmy funkcję

$$\mathrm{v}(\mathbf{x}) := \frac{1}{2} + \frac{\rho(\mathbf{x_m}, \mathbf{x}) - \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x_M})}{2\rho(\mathbf{x_m}, \mathbf{x_M})}, \text{ dla } \mathbf{x} \in [\mathbf{x_m}, \mathbf{x_M}], \tag{1}$$

gdzie ρ(**x**,**y**) oznacza odległość między wektorami **x** i **y** taką, że $\rho(\mathbf{x_m}, \mathbf{x_M}) \neq 0$.

Nietrudno zauważyć, że zbiór $[\mathbf{x_m}, \mathbf{x_M}] \subset \Re_+^n$ przedstawia *kostkę*, w szczególności, jeżeli

$\mathbf{x_m} = \mathbf{0} := (0, 0, ..., 0)$, $\mathbf{x_M} = \mathbf{1} := (1, 1, ..., 1)$ to $[\mathbf{0}, \mathbf{1}] = (0,1)^n := \underbrace{(0,1) \times (0,1) \times ... \times (0,1)}_{n\ razy}$.

Obiekt reprezentowany przez wektor **x** uważać będziemy za *lepszy* od obiektu reprezentowanego przez wektor **y** wtedy tylko wtedy gdy v(**x**)>v(**y**), fakt ten oznaczmy symbolem $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. W podobny sposób (przy pomocy funkcji v) określmy relacje $\succcurlyeq, \sim$.

Celem naszych rozważań będzie podanie warunków dla odległości ρ(**x**,**y**), przy których w polu preferencji $([\mathbf{x_m}, x_\mathbf{M}], \succeq)$ występuje zjawisko niedosytu.

Funkcję $\rho : \Re^n \times \Re^n \to \Re^1$ nazywamy *semimetryką* jeżeli spełnia warunki

a) ρ(**x**,**x**)=0; b) ρ(**x**,**y**)= ρ(**y**,**x**); c) ρ(**x**,**y**)≤ ρ(**x**,**z**)+ ρ(**z**,**y**),

dla dowolnych $\mathrm{x, y, z} \in \Re^n$. Jeżeli ponadto spełniony jest warunek

d) ρ(**x**,**y**)=0 pociąga za sobą **x**=**y**

to ρ nazywa się *metryką*. Liczbę ρ(**x**,**y**) nazywa się także odległością wektora **x** od wektora **y** [Alexiewicz 1969, Rolewicz 1984].

Przykładem metryk są metryki Minkowskiego ρ_p, $1 \le p \le \infty$:

$$\rho_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ dla } 1 \le p < \infty,$$

i

$$\rho_\infty = \lim_{p \to \infty} \rho_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|, \text{ gdzie } \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \Re^n.$$

Zauważmy, że jeżeli ρ jest semimetryką to funkcja v(**x**) określona wzorem (1) ma następujące własności:

$$\mathrm{v}(\mathbf{x_m}) = 0,\ \mathrm{v}(\mathbf{x_M}) = 1$$

Przyjmijmy dwie, następujące definicje:

Definicja 1. Metrykę (semimetrykę) $\rho : \Re_+^n \times \Re_+^n \to \Re_+$ nazywać będziemy *quasi-normalną,* jeżeli spełnia warunek:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \ge \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \ \ dla\ \ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \Re_+^n : \mathbf{z} \le \mathbf{y} \le \mathbf{x}.$$

Definicja 2. Metrykę (semimetrykę) quasi-normalną ρ nazywać będziemy normalną, jeżeli spełnia warunek:

$$\text{dla } \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in R_+^n : \mathbf{z}\le\mathbf{y}\le\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}\ne\mathbf{y}: \quad \rho(\mathbf{x},\mathbf{z})>\rho(\mathbf{y},\mathbf{z}) \ .$$

Uwaga 1. Metryka dyskretna oraz metryka Minkowskiego ρ_∞, są metrykami quasi-normalnymi, nie będąc metrykami normalnymi.

Dowód. 1^0. Metryka dyskretna. Niech ρ oznacza metrykę dyskretną tj. taką, że $\rho(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$ i $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=1$ dla wszystkich $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Re_+^n$: $\mathbf{x}\ne\mathbf{y}$. Dla $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\Re_+^n$: $\mathbf{z}\le\mathbf{y}\le\mathbf{x}$

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})=\rho(\mathbf{y},\mathbf{z})=0 \quad \text{gdy } \mathbf{z}=\mathbf{y}=\mathbf{x},$$

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})=1,\ \rho(\mathbf{y},\mathbf{z})=0 \quad \text{gdy } \mathbf{z}=\mathbf{y}\ i\ \mathbf{y}\ne\mathbf{x},$$

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})=\rho(\mathbf{y},\mathbf{z})=1 \quad \text{gdy } \mathbf{z}\ne\mathbf{y}.$$

Ostatnia równość pokazuję, że metryka ta nie spełnia warunku Definicji 2.

2^0. Niech ρ oznacza metrykę Minkowskiego, przy p=∞. Mamy wówczas z definicji, że

$\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i-z_i|$ dla $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$, $\mathbf{z}=(z_1,z_2,...,z_n)\in\Re_+^n$. Dla $\mathbf{x},\mathbf{y}$, $\mathbf{z}\in\Re_+^n$: $\mathbf{z}\le\mathbf{y}\le\mathbf{x}$ otrzymujemy $\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})=\max\limits_{1\le i\le n}(x_i-z_i)$, $\rho(\mathbf{y},\mathbf{z})=\max\limits_{1\le i\le n}(y_i-z_i)$, $\mathbf{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$. Ponieważ $x_i\ge y_i$ to $x_i-z_i\ge y_i-z_i$ dla $1\le i\le n$ i $\max\limits_{1\le i\le n}(x_i-z_i)\ge\max\limits_{1\le i\le n}(y_i-z_i)$, stąd $\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})\ge\rho(\mathbf{y},\mathbf{z})$. Jeżeli $\mathbf{x}\ne\mathbf{y}$ to $\mathbf{x}\ne\mathbf{z}$.

Metryka ta nie spełnia jednak warunku zawartego w Definicji 2. Istotnie, niech $\mathbf{z}\le\mathbf{x}\ i\ \mathbf{x}\ne\mathbf{z}$, gdzie $\mathbf{x},\mathbf{z}\in R_+^n$ są wektorami dowolnie ustalonymi, wówczas istnieje takie $k\in[1,n]$, że $\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})=x_k-z_k>0$. Niech $\mathbf{y}:=(x_1,x_2,...x_{k-1},z_k,x_{k+1},...,x_n)$. Stąd $\mathbf{x}\ge\mathbf{y}\ge\mathbf{z}\ i\ \mathbf{x}\ne\mathbf{y}$ oraz $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=x_k-z_k=\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})$,

Uwaga 2. Metryka Minkowskiego z wykładnikiem p: 1≤p<∞ jest metryką normalną.

Dowód. Niech ρ oznacza metrykę Minkowskiego z dowolnym, ustalonym p: 1≤p<∞.

Dla $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in R_+^n : \mathbf{z}\le\mathbf{y}\le\mathbf{x}$ mamy: $z_i\le y_i\le x_i$ oraz $x_i-z_i\ge y_i-z_i\ge 0$, $i\in[1,n]$, gdzie $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$, $\mathbf{z}=(z_1,z_2,...,z_n)$.

$$\text{Stąd,}\quad \rho(\mathbf{x},\mathbf{z})=\left(\sum_{i=1}^n (x_i-z_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\ge\left(\sum_{i=1}^n (y_i-z_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\rho(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

Jeżeli ponadto wektor $\mathbf{y}\ne\mathbf{x}$, to fakt ten oznacza, że istnieje takie $j\in[1,n]$, że $x_j>y_j$ oraz $x_i\ge y_i$ dla $i\ne j$. Stąd $x_j-z_j>y_j-z_j\ge 0$, $x_i-z_i\ge y_j-z_j\ge 0$ dla $i\ne j$ oraz

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})=\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(x_i-z_i)^p+(x_j-z_j)^p\right)^{\frac{1}{p}}>\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(y_i-z_i)^p+(y_j-z_j)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\rho(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

W dalszej części naszych rozważań potrzebne będą następujące lematy, których dowody wynikają bezpośrednio z definicji.

<u>Lemat 1.</u> Jeżeli $\mathbf{z}\in\Re_+^n$ jest dowolnie ustalonym wektorem, ρ jest metryką normalną to $g_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}):=\rho(\mathbf{x},\mathbf{z}),$ jest funkcją rosnącą dla $\mathbf{x}\in\Re_+^n:\mathbf{z}\le\mathbf{x}.$

<u>Lemat 2.</u> Jeżeli $\mathbf{w}\in\Re_+^n$ jest dowolnie ustalonym wektorem, ρ jest metryką quasi-normalną to $g_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}):=-\rho(\mathbf{x},\mathbf{w})$ jest funkcją niemalejącą dla $\mathbf{x}\in\Re_+^n:\mathbf{w}\ge\mathbf{x}.$

Z definicji i powyższych lematów wynika następujący wniosek.

<u>Wniosek 1.</u> Jeżeli ρ jest metryką normalną, $\mathbf{w}\ge\mathbf{z},\mathbf{w}\neq\mathbf{z},$ gdzie $\mathbf{w},\mathbf{z}\in\Re_+^n$ są ustalonymi wektorami, to

$$g(\mathbf{x}):=g_{\mathbf{z}}(\mathbf{x})+g_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}),\tag{2}$$

jest funkcją rosnącą dla $\mathbf{x}\in\Re_+^n:\mathbf{z}\le\mathbf{x}\le\mathbf{w}.$

Nietrudno pokazać, że słuszny jest następujący lemat.

<u>Lemat 3.</u> Jeżeli a>0, b≥0, g jest funkcją określoną przy pomocy wzoru (2) to

$$h(\mathbf{x}):=ag(\mathbf{x})+b\tag{3}$$

jest funkcją rosnącą dla $\mathbf{x}:\ \mathbf{z}\le\mathbf{x}\le\mathbf{w},$ gdzie $\mathbf{w}\neq\mathbf{z},\ \mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{z}\in\Re_+^n.$

<u>Definicja 3.</u> Niech ρ oznacza metrykę normalną, $\mathbf{w}\ge\mathbf{z},\mathbf{w}\neq\mathbf{z},;\ \mathbf{w},\mathbf{z}\in\Re_+^n$ będą ustalonymi wektorami,. Funkcję g określoną wzorem (2) nazywać będziemy *unormowaną* względem wektorów **z** i **w,** jeżeli spełnia warunki:

$$g(\mathbf{z})=0,\qquad g(\mathbf{w})=1.$$

<u>Lemat 4.</u> Jeżeli g jest funkcją określoną przy pomocy wzoru (2), $\mathbf{w}\ge\mathbf{z},\mathbf{w}\neq\mathbf{z},$ gdzie $\mathbf{w},\mathbf{z}\in\Re_+^n$ są ustalonymi wektorami, ρ jest metryką normalną to funkcja

$$f(\mathbf{x}):=\frac{1}{2\rho(\mathbf{w},\mathbf{z})}g(\mathbf{x})+\frac{1}{2}=\frac{g(\mathbf{x})+\rho(\mathbf{w},\mathbf{z})}{2\rho(\mathbf{w},\mathbf{z})},\tag{4}$$

jest funkcją unormowaną.

<u>Dowód.</u> Niech $\mathbf{w}\ge\mathbf{z},\mathbf{w}\neq\mathbf{z},;\ \mathbf{w},\mathbf{z}\in\Re_+^n$ będą ustalonymi wektorami. Wówczas

$$f(\mathbf{z})=\frac{g(\mathbf{z})+\rho(\mathbf{w},\mathbf{z})}{2\rho(\mathbf{w},\mathbf{z})}=\frac{g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})+g_{\mathbf{w}}(\mathbf{z})+\rho(\mathbf{w},\mathbf{z})}{2\rho(\mathbf{w},\mathbf{z})}=$$
$$=\frac{\rho(\mathbf{z},\mathbf{z})-\rho(\mathbf{w},\mathbf{z})+\rho(\mathbf{w},\mathbf{z})}{2\rho(\mathbf{w},\mathbf{z})}=0,$$

$$f(\mathbf{w})=\frac{g(\mathbf{w})+\rho(\mathbf{w},\mathbf{z})}{2\rho(\mathbf{w},\mathbf{z})}=\frac{\rho(\mathbf{w},\mathbf{z})-\rho(\mathbf{w},\mathbf{w})+\rho(\mathbf{w},\mathbf{z})}{2\rho(\mathbf{w},\mathbf{z})}=1.$$

Z Lematu 3 oraz Lematu 4 wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Niech ρ będzie metryką normalną, wektory $\mathbf{x_m},\mathbf{x_M}\in\Re^n_+:\ \mathbf{x_m}\le\mathbf{x_M}\wedge\mathbf{x_m}\ne\mathbf{x_M}$ będą dowolnie ustalone. Wówczas funkcja v(**x**) określona wzorem (1) jest unormowana i rosnąca w kostce $[\mathbf{x_m},\mathbf{x_M}]\in\Re^n_+$.

Z powyższego twierdzenia wynika, że przy powyższych założeniach

$$\mathrm{v}(\mathbf{x_m})=0,\ \mathrm{v}(\mathbf{x_M})=1$$

oraz następująca implikacja

$$\mathbf{x}\ge\mathbf{y}\wedge\mathbf{x}\ne\mathbf{y}\Rightarrow \mathrm{v}(\mathbf{x})>\mathrm{v}(\mathbf{y})\Leftrightarrow\mathbf{x}\succ\mathbf{y},\ \text{dla wszystkich}\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in[\mathbf{x_m},\mathbf{x_M}].$$

Oczywistym jest, że jeżeli $\mathbf{x},\mathbf{y}\in[\mathbf{x_m},\mathbf{x_M}]$ oraz v(**x**)>v(**y**) to $\mathbf{x}\ge\mathbf{y}\wedge\mathbf{x}\ne\mathbf{y}$.
Zauważmy ponadto, że bezpośrednio z definicji mamy, że

$$\mathrm{v}(\mathbf{x})\ge\mathrm{v}(\mathbf{y})\Leftrightarrow\mathbf{x}\succeq\mathbf{y},\quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in[\mathbf{x_m},\mathbf{x_M}]$$

Dowiedliśmy zatem, następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2. Jeżeli ρ jest metryką normalną, funkcja v(**x**) określona wzorem (1) indukuje relację preferencji $\succcurlyeq$ to w polu preferencji $([\mathbf{x_m},\mathbf{x_M}],\succeq)$ występuje zjawisko niedosytu.

Na koniec naszych rozważań zauważmy.

Uwaga 4. Jeżeli ρ oznacza metrykę normalną, $\mathbf{w}\ge\mathbf{z},\mathbf{w}\ne\mathbf{z},;\ \mathbf{w},\mathbf{z}\in\Re^n_+$ to funkcja

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}):=\frac{\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\rho(\mathbf{z},\mathbf{w})};\quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in\Re^n_+$$

jest również metryką normalną. Oczywiście mamy wówczas, że d(**z**,**w**)=1.Wzór (4) możemy wówczas zapisać przy pomocy prostszej postaci

$$f(\mathbf{x})=\frac{d(\mathbf{z},\mathbf{x})-d(\mathbf{x},\mathbf{w})+1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{d(\mathbf{z},\mathbf{x})-d(\mathbf{x},\mathbf{w})}{2},\ \mathbf{z}\le\mathbf{x}\le\mathbf{w}.$$

ZAKOŃCZENIE

Przedstawione w prace rezultaty oraz wyniki wcześniejszych prac pokazują celowość dalszych badań dotyczących własności rozważanego miernika, w zależności od sposobu mierzenia odległości. Miernik ten przy odpowiednio dobranej metryce może być wykorzystywany do porządkowania i grupowania danych obiektów ekonomicznych. Według autora istnieje duże zapotrzebowanie na kompleksowe, syntetyczne analizy statystyczne zjawisk na szczeblu lokalnym. Praca prezentuje perspektywy szerszego wykorzystania dotychczas stosowanej metody w analizach decyzyjnych.

LITERATURA

Allen R. G. D., (1964): Ekonomia matematyczna, PWN, Warszawa.

Binderman A. (2006a) Klasyfikacja obiektów oparta na dwóch wzorcach, EiOGŻ, Zeszyty Naukowe SGGW, nr 60, Warszawa, str. 25-34.

Binderman A. (2006b) Wykorzystanie funkcji użyteczności do badania przestrzennego zróżnicowania rolnictwa, RN. SERiA, Tom VIII, z. 5, s. 5-11.

Binderman A., Krawiec M. (2006c) Regionalne zróżnicowanie poziomu rozwoju rolnictwa w Polsce w latach 2002-2005, Potencjał rozwojowy obszarów wiejskich w aspekcie wstąpienia Polski do Unii Europejskiej, Szczecin, s. 39.

Binderman A. (2007a) Wielowymiarowa analiza regionalnego zróżnicowania rolnictwa w Polsce, praca doktorska, SGGW, Warszawa.

Binderman A. (2007b) Zmiany regionalnego poziomu rolnictwa Polski w latach 1998-2005, Roczniki Naukowe SERiA, Tom IX, Warszawa-Kraków.

Binderman A. (2008a) Analiza regionalnego zróżnicowania rolnictwa Polski w 2006 roku, Roczniki Naukowe SERiA, Tom X, Zeszyt 2, Warszawa-Lublin.

Binderman A. (2008b) Zastosowanie liniowej i nieliniowej funkcji użyteczności do badania poziomu rolnictwa w Polsce, Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych – IX, wyd. SGGW, Warszawa, str. 29-38.

Binderman A. (2009a) Dynamika rozwoju rolnictwa w Polsce po akcesji do Unii Europejskiej, Roczniki Nauk Rolniczych, SERiA, Tom XI, Zeszyt 3.

Binderman A. (2009b) Zależność oceny zróżnicowania rolnictwa w Polsce od wybranych mierników syntetycznych, Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych – X, wyd. SGGW, Warszawa, str. 30-41.

Binderman, Z. (2009): Ocena regionalnego zróżnicowania kultury i turystyki w Polsce w 2007 roku RWN Humanistycznych SGGW, T XII, s. 335-351. Binderman Z., Borkowski B., Szczesny W (2009), O pewnych metodach porządkowych w analizie polskiego rolnictwa wykorzystujących funkcje użyteczności, Roczniki Nauk Rolniczych PAN, Seria G, Ekonomika Rolnictwa , T. 96, z. 2, s. 77-90.

Binderman Z. (20100, Syntetyczne mierniki elastyczności przedsiębiorstw, Prace i Materiały Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Gdańskiego, 4/2 s. 257-267.

Chiang A., C. (1984), Fundamental methods of Mathematical Economics, McGraw-Hill, Inc., New York.

Gatnar E. (1998); Symboliczne metody klasyfikacji danych, PWN, Warszawa.

Kukuła K., (2000): Metoda unitaryzacji zerowanej, PWN, Warszawa.

Młodak A.(2006); Analiza taksonomiczna w statystyce regionalnej, Warszawa.
Malawski A.; Wprowadzenie do ekonomii matematycznej, AE, Kraków 1999
Nowak E., (1990): Metody taksonomiczne w klasyfikacji obiektów społeczno-gospodarczych, PWE, Warszawa.
Panek E., (2000): Ekonomia matematyczna, Akademia Ekonomiczna, Poznań.
Panek E. (red.); Podstawy ekonomii matematycznej, AE, Poznań 2003.
Pociecha J., Podolec B., Sokołowski A., Zając K. (1988): Metody taksonomiczne w badaniach społeczno-ekonomicznych, PWN, Warszawa.
Pociecha J. (2009): Rozwój metod taksonomicznych i ich zastosowań w badaniach społeczno-ekonomicznych, Konferencja Naukowa 90-lecie GUS, Statystyka Społeczna Dokonania-Szanse-Perspektywy, www.stat.gov.pl.
Rolewicz S. (1985): Metric linear spaces, PWN-Polish Scientific Publishers and D. Reidel, Warszawa-Dordrecht.
Walesiak M. (2006): Uogólniona miara odległości w statystycznej analizie wielowymiarowej, wyd. AE Wrocław.
Wilson R. D., Martinez T. R (1997): Improved Heterogeneous Distance Function, Journal of Artificial Intelligence Research 6.
Zeliaś A. (2000): Taksonomiczna analiza przestrzennego zróżnicowania poziomu życia w Polsce w ujęciu dynamicznym, Kraków.

On a phenomenon of nonsatiation in a field of preference induced by the two-model indicator

Abstract: In presented work, for the two-model indicator a problem of choice of a manner of measurement of distances between objects is considered. This indicator makes an appearance of phenomenon of insufficiency in a field of preference. We can use the indicator as a synthetic measure in order to arrangement and assemble economic objects.

Key words: occurrence of nonsatiation, field of preference, synthetic measures, the utility function, semimetric, normal metric, quasi-normal metric, linear order, classification, cluster analysis