

ESTYMACJA KOMBINOWANA GRANICZNEJ FUNKCJI PRODUKCJI¹

Lucyna Błażejczyk-Majka

Zakład Historii Gospodarczej UAM

e-mail: majkal@amu.edu.pl

Radosław Kala

Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych

Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu

e-mail: kalar@up.poznan.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono metodę kombinowaną estymacji granicznej funkcji produkcji, w której wykorzystywane jest zarówno standardowe podejście parametryczne oparte na analizie regresji jak i podejście nieparametryczne oparte na metodach programowania matematycznego. Metodę tę uzupełniono uwagami dodatkowymi precyzującymi jej praktyczną realizację. Działanie metody zilustrowano na przykładzie rolnictwa UE wykorzystując wyniki osiągane przez przeciętne gospodarstwa rolne reprezentujące poszczególne regiony. W pracy pokazano także różnice w efektywności produkcji rolniczej pomiędzy różnymi członkami UE.

Słowa kluczowe: DEA, analiza regresji, graniczna funkcja produkcji, rolnictwo, Unia Europejska

WPROWADZENIE

Związek pomiędzy wielkością nakładów i wielkością wyników produkcyjnych zwykle wyraża się za pomocą funkcji produkcji. Funkcję taką, która winna spełniać szereg podstawowych założeń, formalnie można zapisać równością

$$y = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta}), \quad (1)$$

¹ Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2008-2011 jako projekt badawczy.

gdzie y reprezentuje wynik produkcyjny, \mathbf{x} jest wektorem nakładów, a $\boldsymbol{\beta}$ jest wektorem parametrów charakteryzujących technologię produkcji. Wtedy, gdy ważna jest ocena efektywności produkcji, zachodzi potrzeba ustalenie granicznej funkcji produkcji, która dla każdego dopuszczalnego wektora nakładów określa maksymalny możliwy wynik produkcyjny.

Jedną z bardziej popularnych funkcji produkcji jest dobrze znana funkcja Cobba-Douglasa. Funkcja ta jest jednorodna, rosnąca względem wszystkich nakładów, a przy założeniu, że elastyczność skali jest nie większa niż jeden, również wklęsła, czyli posiada standardowo wymagane własności. Ponadto modelowanie procesu produkcyjnego za pomocą funkcji Cobba-Douglasa prowadzi do prostego modelu, ze stosunkowo małą liczbą parametrów mających bezpośrednią interpretację ekonomiczną.

Estymacja funkcji produkcji wymaga danych ekonomiczno-statystycznych obejmujących ustalony, możliwie bogaty, zbiór producentów (jednostek). W analizie takich danych zwykle wykorzystywane są metody regresji. Natomiast wtedy, gdy interesująca jest ocena efektywności produkcji może mieć zastosowanie zarówno analiza regresji jak i podejście nieparametryczne oparte na metodach programowania matematycznego.

Celem pracy jest przedstawienie metody kombinowanej, w której do estymacji granicznej funkcji produkcji wykorzystywane jest zarówno podejście nieparametryczne, jak i parametryczne oparte na analizie regresji. Metodę tę uzupełniono uwagami szczegółowymi oraz zilustrowano jej działanie na przykładzie estymacji granicznej funkcji produkcji dla rolnictwa Unii Europejskiej (UE). W pracy pokazano także różnice w efektywności produkcji rolniczej pomiędzy poszczególnymi krajami UE.

ESTYMACJA GRANICZNEJ FUNKCJI PRODUKCJI

Najprostsza metoda estymacji granicznej funkcji produkcji, tzw. poprawiona metoda najmniejszych kwadratów (COLS – *Corrected Ordinary Least Squares*), oparta jest na analizie regresji [porównaj Aigner i Chu 1968; Timmer 1971; Afriat 1972]. Metoda COLS realizowana jest w dwóch krokach. Najpierw, na podstawie obserwacji (y_i, \mathbf{x}_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie y_i określa wynik osiągnięty przez i -tego producenta przy wektorze nakładów \mathbf{x}_i , estymowane są parametry funkcji $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta})$. Można to osiągnąć za pomocą standardowej metody najmniejszych kwadratów, ponieważ po transformacji logarytmicznej funkcja produkcji jest zwykle liniowa względem parametrów. W drugim kroku, do wartości funkcji $\ln f(\mathbf{x}; \mathbf{b})$, gdzie \mathbf{b} jest oceną wektora parametrów, jest dodawana wartość największej reszty $a = \max(e_i)$. W rezultacie graniczna funkcja produkcji przyjmuje postać

$$y = C f(\mathbf{x}; \mathbf{b}), \quad (2)$$

gdzie $C = \exp(a) > 1$ jest mnożnikiem korygującym współczynnik skali funkcji $f(\mathbf{x})$.

Jeżeli w powyższym postępowaniu funkcja $f(\mathbf{x};\mathbf{b})$ jest korygowana za pomocą mnożnika $M = \exp(s_D)$, gdzie s_D jest oszacowaniem błędu standardowego z analizy regresji [patrz Greene, 2008, s.106], to mamy do czynienia ze zmodyfikowaną metodą najmniejszych kwadratów (MOLS – *Modified Ordinary Least Squares*). Ponieważ jednak $s_D < \max(e_i)$, to oceniona w ten sposób graniczna funkcja produkcji $y = Mf(\mathbf{x};\mathbf{b})$ dopuszcza, że w wśród badanych jednostek są takie, które osiągnęły wyniki większe niż wynikające z oszacowanej funkcji granicznej. W rezultacie efektywność techniczna (TE) musi być obcięta, tj.

$$TE_i = \min\{1, y_i/[Mf(\mathbf{x}_i;\mathbf{b})]\} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

aby zapewnić oczywisty warunek $0 < TE_i \leq 1$.

Jak łatwo zauważyć, w opisanych metodach w pierwszym kroku wszyscy badani producenci są traktowani jednakowo. Natomiast w kroku drugim, o przeskalowaniu funkcji $f(\mathbf{x};\mathbf{b})$ w metodzie COLS decyduje zwykle tylko jeden producent najefektywniejszy, a metodzie MOLS wszyscy producenci, w tym również ci osiągający wyniki najslabsze. Własności tych nie można zaliczyć do zalet przedstawionych metod i stąd uzasadnione jest poszukiwanie innych rozwiązań.

Nowe podejście zostało zaproponowane przez Arnolda, Bardhana, Coopera i Kumbhakara [1996]. Jest to podejście również realizowane w dwóch krokach. W kroku pierwszym wyznaczany jest podzbiór jednostek (producentów) najefektywniejszych za pomocą jednego wybranego wariantu podejścia nieparametrycznego, w którym wykorzystywane są zasady programowania matematycznego [patrz Thanassoulis, Portela i Despić 2008; Førsund i Sarafoglou 2002]. Metody te, zainicjowane przez Farrella [1957], były następnie twórczo rozwinięte przez Charnesa, Coopera i Rhodesa [1978] i są oznaczane wspólnym akronimem DEA (*Data Envelopment Analysis*). Wariant zadania programowania matematycznego zapewniający maksymalizację skalarnego wyniku produkcyjnego przy założeniu zmiennego zwrotu ze skali (VRS – *Variable Return to Scale*) jest postaci

$$\max_{\beta, \lambda} \beta; \quad \text{pod warunkiem: } \mathbf{y}^T \boldsymbol{\lambda} \geq \beta y_i, \quad \mathbf{x}_i \geq \mathbf{X} \boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0},$$

gdzie \mathbf{x}_i reprezentuje wektor nakładów, a y_i wynik i -tego producenta, natomiast \mathbf{X} i \mathbf{y} są odpowiednio macierzą nakładów i wektorem wyników wszystkich producentów w próbie. Oszacowana efektywność i -tego producenta jest wtedy równa odwrotności uzyskanej wartości zmiennej skalarnej β , tj. $TE_O(i) = 1/\beta$.

W kroku drugim metody kombinowanej, estymowane są parametry granicznej funkcji produkcji z wykorzystaniem analizy regresji (AR), w oparciu o model w którym dodatkowo wprowadzone są zmienne pozorne odróżniające jednostki najefektywniejsze od wszystkich pozostałych. W rezultacie otrzymuje się tu dwie funkcje produkcji. Jedna dotyczy jednostek najefektywniejszych, a druga jednostek pozostałych.

Obydwie tak uzyskane funkcje określają wartości przeciętne wyników, a nie wartości maksymalne. Oznacza to konieczność dodatkowej modyfikacji tak, aby

uzyskać oszacowanie funkcji granicznej. Możliwe rozwiązania prowadzą się do przeskalowania funkcji produkcji dla jednostek najefektywniejszych zgodnie z koncepcją metody COLS lub MOLS, przy czym w obu przypadkach współczynnik skali funkcji $f(\mathbf{x})$ powinien być skorygowany w oparciu o reszty dotyczące tylko jednostek najefektywniejszych, wyróżnionych zgodnie z metodą DEA.

DANE

Dla ilustracji przedstawionych metod posłużymy się wynikami produkcji rolniczej na poziomie regionalnym w Unii Europejskiej, które udostępnia system FADN. W analizie uwzględnione zostały dwa podstawowe czynniki produkcji, tj. praca i kapitał, oraz jedna zmienna wynikowa reprezentująca wartość produkcji rolniczej, wszystkie wielkości uzyskane w roku 2005 przez przeciętne gospodarstwa reprezentujące poszczególne regiony UE. Nakłady pracy (w metodyce FADN oznaczone symbolem SE011) zostały wyrażone liczbą roboczo-godzin, a kapitał – różnicą pomiędzy wartością całkowitą nakładów (SE270) i wartością wynagrodzeń (SE360). Wyniki produkcji rolniczej wyrażono natomiast ich wartością łączną (SE131). Zmienna ta jest sumą wartości produkcji roślinnej i zwierzęcej oraz innych związanych z pozostałymi formami rolniczej działalności produkcyjnej z wyłączeniem jednakże dochodów wynikających z wszelkiego rodzaju dopłat.

Wymienione wskaźniki ekonomiczne odnotowano łącznie dla 122 regionów reprezentujących Francję (22 regiony), Niemcy (14), Włochy (21), Hiszpanię (17), Wielką Brytanię (6), Irlandię (1), Belgię (2), Luksemburg (1), Holandię (1), Danię (1), Grecję (4), Portugalię (5), Szwecję (3), Finlandię (4), Austrię (1), Słowenię (1), Węgry (7), Czechy (1), Słowację (1), Polskę (4), Estonię (1), Łotwę (1), Litwę (1), Maltę (1) i Cypr (1).

GRANICZNA FUNKCJA PRODUKCJI ROLNICZEJ W UE

Estymację granicznej funkcji produkcji przeprowadzono metodą regresji dokonując następnie korekty wynikającej z podejścia COLS i MOLS oraz metodą kombinowaną oznaczoną dalej symbolem DEA+AR. We wszystkich metodach związek wielkości produkcji z nakładami modelowano standardowo za pomocą funkcji Cobba-Douglasa. W pierwszym kroku metody kombinowanej DEA+AR estymowano efektywność techniczną zorientowaną na maksymalizację wielkości produkcji przy stałych nakładach i założeniu zmiennego zwrotu ze skali.

Tabela 1. Oceny parametrów funkcji Cooba-Douglasa dla produkcji rolniczej w UE

Metoda	Mnożnik korekty	Współczynnik skali	Elastyczność			R^2
			pracy	kapitału	skali	
AR	1,710 ^C 1,246 ^M	5,049	0,165 (0,054)	0,751 (0,024)	0,916	0,938
DEA+AR		4,568	0,137 (0,053)	0,778 (0,024)	0,915	0,951
DEA+AR	1,541 ^C 1,219 ^M	7,437	0,198 (0,011)	0,714 (0,026)	0,912	0,951

Źródło: obliczenia własne

Uzyskane wyniki przedstawiono w tabeli 1, przy czym w nawiasach podano odchylenia standardowe, które w przypadku podejścia DEA+AR zostały oszacowane wg aproksymacji zaproponowanej przez Thaila [1971]. W kolumnie trzeciej, czwartej i piątej podano parametry trzech funkcji Cobba-Douglasa. Pierwsza z nich została wyznaczona metodą AR i określa poziom przeciętny produkcji wszystkich 122 badanych jednostek. Pozostałe dwie funkcje wyznaczono metodą kombinowaną, w której wyróżniono 14 jednostek najefektywniejszych w wyniku zastosowania analizy DEA. Funkcja druga określa przeciętny poziom produkcji 108 jednostek mniej efektywnych, a funkcja trzecia – jednostek najefektywniejszych.

We wszystkich tych funkcjach elastyczności skali mają porównywalne wartości i są mniejsze od jedności, co potwierdza wklęsłość funkcji produkcji. Oznacza to, że wraz z proporcjonalnym wzrostem nakładów wielkość produkcji rośnie, ale wolniej. Ponadto należy zwrócić uwagę, że elastyczność kapitału jest kilkakrotnie razy większa od elastyczności pracy, co oznacza, że zwiększanie kapitału prowadzi do znacznie szybszego wzrostu produkcji niż zwiększanie zatrudnienia. Warto wreszcie odnotować, że funkcję produkcji jednostek wyróżnionych jako najefektywniejsze charakteryzuje wyraźnie większa elastyczność pracy, szczególnie w porównaniu z grupą jednostek mniej efektywnych.

W drugiej kolumnie tabeli 1 podano mnożniki korekcyjne wynikające z metody COLS i MOLS. Jak łatwo zauważyć, mnożniki te zwiększają w różnym stopniu ocenione w pierwszym kroku współczynniki skali zwane też parametrami efektywności [Welfe i Welfe, 2004]. Wartość największą poprawionego parametru efektywności w przeprowadzonej analizie uzyskano dla metody DEA+AR z korektą wynikającą z metody COLS, a wartość najmniejszą dla metody MOLS.

W rezultacie mamy tu propozycje czterech funkcji granicznych różniących się parametrami i powstaje problem wskazania jednej, tej najbardziej obiektywnej. Jeżeli interesująca jest ocena technologii produkcji ważne są przede wszystkim współczynniki elastyczności. Jeżeli jednak interesujące są oceny technicznej

efektywności wszystkich jednostek, znaczenie mają wszystkie parametry. Ponieważ efektywności można również uzyskać z analizy nieparametrycznej DEA, więc naturalnym jest preferowanie podejścia dającego większą zgodność ocen. Taki efekt w oczywisty sposób zapewnia podejście kombinowane. Wyboru pomiędzy korektą wynikającą z metody COLS lub MOLS można natomiast dokonać na podstawie wybranej miary określającej zgodność ocen efektywności. Miarą taką może być na przykład dowolna odległość, ale też współczynnik korelacji Pearsona lub Spearmana. Wartości tych pierwszych dla ocen efektywności uzyskanych w oparciu o wszystkie rozważane tu metody przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Współczynniki korelacji Pearsona pomiędzy ocenami efektywności technicznej produkcji rolniczej uzyskane pięcioma metodami

Metoda	DEA(VRS)	COLS	MOLS	DEA+AR ^C	DEA+AR ^M
DEA(VRS)	1,0000	*	*	*	*
COLS	0,8396	1,0000	*	*	*
MOLS	0,8574	0,9551	1,0000	*	*
DEA+AR ^C	0,8681	0,9875	0,9648	1,0000	*
DEA+AR ^M	0,8695	0,9866	0,9670	0,9998	1,0000

Źródło: obliczenia własne

W analizowanym przykładzie porównanie współczynników korelacji pomiędzy ocenami efektywności wynikającymi z metody DEA(VRS) oraz metod kombinowanych DEA+AR^C i DEA+AR^M wskazuje z jednej strony na dużą zbieżność wyników szacowania technicznej efektywności w oparciu o oba podejścia kombinowane, a z drugiej na pewną przewagę tej ostatniej.

OCENA EFEKTYWNOŚCI TECHNICZNEJ PRODUKCJI ROLNICZEJ

Chociaż wyznaczona w poprzedniej sekcji graniczna funkcja produkcji pozwala ocenić techniczne efektywności produkcji rolniczej wszystkich 122 regionów UE w roku 2005, to w tabeli 3 zestawiono oceny efektywności na poziomie krajowym, to znaczy, że dla krajów obejmujących co najmniej dwa regiony podane są wartości średnie z ocen efektywności dla poszczególnych regionów. Efektywności oceniano metodą DEA zorientowaną na maksymalizację wielkości produkcji przy stałych nakładach i założeniu zmiennego zwrotu ze skali oraz metodą kombinowaną łączącą podejście DEA z analizą regresji opartą na funkcji Cobba-Douglasa (porównaj wzór (3)). Uzyskane rezultaty zestawiono w tabeli 3.

Jak łatwo zauważyć efektywności uzyskane w podejściu nieparametrycznym są wyższe niż te ocenione według metody kombinowanej. W rezultacie, według metody DEA+AR^M żaden kraj nie osiągnął efektywności maksymalnej, ale w obu

podejściach rolnictwo Holandii i Danii zajmuje pozycję czołową. Natomiast efektywność najniższą w obu podejściach uzyskała Słowenia (tylko ok. 38% efektywności maksymalnej w metodzie nieparametrycznej i w metodzie kombinowanej).

Tabela 3. Oceny efektywności technicznej produkcji rolniczej w UE

DEA		DEA+AR ^M	
Kraj (liczba regionów)	TE	Kraj (liczba regionów)	TE
Holandia (1)	1	Holandia (1)	0,867
Dania (1)	1	Dania (1)	0,799
Czechy (1)	0,894	Hiszpania (17)	0,756
Słowacja (1)	0,876	Belgia (2)	0,753
Belgia (2)	0,853	Włochy (21)	0,726
Niemcy (14)	0,845	Niemcy (14)	0,710
Hiszpania (17)	0,834	Francja (22)	0,679
Włochy (21)	0,828	Wielka Brytania (6)	0,646
Francja (22)	0,799	Grecja (4)	0,629
Wielka Brytania (6)	0,742	Luksemburg (1)	0,621
Grecja (4)	0,700	Czechy (1)	0,615
Estonia (1)	0,665	Szwecja (3)	0,583
Szwecja (3)	0,660	Malta (1)	0,556
Luksemburg (1)	0,650	Austria (1)	0,548
Malta (1)	0,646	Słowacja (1)	0,544
Austria (1)	0,632	Węgry (7)	0,524
Węgry (7)	0,614	Estonia (1)	0,521
Portugalia (5)	0,608	Irlandia (1)	0,493
Cypr (1)	0,605	Portugalia (5)	0,464
Irlandia (1)	0,595	Litwa (1)	0,462
Łotwa (1)	0,505	Polska (4)	0,457
Litwa (1)	0,498	Łotwa (1)	0,434
Finlandia (4)	0,486	Finlandia (4)	0,432
Polska (4)	0,478	Cypr (1)	0,430
Słowenia (1)	0,380	Słowenia (1)	0,375

Źródło: obliczenia własne

Porównując oba uzyskane rankingi można również zauważyć, że wśród państw rolniczo najefektywniejszych znalazło się pięć państw, które podpisały Traktaty Rzymskie i tym samym najdłużej funkcjonują w ramach wspólnie

prowadzonej polityki rolnej. Wyjątek stanowią tu Czechy i Słowacja, które w rankingu według metody DEA uplasowały się na trzeciej i czwartej pozycji osiągając blisko 90% efektywności maksymalnej jaką można było osiągnąć w roku 2005. Rolnictwo w obu tych krajach uznawane jest za wielkoobszarowe, a jak wynika z metody DEA ich efektywność została wyznaczona w oparciu o porównanie wyników z osiągnięciami przeciętnych gospodarstw funkcjonujących w niemieckiej Turyngii i francuskiej Szampanii. Uzyskanym ocenom efektywności dla rolnictwa Czech i Słowacji w metodzie DEA towarzyszą jednak duże wartości wskaźników osłabiających nakłady (tzw. *input slaks*), zgodnie z którymi wykazane wyniki produkcyjne w obu tych krajach byłyby możliwe do osiągnięcia przy ograniczeniu zaangażowania siły roboczej o 70% w Słowacji i 63% w Czechach. W rezultacie oznacza to, że oceny efektywności dla tych krajów w metodzie DEA zostały znacznie zawyżone. Warto również zaznaczyć, że wskaźniki osłabiające w metodzie DEA towarzyszyły również innym regionom, ale w żadnym innym przypadku nie redukowały nakładów w tak dużym zakresie. Fakty te powodują, że do ocen efektywności wynikających bezpośrednio z metody DEA nie należy podchodzić bezkrytycznie, ale z uwzględnieniem informacji dodatkowych. Od tej wady wolne jest podejście kombinowane, bo ocena efektywności wyznaczana jest tu w oparciu o graniczną funkcję produkcji, która tylko częściowo wykorzystuje wyniki metody DEA.

PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono cztery propozycje oszacowania granicznej funkcji produkcji. Są to metody: MOLS, COLS, DEA+AR^C, DEA+AR^M. Dwie pierwsze polegają na prostych modyfikacjach funkcji produkcji wstępnie oszacowanej metodą regresji. Natomiast dwie ostatnie reprezentują podejście kombinowane, w którym wyniki analizy nieparametrycznej DEA są następnie wykorzystywane w analizie regresji.

Działanie wymienionych wyżej metod pokazano na przykładzie obejmującym wyniki produkcji rolniczej uzyskane w roku 2005 przez przeciętne gospodarstwa reprezentujące 122 regiony UE. W analizie uwzględniono dwa podstawowe czynniki produkcji, tj. pracę i kapitał, oraz jedną zmienną wynikową reprezentowaną przez łączną wartość produkcji rolniczej.

Wybór najlepszego podejścia oparto na ocenie zgodności uzyskanych oszacowań efektywności produkcji. Za miarę zgodności oszacowań przyjęto współczynnik korelacji Pearsona. Chociaż przy takim założeniu naturalną przewagę uzyskują podejścia kombinowane, to jednak wybór pomiędzy metodami DEA+AR^C, DEA+AR^M nie jest oczywisty. Analiza współczynników korelacji w analizowanym przykładzie wskazała na pewną przewagę metody DEA+AR^M nad metodami pozostałymi.

Wyniki uzyskane w analizowanym przykładzie pozwalają także wyprowadzić pewne wnioski ekonomiczne. W każdym otrzymanym oszacowaniu

funkcji produkcji elastyczność kapitału jest ponad cztery i półkrotnie wyższa niż elastyczność siły roboczej, a elastyczność skali jest nieco mniejsza od jedności. Ponadto, graniczną funkcję produkcji oszacowaną głównie na podstawie regionów/gospodarstw najefektywniejszych charakteryzuje większa elastyczność pracy niż funkcji produkcji dla regionów/gospodarstw mniej efektywnych.

Na podstawie ocen efektywności uzyskanych dla poszczególnych regionów, a wyznaczonych metodą nieparametryczną DEA i metodą kombinowaną DEA+AR^M, oceniono również efektywność produkcji rolniczej na poziomie krajowym. Dwa w ten sposób uzyskane rankingi dwudziestu pięciu krajów członkowskich UE okazały się tylko częściowo zgodne, ale dla dwunastu państw rangi były nadawane w oparciu o efektywności przeciętne (wyznaczone w oparciu o wartości efektywności dla kilku regionów). Próbę wyjaśnienia przyczyn największych różnic, dotyczących Czech i Słowacji, podjęto na podstawie analizy dodatkowych informacji dostarczanych przez metodę DEA. W świetle przedstawionych uwag, wydaje się, że oceny efektywności wynikające z metody kombinowanej DEA+AR^M, a w konsekwencji również i uzyskany ranking krajów, są bliższe stanowi faktycznemu.

LITERATURA

- Aigner D. J., Chu S. F. (1968) On estimating the industry production function, *American Economic Review*, 58, 226-239.
- Afriat S. (1972) Efficiency estimation of production function, *International Economic Review*, 13(3), 568-598.
- Arnold V. L., Bardham I. R., Cooper W. W., Kumbhakar S. C. (1996) New uses of DEA and statistical regression for efficiency evaluation and estimation – with an illustrative application to public secondary schools in Texas, *Annals of Operations Research*, 66, 225-277.
- Charnes A., Cooper W. W., Rhodes E. (1978) Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444.
- Farrell M. J. (1957) The measurement of productive efficiency of production, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 120(III), 253-281.
- Førsund F. R., Sarafoglou N. (2002) On the origins of data envelopment analysis, *Journal of Productivity Analysis*, 17, 23-40.
- Greene W. H. (2008) The econometric approach to efficiency analysis. In *The Measurement of Productive Efficiency and Productive Growth*, Fried H., Lovell K. Schmidt S., eds., Oxford University Press, Oxford New York.
- Thanassoulis E., Portela M., Despić O. (2008) Data envelopment analysis: the mathematical programming approach to efficiency analysis. In *The Measurement of Productive Efficiency and Productive Growth*, Fried H., Lovell K. Schmidt S., eds., Oxford University Press, Oxford, New York.
- Theil H. (1979) *Zasady ekonometrii*, PWN, Warszawa.
- Timmer P. (1971) Using a probabilistic frontier production function to measure technical efficiency, *Journal of Political Economy*, 79, 776-794.
- Welfe W., Welfe A. (2004) *Ekonometria stosowana*, PWN, Warszawa.

The combined estimation of the frontier production function

Abstract: In the study the combined method of estimation of the frontier production function has been presented. In that solution a standard parametric approaches based on regression analysis and non-parametric approaches connected with mathematical programming techniques were used. Additional remarks specifying the practical using of this method were also supplemented. Using of the method was illustrated on the example of agriculture of individual European Union regions. In that study differences in the effectiveness of agricultural production between various members of EU were also shown.

Key words: DEA, regression analysis, frontier production function, agriculture, EU