

MODELE AUTOREGRESYJNE W PROGNOZOWANIU CEN ZBÓŻ W POLSCE

Agnieszka Tłuczak

Zakład Ekonometrii i Metod Ilościowych, Wydział Ekonomiczny UO
e-mail: atluczak@uni.opole.pl

Streszczenie: Prognozowanie cen rolnych odgrywa dużą rolę we wspomaganie decyzji produkcyjnych w gospodarstwach rolnych. Poprawne prognozowanie cen pozwala na ograniczenie ryzyka związanego z prowadzeniem działalności gospodarczej. W opracowaniu zastosowano modele autoregresyjne, za pomocą których wyznaczono prognozy cen podstawowych zbóż w skupie na 2010 rok. Do oceny modeli oraz prognoz wykorzystano współczynnik determinacji oraz średnie błędy ex post prognoz wygasłych.

Słowa kluczowe: ceny zbóż, modele autoregresyjne, prognozowanie

WPROWADZENIE

W rolnictwie obserwuje się wahania zjawisk gospodarczych, powodowane różnymi czynnikami. Produkcja rolnicza w dużej mierze zdeterminowana jest warunkami biologiczno – technicznymi oraz klimatycznymi. Zmiany te powtarzają się w określonych porach roku i powodują sezonowość produkcji rolnej. Sezonowość ta ma wpływ na wiele sfer rynku rolnego, między innymi na dochody rolników oraz nakłady na produkcję. Analiza kształtowania się cen rolnych w czasie, umiejętnie ich przewidywanie umożliwia podejmowanie skutecznych decyzji gospodarczych. W literaturze przedstawione jest wiele metod matematyczno – statystycznych, które pozwalają na analizę i prognozowanie szeregów czasowych. W niniejszym opracowaniu autorka wykaże, iż efektywnym narzędziem prognozowania cen zbóż są modele autoregresyjne.

MODELE AUTOREGRESYJNE

Modele autoregresji wywodzą się z szerszej klasy modeli regresji i znajdują szerokie zastosowanie w analizie i prognozowaniu procesów gospodarczych. W modelach tych wartość bieżąca zmiennej jest wyrażona jako skończona kombinacja jej wartości przeszłych. Mogą być stosowane do modelowania stacjonarnych szeregów czasowych bądź szeregów czasowych sprowadzalnych do stacjonarnych.

Do zapisu postaci modelu autoregresyjnego używa się zwyczajowo notacji określającej rząd poszczególnych składowych modelu: autoregresji - p , różnicowania - d . Ogólnie, postać modelu $AR(p)$ jest następująca:

$$y_t = \varphi_0 + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + e_t \quad (1)$$

gdzie:

$y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-p}$ – wartość zmiennej prognozowanej w momencie lub okresie $t, t-1, \dots, t-p$,

e_t – błąd (reszta) modelu dla momentu lub okresu t ,

$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{t-p}$ – parametry modelu,

p – rząd opóźnienia.

Proces budowy modeli autoregresyjnych przebiega zazwyczaj w czterech etapach polegających na identyfikacji, estymacji, weryfikacji i prognozowaniu. W pierwszym etapie badamy czy szereg czasowy jest stacjonarny¹. W przypadku niestacjonarności, w celu stabilizacji szeregu czasowego należy wykonać operację różnicowania, która polega na d -krotnym obliczeniu różnic sąsiednich wyrazów szeregu. Parametr d ustala się na takim poziomie, aby otrzymany w wyniku tej operacji szereg czasowy różnic był stacjonarny. Kolejny etap to ustalenie rzędu autokorelacji, na podstawie funkcji autokorelacji (ACF) oraz autokorelacji cząstkowej (PACF). W celu jednoznacznego ustalenia rzędu opóźnień zastosowano test Quenouille'a, za pomocą którego bada się istotność współczynnika autokorelacji cząstkowej². Na etapie weryfikacji sprawdza się własności reszt modelu, które powinny mieć własności białego szumu. Oznacza to tyle, że współczynniki autokorelacji reszt nie powinny różnić się istotnie od zera. Analizie poddaje się wykresy funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej dla reszt modelu³. Weryfikacja modelu powinna także obejmować badanie istotności parametrów modelu. Jeżeli model nie zostanie zweryfikowany pozytywnie należy

¹ Najczęściej stosowanym narzędziem do identyfikacji stacjonarności szeregu czasowego jest rozszerzony test Dickeya-Fullera (ADF – Augmented Dickey Fuller Test). Szczegółowy opis metodologii zastosowania rozszerzonego testu Dickey'a-Fullera można znaleźć w: M. Koško, M. Osińska, J. Stempińska, *Ekonometria współczesna*, Dom Organizatora, Toruń 2007., s. 307-308.

² Szczegółowo test Quenouille'a opisano w: M. Koško, M. Osińska, J. Stempińska, *Ekonometria współczesna*, Dom Organizatora, Toruń 2007., s. 282.

³ Analiza wizualna wykresów funkcji ACF oraz PACF dla szeregu reszt modelu powinna być uzupełniona testem Ljunga-Boxa. Test ten został opisany w: M. Koško, M. Osińska, J. Stempińska, *Ekonometria współczesna*, Dom Organizatora, Toruń 2007., s.132.

wrócić do etapu pierwszego i ponownie przeprowadzić identyfikację. Pozytywnie zweryfikowany model wykorzystuje się do sporządzenia prognozy [Dudek 2005, Witkowska 2008].

MIARY DOKŁADNOŚCI PROGNOZ

Jakość predykcji związana jest z trafnością prognozy określonej na podstawie błędów *ex post* oraz błędów *ex ante*. W niniejszej pracy w celu oceny dopuszczalności prognoz autorka stosuje błędy *ex post*. Celem tych mierników jest syntetyczny opis empirycznego rozkładu odchyleń realizacji zmiennej prognozowanej od ustalonego poziomu prognozy, jaki osiągnięto w przeszłości. Do pomiaru jakości prognoz zastosowano następujące mierniki: obciążenie predykcji (u), odchylenie standardowe błędów prognozy (S_p), względny błąd predykcji (w^*) oraz współczynnik Theila (I^2):

$$u = \frac{1}{m} \sum_{t \in I_p} (y_t - y_t^*) \quad (2)$$

$$w^* = \frac{S_p}{\bar{y}_{t \in I_p}} \quad (3)$$

$$S_p = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{t \in I_p} (y_t - y_t^*)^2} \quad (4)$$

$$I^2 = \frac{m S_p^2}{\sum_{t \in I_p} y_t^2} \quad (5)$$

gdzie: I_p – okres empirycznej weryfikacji prognoz.

Mierniki te pozwalają rozstrzygnąć o dopuszczalności prognoz oraz o wielkości odchyleń realizacji zmiennej prognozowanej od sformułowanych prognoz [Zeliaś 1995].

MODELE AUTOREGRESYJNE ORAZ PROGNOZY CEN NA RYNKU ZBÓŻ

W opracowaniu zbadano kształtowanie się cen w skupie podstawowych gatunków zbóż w Polsce, pszenicy oraz żyta, w okresie od stycznia 1996 do grudnia 2009. Dane miesięczne o cenach skupu zbóż zaczerpnięto z Biuletynów Statystycznych Głównego Urzędu Statystycznego.

Szeregi cen są często procesami niestacjonarnymi, zatem przed przystąpieniem do szacowania parametrów modeli autoregresyjnych należy sprawdzić, czy analizowane szeregi czasowe są szeregami stacjonarnymi. Na

podstawie otrzymanych wartości statystyki ADF (tab. 1) oraz odpowiadających im empirycznych poziomów istotności (ang. *p-value*) porównywanych z poziomem istotności $\alpha=0,05$, dla zmiennych *cena_pszenicy* oraz *cena_żyta* odrzucono hipotezy zerowe o istnieniu pierwiastka jednostkowego. Obie zmienne są stacjonarne.

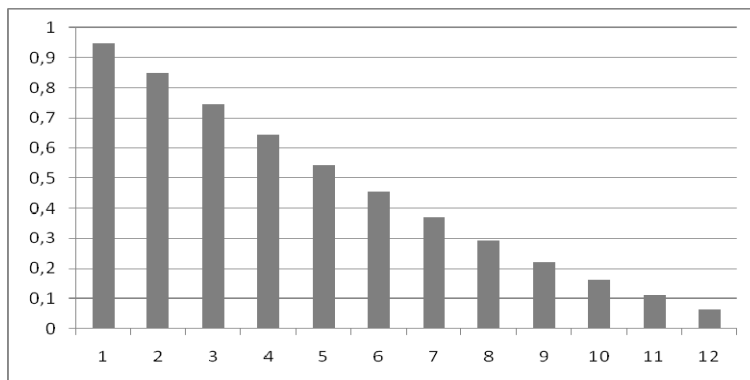
Tabela 1. Wyniki rozszerzonego testu Dickey'a-Fuller'a

Zmienna	Wartość statystyki ADF	<i>p-value</i>
Cena_pszenicy	-3,672	0,004
Cena_żyta	-3,831	0,002

Źródło: opracowanie własne

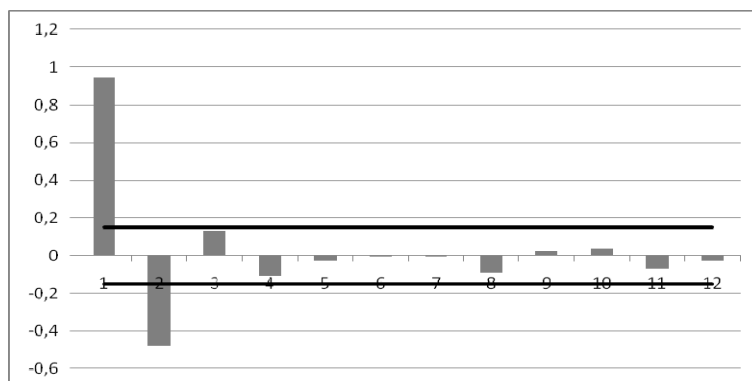
Kolejnym krokiem po zbadaniu stacjonarności w budowie modeli autoregresyjnych jest ustalenie rzędu opóźnień. Wykorzystuje się w tym celu funkcję autokorelacji ACF oraz funkcję autokorelacji cząstkowej PACF. Analizę wykresów uzupełniono testem Quenouille'a. W teście tym wartości funkcji autokorelacji cząstkowej porównuje się z wartością krytyczną. Na rysunkach 1-4 przedstawiono wykresy funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej dla poszczególnych zmiennych. Dodatkowo na wykresach funkcji PACF zaznaczono wartości krytyczne dla testu Quenouille'a.

Rysunek 1. Wykres funkcji autokorelacji dla zmiennej *cena_pszenicy* (ACF)



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 2. Wykres funkcji autokorelacji cząstkowej dla zmiennej cena_pszenicy (PACF)



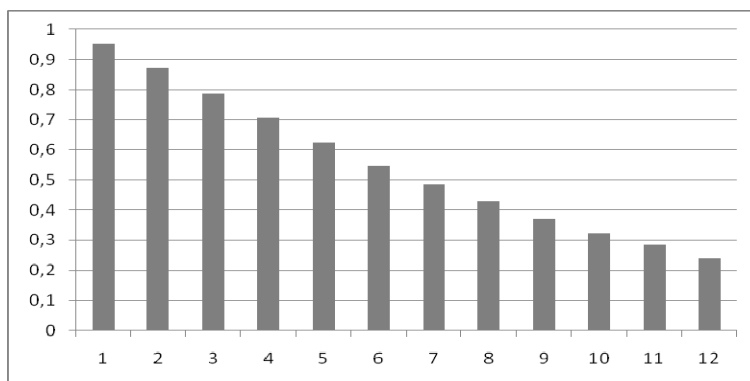
Źródło: opracowanie własne

Na podstawie wartości funkcji autokorelacji cząstkowej oraz wartości krytycznej statystyki w teście Quenouille'a dla obu zmiennych ustalono następujące drugi rząd opóźnień. Ze względu na stacjonarność zmiennych oraz rząd opóźnień dalszej analizie będą poddawane następujące modele: cena_pszenicy – AR(2); cena_żyta – AR(2).

Oceny parametrów oraz błędy szacunku dla poszczególnych zmiennych przedstawione są w tabelach 2 i 3. Podane w tabelach wartości statystyki t wskazują, że parametry modeli istotnie różnią się od zera.

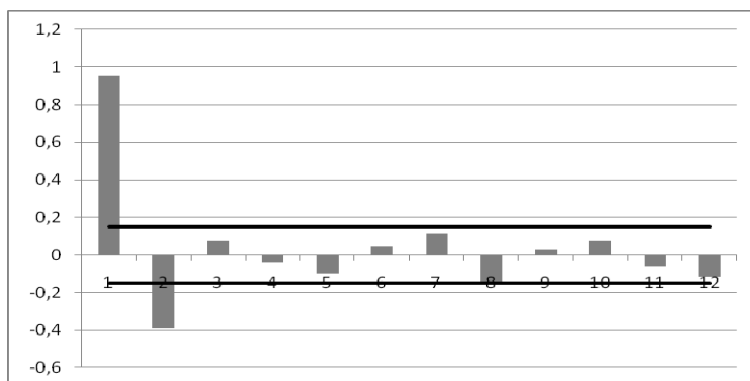
W celu weryfikacji własności reszt modeli przeanalizowano wykresy funkcji autokorelacji (ACF) oraz autokorelacji cząstkowej (PACF) reszt. Wskazują one na brak autokorelacji reszt. W praktyce na wykresach autokorelacji i autokorelacji cząstkowej zaznacza się granice wyznaczone przez podwojone wartości błędów standardowych odpowiednio funkcji ACF i PACF, za wartości różne od zera uznawane są te współczynniki, które przekraczają zaznaczone granice [Dudek 2005]. Na rysunkach 5-8 żadna z wartości współczynników autokorelacji nie wykracza poza zaznaczone linie.

Rysunek 3. Wykres funkcji autokorelacji dla zmiennej cena_żyta (ACF)



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 4. Wykres funkcji autokorelacji cząstkowej dla zmiennej cena_żyta (PACF)



Źródło: opracowanie własne

Tabela 2. Wyniki estymacji modelu AR(2) dla zmiennej cena_pszenicy

Parametr	Ocena parametru	Standardowy błąd szacunku	Wartość statystyki t
φ_1	1,404	0,067	20,976
φ_2	-0,484	0,067	-7,232

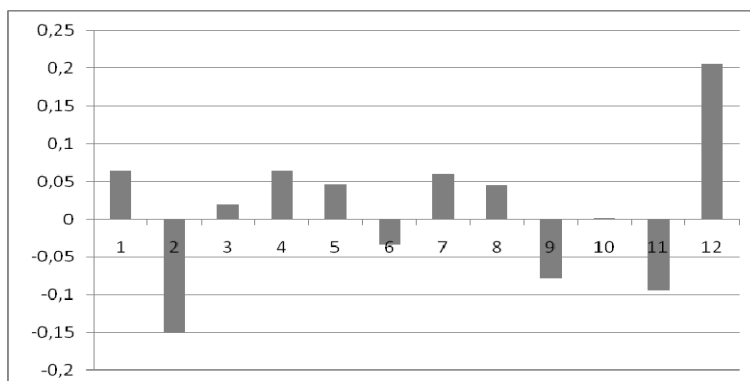
Źródło: obliczenia własne

Tabela 3. Wyniki estymacji modelu AR(2) dla zmiennej cena_żyta

Parametr	Ocena parametru	Standardowy błąd szacunku	Wartość statystyki t
φ_1	1,369	0,069	19,832
φ_2	-0,430	0,693	-0,621

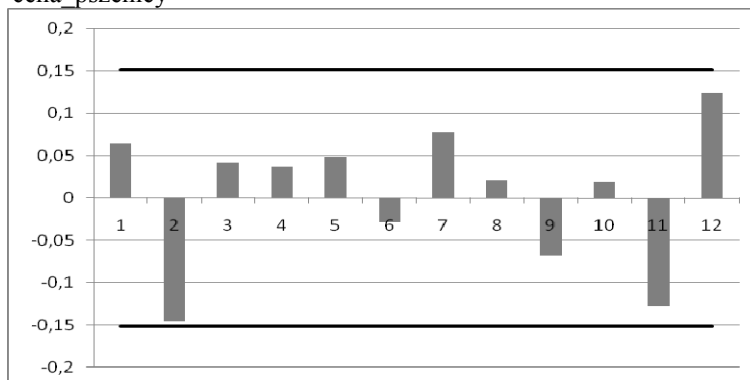
Źródło: obliczenia własne

Rysunek 5. Wykres funkcji autokorelacji reszt modelu AR(2) dla zmiennej cena_pszeniczy



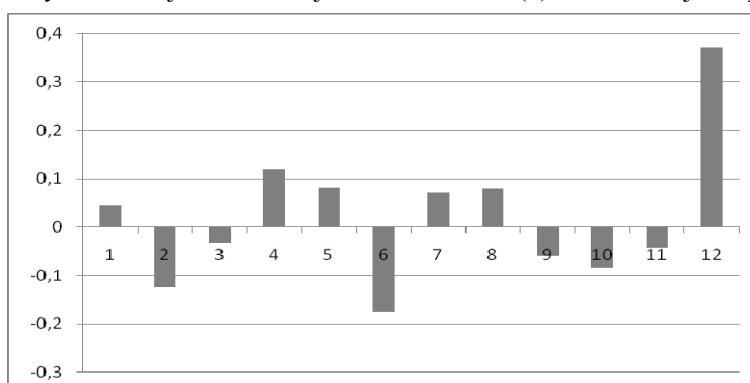
Źródło: opracowanie własne

Rysunek 6. Wykres funkcji autokorelacji cząstkowej reszt modelu AR(2) dla zmiennej cena_pszeniczy



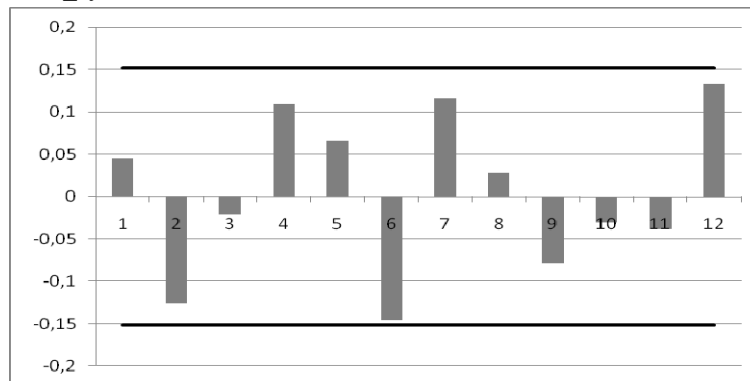
Źródło: opracowanie własne

Rysunek 7. Wykres funkcji autokorelacji reszt modelu AR(2) dla zmiennej cena_żyta



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 8. Wykres funkcji autokorelacji cząstkowej reszt modelu AR(2) dla zmiennej cena_żyta



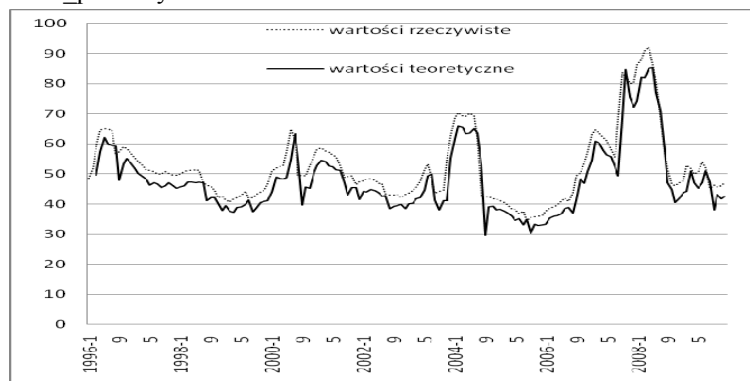
Źródło: opracowanie własne

Ostatecznie modele przeszły pozytywnie etap weryfikacji. Mogą być zatem wykorzystane do celów prognostycznych. Na rysunkach 9 i 10 zaprezentowano wartości rzeczywiste oraz wartości teoretyczne wyznaczone na podstawie oszacowanych modeli. Wykresy wskazują na dobre dopasowanie modeli do danych empirycznych, potwierdzają to również wartości współczynników determinacji, które wynoszą odpowiednio 0,79 dla modelu AR(2) dla zmiennej cena_pszonicy oraz 0,88 dla modelu AR(2) dla zmiennej cena_żyta.

Na podstawie oszacowanych modeli wyznaczono prognozy cen zbóż na 2010 rok, tabela 4.

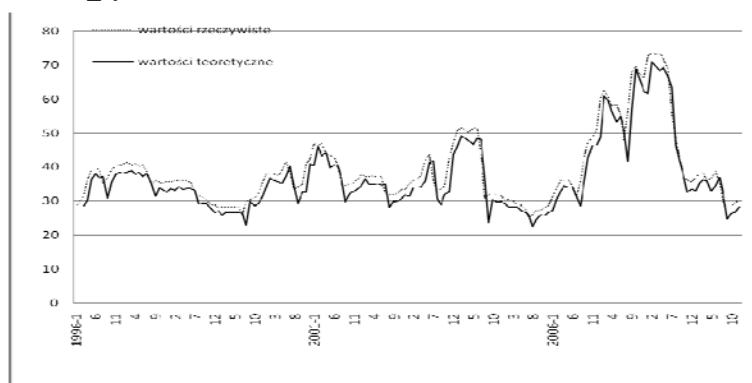
W celu określenia jakości prognoz obliczono odchylenie standardowe błędów prognozy (S_p), względny błąd predykcji (w^*), obciążenie predykcji (u) oraz współczynnik Theila (I^2). Wyniki dla poszczególnych modeli przedstawia tabela 5.

Rysunek 9. Dopasowanie modelu AR(2) do danych empirycznych dla zmiennej cena_pszonicy



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 10. Dopasowanie modelu AR(2,2) do danych empirycznych dla zmiennej cena_żyta



Źródło: opracowanie własne

Tabela 4. Prognozy cen zbóż na 2010 rok

	I	II	III	IV	V	VI
Cena pszenicy	48,05	48,79	49,38	49,86	50,24	50,54
Cena żyta	30,84	31,61	32,36	33,06	33,69	34,26
	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Cena pszenicy	50,79	50,98	51,14	51,27	51,36	51,44
Cena żyta	34,76	35,20	35,59	35,93	36,23	36,50

Źródło: obliczenia własne

Porównując wartości poszczególnych miar dla kolejnych produktów rolnych można stwierdzić, że:

1. prognozowane ceny pszenicy oraz żyta były niższe od rzeczywistych (dodatnia wartość parametru u), realizacje cen prognozowanych różniły się od rzeczywistych średnio o 6,61 zł/100 kg dla pszenicy i 4,38 zł/100 kg dla żyta, wyliczone według każdego modelu prognozy można uznać za dopuszczalne ponieważ względny błąd prognozy przyjmuje wartości poniżej 10%;
2. bliskie zeru wartości współczynnika Theila (I^2) dla każdego modelu i każdego gatunku zbóż pozwalają na uznanie prognoz za bardzo dokładne. Pierwiastek kwadratowy ze współczynnika Theila (I), informujący o przeciętnym względnym błędzie predykcji, jest podstawą do wniosku, że prognozy oparte na modelach autoregresyjnych mogą być uznane za dokładne.

Tabela 5. Mierniki jakości prognoz

	u	S_p	w^*	I^2	I
AR(2) cena pszenicy	4,426	6,615	9,2%	0,015	0,124
AR(2) cena żyta	2,603	4,387	6,9%	0,012	0,107

Źródło: obliczenia własne

PODSUMOWANIE

Zaprezentowane w opracowaniu modele autoregresyjne są dobrym narzędziem krótkookresowego prognozowania cen produktów rolnych w Polsce, a w szczególności cen zbóż. Oszacowane modele posłużyły do wyznaczenia prognoz cen na poszczególne miesiące 2010 roku. Prognozy te utrzymują się w długookresowej tendencji. Jakość prognoz oceniona na podstawie błędów prognoz *ex post* oceniona została jako satysfakcjonująca. Uzyskane prognozy nie mogą być uznane za całkowicie nieobciążone, wartość parametru u różniła się od zera. Można jednak uznać, że stosowanie modeli autoregresyjnych do opisu kształtowania się miesięcznych cen zbóż w skupie jest zasadne, a uzyskane prognozy charakteryzują się umiarkowaną dokładnością.

LITERATURA

- Dudek H. [2005], Prognozowanie cen skupu mięsa drobiowego za pomocą sezonowego modelu ARIMA, w: Roczniki Naukowe SERiA, t.VII, zeszyt 5, http://www.seria.home.pl/2005_zeszyt5/dudek.pdf, [data odczytu 14.05.2010].
- Hamulczyk M. [2006], Wykorzystanie modeli ARIMA w prognozowaniu cen wieprzowiny, Roczniki Naukowe SERiA, t.VIII, zeszyt 5, http://www.seria.home.pl/2006_zeszyt5/hamulczuk.pdf, [data odczytu 14.05.2010].
- Koško M., Osińska M., Stempińska J., Ekonometria współczesna. Dom Organizatora, Toruń 2007., s.132.
- Witkowska D. [2008], Wprowadzenie do ekonometrii dynamicznej i finansowej, Wydawnictwo SGGW, Warszawa.
- Zeliaś A. [1997], Teoria prognozy, PWE, Warszawa.
- Zeliaś A, Pawełek B., Wanat S. [2004], Prognozowanie ekonomiczne, PWN, Warszawa.

Autoregressive models used for forecasting the prices of crops in Poland

Abstract: The forecasting of crop prices is one of the most important factors in making decision on production farms. The appropriate forecast allows for limiting the risk connected with one's economic activity. In this study autoregressive models have been used, which helped to determine the price forecast for crops in the purchasing centres in 2010. To determine the quality of forecast the average *ex-post* errors of the past forecasts have been used. The achieved results show that autoregressive models are an effective tool in forecasting the crop prices in Poland.

Key words: crop prices, autoregressive models, forecasting