METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XII/2, 2011, str. 69–79

MATEMATYCZNE ASPEKTY METOD RADAROWYCH

Zbigniew Binderman
Katedra Ekonometrii i Statystyki
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
e-mail: zbigniew_binderman@sggw.pl

Streszczenie. W pracy podano matematyczne podstawy stosowalności metod radarowych wykorzystywanych do wielowymiarowej analizy danych. Podana w pracy teoria oparta wykorzystuje podstawowe pojęcia algebry i teorii operatorów liniowych.

Słowa kluczowe: metoda radarowe, operator liniowy, operatorem $\mathcal{S}$**-**przesunięcia**,** $\mathcal{S}$-iloczyn skalarny, $\mathcal{S}$-norma, jądro operatora.

WSTĘP

Celem pracy jest przedstawienie podstaw matematycznych metod geometrycznych wielowymiarowej analizy danych, wykorzystujących wykresy radarowe wektorów. Metody te są ostatnio powszechnie wykorzystywane w statystycznej i ekonometrycznej problematyce badawczej.

Autor wraz z B. Borkowskim i W. Szczesnym od kilku lat zajmują się problematyką wykorzystania metod radarowych do porządkowania i klasyfikacji obiektów, badania ich podobieństw. We wcześniejszych swoich pracach, wspomniani autorzy wykorzystywali te metody głównie do badan problematyki pomiaru regionalnego zróżnicowania rolnictwa w ujęciu tak statycznym jak i dynamicznym oraz przestrzennego zróżnicowania poziomu i profilu konsumpcji, jak również do badań związanych z kulturą, turystyką i informatyką. [Binderman, Borkowski, Szczesny 2008, 2009a, 2009b, 2010a, 2010b, 2010c, 2010d, 2010e 2011; Binderman, Szczesny 2009, 2010, 2011; Binderman 2009, 2009a].

Metody radarowe okazały się bardzo przydatne do analizy badanych zjawisk. Zmodyfikowane przez autorów metody radarowe mogą być stosowane na szerszą skalę, m.in. z uwagi na łatwą wizualizację danych wielowymiarowych. Dobrze dobrana graficzna ilustracja jest znacząca pomocą w odbiorze i w zrozumieniu wyników badań przez czytelników. Rozważane metody spełniają podstawowy postulat stabilności zastosowanej metody [zob. Jackson 1970] - nie zależą one od sposobu uporządkowania cech, opisujących dany obiekt. Metody radarowe wydają się skomplikowane rachunkowo, niemniej w erze komputerów problem ten nie ma specjalnego znaczenia. W chwili obecnej, w celu dokonywania wielowymiarowych analiz porównawczych przewidywane jest stworzenie pakietu komputerowego, w skład, którego wchodziłby moduł zawierający metody radarowe.

W niniejszej pracy, wprowadzono nowe pojęcia: normy wektora i iloczynu skalarnego wektorów. Kwadrat rozważanej tutaj normy wektora jest równy (z dokładnością do stałego mnożnika) polu wielokąta utworzonego przez wykres radarowy tego wektora. Podane zostały pewne własności tej normy, które przyczyniły się do określenia mierników syntetycznych wektorów, niezależnych od uporządkowania ich współrzędnych [Binderman, Borkowski, Szczesny 2008, Binderman, Szczesny 2009]. W pracy określono również maksymalną liczbę różnych wartości norm danego wektora, jakie można otrzymać poprzez permutację jego współrzędnych.

OPERATOR $\mathcal{S}$-PRZESUNIĘCIA W PRZESTRZENI EUKLIDESA

1. $\mathcal{S}$-iloczyn skalarny.

Niech $X=\Re^n$ oznacza n -wymiarową przestrzeń Euklidesa. Zbiór wszystkich operatorów liniowych, których dziedziny są równe przestrzeni X (podzbiorami liniowymi X) i których wartości należą również do przestrzeni X oznaczmy przez $L_0(X)$ $(L(X))$ [Przeworska-Rolewicz 1977, Przeworska-Rolewicz, Rolewicz 1968].

Definicja 1. Operator $\mathcal{S}$: X→X nazywać będziemy operatorem **$\mathcal{S}$-przesunięcia** jeżeli dla każdego $\mathbf{x}=(x_1, x_2, ..., x_n) \in X$:

$$\mathcal{S}\mathbf{x} := (x_2, x_3,.., x_n, x_1) \tag{1}$$

Twierdzenie 1. Niech $\mathcal{I}$ oznacza operator identycznościowy (tożsamościowy). Operator $\mathcal{S}$ ma następujące własności:

a) $\mathcal{S} \in L_0(X)$,
b) $\mathcal{S}^n = \mathcal{I}$,
c) operator $\mathcal{S}$ jest operatorem odwracalnym tj. istnieje taki operator $\mathcal{S}^{-1}$, że na X:
$$\mathcal{S}\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S} = \mathcal{I},$$
d) jeżeli $\mathbf{a} \in X$ jest wektorem stałym tj. $\mathbf{a}=(a,a,\ldots,a)$ to $\mathcal{S}\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Dowód. Ad. a) Niech $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1, y_2, ..., y_n) \in X$, $\alpha,\beta \in\Re$ będą dowolnie ustalonymi wektorami, liczbami, odpowiednio. Mamy wówczas z definicji, że:

$$\mathcal{S}(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\mathbf{y})=\mathcal{S}(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\ldots,\alpha x_n+\beta y_n)=$$
$$=(\alpha x_2+\beta y_2,\alpha x_3+\beta y_3,\ldots,\alpha x_n+\beta y_n, \alpha x_1+\beta y_1)=\alpha(x_2, x_3,.., x_n, x_1)+$$
$$+\beta(y_2,...,y_n,y_1)= =\alpha\mathcal{S}\mathbf{x}+\beta\mathcal{S}\mathbf{y}.$$

Ad. c) Operatorem odwrotnym do operatora $\mathcal{S}$ jest operator $\mathcal{S}^{-1}\mathbf{x}:= (x_n,x_1,x_2,...,x_{n-1})$,

gdzie $\mathbf{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$. Łatwo sprawdzić, ze $\mathcal{S}\mathcal{S}^{-1}= \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}=\mathcal{I}$.
Twierdzenia b) i d) wynikają bezpośrednio z definicji.■

Definicja 2. Odwzorowanie iloczynu przestrzeni X×X w zbiór liczb rzeczywistych $\Re$, f: (x,y) $\to$<x,y>$_{\mathcal{S}}$, określone za pomocą wzoru:

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_{\mathcal{S}}:=\langle\mathbf{x}, \mathcal{S}\mathbf{y}\rangle \tag{2}$$

nazywamy $\mathcal{S}$-**iloczynem skalarnym** wektorów **x** i **y.**

Łatwo sprawdzić, że tak określony $\mathcal{S}$ **-**iloczyn skalarny ma następujące własności.

Twierdzenie 2. Jeżeli $\boldsymbol{x}$, $\mathbf{y}\in X$; $\alpha,\beta\in \Re$ są dowolnie ustalonymi wektorami, liczbami, odpowiednio to:

$$\langle\alpha\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_{\mathcal{S}}= \langle\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}\rangle_{\mathcal{S}}= \alpha\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_{\mathcal{S}} ,$$
$$\langle\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle_{\mathcal{S}}= \langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle_{\mathcal{S}}+ \langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle_{\mathcal{S}} ,$$
$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}\rangle_{\mathcal{S}}= \langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_{\mathcal{S}}+ \langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle_{\mathcal{S}} ,$$
$$\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle_{\mathcal{S}}= \langle\mathcal{S}x,x\rangle,$$
$$\langle\mathcal{S}\mathbf{x}, \mathcal{S}\mathbf{y}\rangle= \langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle.$$

Zauważmy, że $\mathcal{S}$-iloczyn skalarny nie spełnia trzeciego i czwartego aksjomatu iloczynu skalarnego elementów przestrzeni liniowej **[**Gelfand 1971**]**. Świadczy o tym następujący przykład.

Przykład 1. Niech n=3, $\mathbf{x}=(1,0,0)$, $\mathbf{y}=(0,0,1)$. Mamy wówczas $\mathcal{S}\mathbf{x}=\mathbf{y}$, $\mathcal{S}\mathbf{y}=(0,1,0)$, oraz

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_{\mathcal{S}}=\langle\mathbf{x}, \mathcal{S}\mathbf{y}\rangle=(1,0,0)\cdot(0,1,0)=0,$$
$$\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle_{\mathcal{S}}=\langle\mathbf{y}, \mathcal{S}\mathbf{x}\rangle=(0,0,1)\cdot(0,0,1)=1,$$
$$\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle_{\mathcal{S}}=\langle\mathbf{x}, \mathcal{S}\mathbf{x}\rangle=(1,0,0)\cdot(0,0,1)=0.$$

Z powyższego wynika, że $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_{\mathcal{S}}\neq\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle_{\mathcal{S}}$ oraz $\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle_{\mathcal{S}} =0$ dla $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$.

Przy pomocy $\mathcal{S}$-iloczynu skalarnego można wyznaczyć symetryczną formę dwuliniową [Gelfand 1961, 1971; Halmos 1958, Hoffman, Kunze 1961]. Słuszne jest mianowicie następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. Funkcja $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{1}{2}\{<\mathbf{x},\mathbf{y}>_S + <\mathbf{y},\mathbf{x}>_S\}$ jest symetryczną formą dwuliniową, biegunową względem formy kwadratowej $h(x) = <\mathbf{x},\mathbf{x}>_{\mathcal{S}}$.

$\mathcal{S}$-iloczyn skalarny $<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{\mathcal{S}}$ jednoznacznie wyznacza swoją formę biegunową

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\{h(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})\}.$$

$\mathcal{S}$-iloczyn skalarny $<\mathbf{x},\mathbf{y}>_{\mathcal{S}}$ jest w przestrzeni euklidesowej przykładem symetrycznej formy dwuliniowej, odpowiada on formie kwadratowej $h(\mathbf{x})$.
Dowód Twierdzenia 3 opiera się na własnościach podanych w Twierdzeniu 2.

Łatwo sprawdzić, że poza wymienionymi, $\mathcal{S}$-iloczyn skalarny ma następujące własności.

Własność 1.

a) jeżeli wektor **a** jest stały to $<\mathbf{a},\mathbf{a}>_{\mathcal{S}} = <\mathbf{a},\mathbf{a}> = \|\mathbf{a}\|^2$,

b) dla dowolnych liczb naturalnych k i m, dowolnego $\mathbf{x}\in X$:

$$<\mathcal{S}^k\mathbf{x},\mathcal{S}^{k+m}\mathbf{x}> = <\mathbf{x},\mathcal{S}^m\mathbf{x}> = <\mathbf{x},\mathcal{S}^{m-1}\mathbf{x}>_{\mathcal{S}},$$

c) dla dowolnej liczby naturalnej k i dowolnego $\mathbf{x}\in X$:

$$<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{\mathcal{S}} = <\mathcal{S}^k\mathbf{x},\mathcal{S}^{k+1}\mathbf{x}>,$$

d) jeżeli $\mathbf{y} = \mathcal{S}^k\mathbf{x}$ to $<\mathbf{y},\mathbf{y}>_{\mathcal{S}} = <\mathbf{x},\mathbf{x}>_{\mathcal{S}}$, $\boldsymbol{x}$, $\mathbf{y}\in X$.

Przyjmijmy następującą definicję normy generowanej przez $\mathcal{S}$-iloczyn skalarny.

Definicja 3. Funkcję $\|\ \|_{\mathcal{S}} : X \to \Re_+$, gdzie $\Re_+ := \{\alpha: \alpha \geq 0\}$ określoną przez wzór:

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}} := \left|<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{\mathcal{S}}\right|^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+1}\right|}, \tag{3}$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_{n+1} := x_1$ nazywać będziemy **$\mathcal{S}$-normą.**

W pewnych przypadkach $\mathcal{S}$-normie można nadać prostą interpretację geometryczną.

Przykład 2. Niech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Re^n$: $1 \geq x_i \geq 0$, $i=1,2,...,n\}$, $n \geq 2$. Na płaszczyźnie wpiszmy n –wielokąt foremny w koło jednostkowe (o promieniu r=1) o środku w początku układu współrzędnych Owz i połączmy wierzchołki tego wielokąta ze środkiem układu. Otrzymane w ten sposób odcinki prostych o długości równej 1 oznaczmy kolejno przez O1, O2,…,On, dla ustalenia wagi, poczynając od odcinka leżącego na osi w. Wartości współrzędnych wektora **x** można przedstawić za pomocą wykresu radarowego. W tym celu oznaczmy przez xi punkty na osi Oi powstające z przecięcia się osi Oi z okręgiem o środku w początku układu i promieniu równym x_i , i=1,2,…,n.

Łącząc punkty *x1* z *x2*, *x2* z *x3*, … , x*n* z *x1* otrzymujemy n -wielokąt, którego pole S_1 określone jest za pomocą wzoru:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} x_i x_{i+1} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1}, \text{ gdzie } x_{n+1} := x_1 .$$

Pole wpisanego w okrąg n -wielokąta foremnego określa wzór:

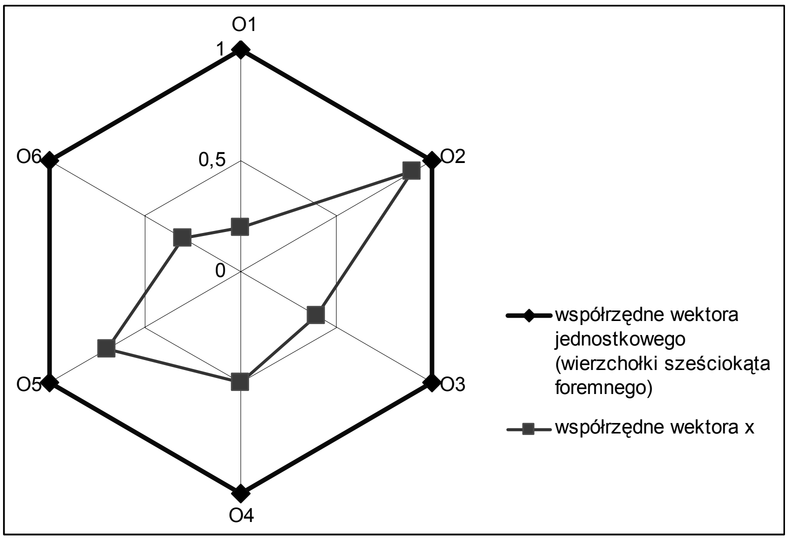
$$S_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2} n \sin\frac{2\pi}{n},$$

natomiast stosunek pól tych wielokątów S_1/S_0 określa liczba

$$\hat{S}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} .$$

Poniższy rysunek (wykres radarowy) podaje ilustracje dla wektorów: jednostkowego **1**=(1,1,1,1,1,1) i **x** = (0,2; 0,9; 0,4; 0,5; 0,7; 0,3), (n = 6).

Rys. 1. Wykresy radarowe wektorów: **1**, **x**.



Źródło: opracowanie własne

Z powyższego wynika, że kwadrat $\mathcal{S}$-normy wektora **x** jest ilorazem pola wielokąta indukowanego przez ten wektor i pola n -wielokąta foremnego, indukowanego przez wektor jednostkowy tj. $(\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}})^2 = \hat{S}$.

2. Normy wektorów należących do stożka $\Re_+^n$.

Niech X=$\Re_+^n := \{\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\colon x_i \geq 0,\ i=1,2,...,n\}$ oznacza stożek w przestrzeni $\Re^n$, $\mathbf{0}=(0,0,\ldots,0)$, $\mathbf{1}=(1,1,\ldots,1)$. Niech $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1, y_2, ..., y_n) \in X$ Jeżeli $x_k > y_k$ $(x_k \geq y_k)$ dla $k=1,2,...,n$, to pisać będziemy

$$\mathbf{x}>\mathbf{y},\ (\mathbf{x}\geq\mathbf{y}).$$

Nietrudno zauważyć, że jeżeli **x≥y** i **x≠y** to naturalnym jest nazywać wektor **x** lepszym (wyżej ocenianym) od wektora **y**. Oznacza to, że żadna ze składowych wektora **x** nie jest mniejsza od odpowiednich składowych wektora **y**, a przynajmniej jedna z nich ma wartość większą, tj. istnieje takie $k \in [1,n]$, że $x_k > y_k$.
Niech tak, jak poprzednio $h(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x},\mathbf{x} \rangle_{\mathcal{S}}$, przyjmijmy następujące oznaczenia dla jądra odwzorowania h:

$$ker\ h := \{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}\colon\ h(\mathbf{x})=0\},$$

$$\mathcal{N}_e := \{\ \mathbf{x}\geq\mathbf{0}\colon\ \mathbf{x}=(0,x_2,0,x_4,0,\ldots,0,x_n) \vee \mathbf{x}=(x_1,0,x_3,0,x_5,0,\ldots,0,x_{n-1},0)\}$$

gdy n jest liczbą parzystą,

$$\mathcal{N}_0 := \{\ \mathbf{x}\geq\mathbf{0}\colon\ \mathbf{x}=(0,x_2,0,x_4,0,\ldots,0,x_n) \vee \mathbf{x}=(x_1,0,x_3,0,\ldots,0,x_{n-2},0,0)\}$$

gdy n jest liczbą nieparzystą, oraz

$$\mathcal{N} := \begin{cases} \mathcal{N}_e & \text{gdy n jest liczbą parzystą} \\ \mathcal{N}_0 & \text{gdy jest liczbą nieparzystą} \end{cases}.$$

<u>Twierdzenie 4</u>. Iloczyn skalarny

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{x} \rangle_{\mathcal{S}} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{N},$$

t.j. ker h=$\mathcal{N}$.

<u>Dowód.</u> Niech $n=2l$, $l \in \mathbb{N}$ będzie liczbą parzystą i $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_e$. Wówczas x jest postaci

$\mathbf{x}=(0,x_2,0,\ldots,0,x_n)$ lub $\mathbf{x}=(x_1,0,x_3,\ldots,0,x_{n-1},0)$. Jeżeli $\mathbf{x}=(0,x_2,0,\ldots,0,x_n)$ to $\mathcal{S}\mathbf{x}=(x_2,0,\ldots,0,x_n,0)$ oraz $\langle \mathbf{x},\mathbf{x} \rangle_{\mathcal{S}} = 0 \cdot x_2 + x_2 \cdot 0 + \ldots + 0 \cdot x_n + x_n \cdot 0 = 0$.

Jeżeli $\mathbf{x}=$ $=(x_1,0,x_3,\ldots,0,x_{n-1},0)$ to $\mathcal{S}\mathbf{x} = (0,x_3,0,x_5,\ldots,0,x_1)$, $<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{\mathcal{S}} = x_1 \cdot 0 + 0 \cdot x_3 + x_{n-1} \cdot 0 + 0 \cdot x_1 = 0$. Niech $n=2l+1$, $l \in \mathbb{N}$ będzie liczbą nieparzystą i $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_0$. Wówczas $\mathbf{x}$ jest postaci $\mathbf{x}=(0,x_2,0,\ldots,0,x_n)$ lub $\mathbf{x}=(x_1,0,x_3,\ldots,0,x_{n-2},0,0)$. Jeżeli $\mathbf{x}=(0,x_2,0,\ldots,0,x_n)$ to $\mathcal{S}\mathbf{x}=(x_2,0,\ldots,0,x_n,0)$ oraz $<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{\mathcal{S}} = 0 \cdot x_2 + x_2 \cdot 0 + \ldots + 0 \cdot x_n + x_n \cdot 0 = 0$. Jeżeli $\mathbf{x}=(x_1,0,x_3,\ldots,0,x_{n-2},0,0)$ to $\mathcal{S}\mathbf{x}=(0,x_3,0,x_5,\ldots,0,x_{n-2},0,0,x_1)$. Stąd

$$<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{\mathcal{S}} = =x_1 \cdot 0+0 \cdot x_3+\ldots+x_{n-1} \cdot 0+0 \cdot x_1=0.$$

Z powyższego wynika, że $\mathcal{N} \subset ker$ h.

Przypuśćmy teraz, że $\mathbf{x} = (x_1,x_2,...,x_n) \in ker$ h i $\mathbf{x} \notin \mathcal{N}$, wówczas

$$<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} = 0, \text{ gdzie } x_{n+1} = x_1 .$$

Z powyższego wynika, że $x_i x_{i+1}=0$ dla każdego $i=1,2,...,n$. A zatem $\mathbf{x}$ jest takim wektorem, w którym iloczyny sąsiednich współrzędnych oraz iloczyn pierwszej współrzędnej i ostatniej jest równy zeru. Oznacza to, że $\mathbf{x} \in \mathcal{N}$, co przeczy naszym przypuszczeniom. ■

Wniosek 1. Niech $\mathbf{x} \in X$, $\mathcal{S}$-norma wektora $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}}=0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{x} \in \mathcal{N}$.

Jeżeli wektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$ spełniają warunki $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ i $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ to oczywistym jest, że $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}} \geq \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{S}}$. Dla $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in N$: $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ i $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ spełniona jest równość $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}}=\|\mathbf{y}\|_{\mathcal{S}}$. Równość norm $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}}=\|\mathbf{y}\|_{\mathcal{S}}$ może zachodzić również dla $\mathbf{x},\mathbf{y} \notin \mathcal{N}$.

Rozważmy następujący przykład.

Przykład 3. Niech $\mathbf{x}=(1,0,2,0,1)$, $\mathbf{y}=(1,0,1,0,1)$. Mamy wówczas, że $\mathbf{x},\mathbf{y} \notin \mathcal{N}_0$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ i $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, $\mathcal{S}\mathbf{x}=(0,2,0,1,1)$, $\mathcal{S}\mathbf{y}=(0,1,0,1,1)$ oraz

$(\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}})^2=(1\cdot0+0\cdot2+2\cdot0+0\cdot1+1\cdot1)/5=1/5$, $(\|\mathbf{y}\|_{\mathcal{S}})^2=(1\cdot0+0\cdot1+1\cdot0+0\cdot1+1\cdot1)/5 = 1/5$.

Stąd, $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}}=\|\mathbf{y}\|_{\mathcal{S}}$.

Podany niżej lemat określa dla jakich wektorów $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X \setminus \mathcal{N}$ spełniona jest nierówność $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}} > \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{S}}$.

Lemat 1. Jeżeli wektory $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1, y_2, ..., y_n) \in X$ spełniają warunki $\mathbf{x}\geq\mathbf{y}$ i $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$, oraz istnieje takie $k\in[1,n]$: $x_k>y_k$ oraz $x_{k-1}x_{k+1}>0$ to $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}}>\|\mathbf{y}\|_{\mathcal{S}}$.

Dowód. Niech $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1, y_2, ..., y_n) \in X$: $\mathbf{x}\geq\mathbf{y}$ i $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$. Z założenia istnieje taka liczba naturalna $k\in[1,n]$, że $x_k>y_k$, $x_{k-1}>0$ lub $x_{k+1}>0$ oraz $x_{k-1}\geq y_{k-1}$, $x_{k+1}\geq y_{k+1}$. Stąd otrzymujemy, że $x_{k-1}x_k+ x_k x_{k+1}> y_{k-1}y_k+ y_k y_{k+1}$ co pociąga za sobą nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} = \sum_{i=1}^{k-2} x_i x_{i+1} + x_{k-1}x_k + x_k x_{k+1} + \sum_{i=k+1}^{n} x_i x_{i+1} >$$

$$> \sum_{i=1}^{k-2} y_i y_{i+1} + y_{k-1}y_k + y_k y_{k+1} + \sum_{i=k+1}^{n} y_i y_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} y_i y_{i+1} \geq 0,$$

gdzie $x_{n+1} := x_1,\ y_{n+1} := y_1$.

Powyższa nierówność wynika z faktu, że dla każdego $j\in[1,n+1]$ $x_jx_{j+1}\geq y_jy_{j+1}$. Nierówność ta dowodzi słuszności naszego lematu. ■

Z Lematu 1. wynika następujący wniosek.

Wniosek 3. Jeżeli wektory $\boldsymbol{x}$, $\mathbf{y} \in X$ spełniają warunki $\mathbf{x}\geq\mathbf{y}>\mathbf{0}$ i $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$ to $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}}>\|\mathbf{y}\|_{\mathcal{S}}$.

Korzystając z Lematu 1 nietrudno udowodnić jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. Funkcja $f(\boldsymbol{x})=f(x_1, x_2, ..., x_n):=\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}}$, $X\ni\mathbf{x}>\mathbf{0}$, przy ustalonych wartościach $x_1, x_2,...,x_{j-1}, x_{j+1},\dots,x_n$ **jest funkcją rosnącą** zmiennej rzeczywistej $x_j>0$, dla $j\in[1,n]$.

Przyjmijmy następujące oznaczenie

$$\mathcal{N}_1:=\{\mathbf{x}\in X:\ \mathbf{x}=(0,0,\dots,0,x_i,0,..,0,0),\ i\in[1,n]\},$$

t.j. zbiór $\mathcal{N}_1$ zawiera te wszystkie wektory $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$, których wszystkie współrzędne - poza być może jedną, są równe zeru. Łatwo zauważyć, że $\mathcal{N}_1\subset\mathcal{N}$.

Niech wektor $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in X$ będzie dowolnie ustalony. Oznaczmy j-tą permutację zbioru współrzędnych wektora $\mathbf{x}$ przez $\mathbf{x}_j:=(x_{1j},x_{2j},...,x_{nj})$, gdzie $j=1,2,...,n!$, $\mathbf{x}_1:=\mathbf{x}$.

Łatwo zauważyć, że słuszna jest następująca uwaga.

Uwaga 1. Jeżeli $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_1$ to $\|\mathbf{x}_j\|_{\mathcal{S}}=0$ dla każdego $j=1,2,...,n!$.

W dalszym ciągu bez straty dla ogólności naszych rozważań, przyjmijmy następujące założenie odnośnie permutacji zbioru współrzędnych rozważanych

wektorów: jeżeli wektory $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X$ spełniają warunki: $\mathbf{x}\geq\mathbf{y}$ i $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$ to warunki te spełniają również wektory będące permutacjami zbioru ich współrzędnych, to znaczy $\mathbf{x}_j\geq\mathbf{y}_j$ i $\mathbf{x}_j\neq\mathbf{y}_j$ dla każdego j=1,2,...,n!.
W podobny sposób jak Lemat 3 udowodnić można następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5. Jeżeli wektor $\mathbf{x}\in X\backslash\mathcal{W}_1$ to istnieje taka permutacja współrzędnych wektora $\mathbf{x}$ - wektor $\mathbf{x}_j$, którego $\mathcal{S}$-norma jest większa od zera, t.j. istnieje takie $j \in \{1,2,...,n!\}$, że $\|\mathbf{x}_j\|_{\mathcal{S}} >0$.

Dowód. Jeżeli $\mathbf{x}\in X\backslash\mathcal{N}$ to oczywistym jest, że $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}} =\|\mathbf{x}_1\|_{\mathcal{S}} >0$. Załóżmy, zatem że $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in \mathcal{N}\backslash\mathcal{W}_1$. Z przyjętego założenia wynika, że co najmniej dwie współrzędne wektora $\mathbf{x}$ są większe od zera. Niech na przykład x_l, $x_m>0$; $\mathbf{x}_j:=(x_l, x_m,\ldots)$, $l,m\in \{1,2,...,n\}$. Mamy wówczas $\mathcal{S}\mathbf{x}_j=(x_l,\ldots,x_m)$, oraz $< \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j>_{\mathcal{S}} =<\mathbf{x}_j, \mathcal{S}\mathbf{x}_j>= x_l x_m+\ldots>0$. ■

W podobny sposób, jak wyżej możemy udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6. Jeżeli wektory $\mathbf{x}\in X\backslash\mathcal{W}_1$, $\mathbf{y}\in X$ spełniają warunki: $\mathbf{x}\geq\mathbf{y}$ i $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$ to istnieją takie permutacje wektorów $\mathbf{x},\mathbf{y}$: $\mathbf{x}_j$, $\mathbf{y}_j$, że

$$\|\mathbf{x}_j\|_{\mathcal{S}}>\|\mathbf{y}_j\|_{\mathcal{S}}, \text{ gdzie } j\in\{1,2,\ldots,n!\}.$$

Dowód. Niech $\mathbf{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1, y_2, ..., y_n) \in X$. Z założenia wynika, że co najmniej dwie współrzędne wektora $\mathbf{x}$ są większe od zera. Bez straty dla ogólności rozważań załóżmy, że x_l, $x_m >0$; $l<m$ oraz $x_l\geq y_l$ i $x_m>y_m$. Niech

$$\mathbf{x}_j:=(x_l, x_m, x_1, x_2,..., x_{l-1}, x_{l+1},\ldots, x_{m-1}, x_{m+1},\ldots,x_n),$$
$$\mathbf{y}_j:=(y_l, y_m, y_1, y_2,..., y_{l-1}, y_{l+1},\ldots, y_{m-1}, y_{m+1},\ldots,y_n);\ j \in\{1,2,...,n!\}.$$

Z przyjętych założeń wynika, że $\mathbf{x}_j\geq\mathbf{y}_j$ i $\mathbf{x}_j\neq\mathbf{y}_j$. Z faktu, że iloczyn $x_l\, x_m> y_l\, y_m$ wynika teza twierdzenia. ■

Niech wektor $\mathbf{x} \in X=\Re^n_+$, liczba naturalna $k:=n!$, $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_k \in X$: będą wektorami otrzymanymi z wektora $\mathbf{x}$ poprzez wszystkie permutacje jego współrzędnych. Słuszne jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7. Niech n>1, $\mathbf{x}\in X\backslash\mathcal{W}_1$. Skończony zbiór k liczb $\mathcal{A}:=\{\|\mathbf{x}_1\|_{\mathcal{S}}, \|\mathbf{x}_2\|_{\mathcal{S}},...,\|\mathbf{x}_k\|_{\mathcal{S}}\}$ zawiera co najwyżej $\dfrac{(n-1)!}{2}$ różnych wartości.

Dowód. Niech $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1=(x_1, x_2, ..., x_n)$, wówczas, jak łatwo sprawdzić n-1 permutacji współrzędnych wektora $\mathbf{x}$: $\mathbf{x}_2=(x_2, x_3, ..., x_n, x_1)$, $\mathbf{x}_3 = (x_3, x_4,..., x_2),\ldots$, $\mathbf{x}_n=(x_n, x_1, ..., x_{n-1})$ mają tą własność, że

$$<\mathbf{x}_1,\mathcal{S}\mathbf{x}_1> = <\mathbf{x}_2,\mathcal{S}\mathbf{x}_2>=\ldots=<\mathbf{x}_n, \mathcal{S}\mathbf{x}_n>.$$

Z definicji $\mathbf{x}_{i+1}=\mathcal{S}^i\mathbf{x}$, $i=1,2,...,n-1$. Na podstawie Własności 1c

$$<\mathbf{x}_{i+1},\mathcal{S}\mathbf{x}_{i+1}> = <\mathcal{S}^i\mathbf{x},\mathcal{S}^{i+1}\mathbf{x}>=<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{\mathcal{S}}.$$

Stąd $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}} =\|\mathbf{x}_1\|_{\mathcal{S}}=...=\|\mathbf{x}_n\|_{\mathcal{S}}$. Zauważmy ponadto, że jeżeli $\mathbf{x}_{n+1}:=(x_n, x_{n-1}, ..., x_1)$ to również $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}} =\|\mathbf{x}_{n+1}\|_{\mathcal{S}}$. Istotnie, mamy wówczas

$$<\mathbf{x}_{n+1},\mathbf{x}_{n+1}>_{\mathcal{S}}=<\mathbf{x}_{n+1},\mathcal{S}\mathbf{x}_{n+1}> = (x_n,x_{n-1},\ldots,x_1)\cdot(x_{n-1},\ldots,x_1,x_n) =$$

$$= x_nx_{n-1} + x_{n-1}x_{n-2}+\ldots+x_1x_n=\sum_{i=1}^{n} x_ix_{i+1} = <\mathbf{x},\mathbf{x}>_{\mathcal{S}} ,$$

gdzie $x_{n+1}=x_1$. Z powyższego wynika, że jeżeli $\mathbf{x}_{n+1+i}:= \mathcal{S}\,\mathbf{x}_{n+1}$ dla $i=1,2,...,n-1$ to $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}} =\|\mathbf{x}_{n+j}\|_{\mathcal{S}}$ dla $j=2,3,...,n$.

Powyższe rozważania pokazują, że dla każdego wektora $\mathbf{x}\in X\setminus N_1$ istnieje co najmniej 2n-1 permutacji jego współrzędnych, których $\mathcal{S}$-normy są równe $\mathcal{S}$-normie wektora **x**. A zatem liczba różnych wartości w zbiorze $\mathcal{A}$, jest nie większa niż $\frac{n!}{2n}=\frac{(n-1)!}{2}$.

Oczywiście, jeżeli **x^** oznacza wektor, który powstał poprzez permutacje współrzędnych wektora **x** oraz $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}} \neq\|\mathbf{x}\hat{}\|_{\mathcal{S}}$ to poprzez rozumowanie podobne do powyższego można pokazać, że istnieje 2n-1 permutacji współrzędnych wektora **x^** (a zatem również wektora **x**) takich ich $\mathcal{S}$-normy są równe $\mathcal{S}$-normie wektora x^■.

BIBLIOGRAFIA

Binderman Z., Borkowski B., Szczesny W. (2008) O pewnej metodzie porządkowania obiektów na przykładzie regionalnego zróżnicowania rolnictwa, Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych, IX, 39-48, wyd. SGGW Warszawa.

Binderman Z., Borkowski B., Szczesny W. (2009) Tendencies in changes of regional differentiation of farms structure and area Quantitative methods in regional and sectored analysis/sc., U.S., Szczecin: - s. 33-50.

Binderman Z., Borkowski B., Szczesny W. (2010a): The tendencies in regional differentiation changes of agricultural production structure in Poland, Quantitative methods in regional and sectored analysis, U.S., Szczecin, s. 67-103.

Binderman Z., Borkowski B., Szczesny W. (2010b): Radar measures of structures' conformability, Quantitative Methods in Economy XI, Warszawa, 45-59.

Binderman Z., Borkowski B., Szczesny W. (2010c): Analiza zmian struktury spożycia w Polsce w porównaniu z krajami unii europejskiej. Metody wizualizacji danych w analizie zmian poziomu i profilu konsumpcji w krajach UE, RNR PAN, Seria G, Ekonomika Rolnictwa , T. 97, z. 2, Warszawa s. 77-90.

Binderman Z., Borkowski B., Szczesny W. (2010d): Regionalne zróżnicowanie turystyki w Polsce w latach 2002–2008, Oeconomia 9 (3) s. 71-82.

Binderman Z., Borkowski B., Szczesny W. (2010e) Regionalnego zróżnicowanie kultury między wsią a miastem w latach 2003-2008, Między dawnym a nowym – na szlakach humanizmu, wyd. SGGW, s. 345-360.

Binderman Z., Borkowski B., Szczesny W. (2011) Zastosowanie metody radarowej w geometrycznych miernikach podobieństw obiektów, w druku.

Binderman Z., Szczesny W. (2009) Arrange methods of tradesmen of software with a help of graphic representations Computer algebra systems in teaching and research, Wyd. WSFiZ, Siedlce, 117-131.

Binderman Z., Szczesny W. (2010) Wykorzystanie metod geometrycznych do analizy regionalnego zróżnicowania kultury na wsi, Seria T. XII, z. 5, s. 25-31.

Binderman Z., Szczesny W. (2011) Comparative analysis of computer techniques of visualization multidimensional data, CASTR, Collegium Mazovia, Siedlce, 243-254.

Binderman, Z. (2009) Ocena regionalnego zróżnicowania kultury i turystyki w Polsce w 2007 roku Problemy rozwoju turystyki edukacyjno-kulturowej w Polsce na świecie, Roczniki Wydziału Nauk Humanistycznych wyd. SGGW, T XII, s. 335-351,.

Binderman, Z. (2009) Syntetyczne mierniki elastyczności przedsiębiorstw / Prace i Materiały Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Gdańskiego, nr 4/2, s. 257-268.

Gelfand I., M. (1961): Lectures on linear algebra, Interscience, New York.

Gelfand I., M. (1971) Wykłady z algebry liniowej, PWN Warszawa.

Halmos P.(1958) Finite-dimensional vector spaces, Princeton: D van Nostrand.

Hoffman K., Kunze R. (1961) Linear algebra, Englewood Cliffs Prentice-Hall.

Jackson D. M. (1970) The stability of classifications of binary attribute data, Technical Report 70-65, Cornell University 1-13.

Przeworska - Rolewicz D. (1977) Przestrzenie liniowe i operatory liniowe. WNT Warszawa.

Przeworska – Rolewicz D., Rolewicz S. (1968) Equations in linear spaces, M.M. 47, PWN Warszawa.

MATHEMATICAL ASPECTS OF USING OF THE RADAR METHODS TO CLASSIFICATIONS AND SIMILARITIES OBJECTS

Abstract: In the presented work mathematical foundations for the radar methods which are using in cluster analysis are given. The given theorems are based on fundamental notions of theory of linear algebra.

Key words: radar method, linear operator, $\mathcal{S}$-shift operator, $\mathcal{S}$-scalar multiplication, $\mathcal{S}$-norm, kernel of operator, cluster analysis