METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XII/2, 2011, str. 139–147

METODY SZACOWANIA PARAMETRÓW MODELI DWULINIOWYCH

Joanna Górka, Michał Bernard Pietrzak
Katedra Ekonometrii i Statystyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
e-mail: joanna.gorka@umk.pl, pietrzak@umk.pl

Streszczenie: W artykule przedstawiony zostanie model dwuliniowy, jego budowa, własności oraz metody estymacji. Zaprezentowana zostanie również możliwość opisu modelu dwuliniowego za pomocą modelu przestrzeni stanu. Praktyczne zastosowanie modelu dwuliniowego w połączeniu z modelem GARCH pozwala na jednoczesny opis dwóch własności szeregów finansowych, warunkowej wartości oczekiwanej oraz warunkowej wariancji. Model ten wykorzystano w empirycznej analizie indeksów giełdowych, gdzie dokonano próby opisu logarytmicznych stóp zwrotu. Otrzymane wyniki pozwoliły na porównanie modelu ze strukturą dwuliniową $AR(p)-BL(P,Q)-GARCH(r,z)$ z modem $AR(p)-GARCH(r,z)$.

Słowa kluczowe: model dwuliniowy, model *GARCH*, warunkowa wartość oczekiwana, warunkowa wariancja

WPROWADZENIE

Podczas analizy zależności występujących na rynkach finansowych niejednokrotnie istnieje potrzeba opisu związków nieliniowych. Nieliniowość wynika ze skomplikowanych i różnorodnych zachowań inwestorów. Wykorzystywane do modelowania finansowych szeregów czasowych procesy stochastyczne można podzielić na procesy nieliniowe w warunkowej wartości oczekiwanej oraz procesy nieliniowe w warunkowej wariancji. Rozpatrywane w pracy procesy dwuliniowe *BL* tworzą modele nieliniowe w warunkowej wartości oczekiwanej. Natomiast procesy z rodziny *GARCH* są przykładem modeli nieliniowych w warunkowej wariancji.

Proces dwuliniowy $ARMA(p,q)-BL(P,Q)$ z czasem dyskretnym $t=1,2,...,T$ można zapisać jako

$$y_t=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i y_{t-i}+\sum_{j=0}^{q}\beta_j\varepsilon_{t-j}+\sum_{k=1}^{P}\sum_{l=1}^{Q}\varphi_{kl}y_{t-k}\varepsilon_{t-l}, \tag{1}$$

gdzie $\alpha_i,\beta_j,\varphi_{kl}$ są parametrami procesu, $\beta_0=1$, natomiast ε_t jest procesem zwanym białym szumem o wariancji równej δ^2.

Procesy dwuliniowe zostały wprowadzone w pracach [Granger, Andersen 1978, Subba Rao, Gabr 1980], a w literaturze polskojęzycznej pojawiły się w pracach [Bruzda 2003, Doman, Doman 2004]. Przy wartościach parametrów $p=q=0$ proces dwuliniowy redukuje się do procesu całkowicie dwuliniowego $BL(P,Q)$, określonego wzorem

$$y_t=\sum_{k=1}^{P}\sum_{l=1}^{Q}\varphi_{kl}y_{t-k}\varepsilon_{t-l}+\varepsilon_t, \tag{2}$$

gdzie φ_{kl} jest parametrem procesu, a ε_t jest procesem białego szumu o wariancji równej δ^2.

METODY SZACOWANIA PARAMETRÓW MODELI DWULINIOWYCH

Metody szacowania parametrów zostaną zawężone do procesów dwuliniowych $AR(p)-BL(P,Q)$. W razie potrzeby istnieje możliwość ich rozszerzenia dla procesu opisanego wzorem (1). Pierwszą z przedstawionych metod jest metoda największej wiarygodności MNW. Jej idea polega na obliczeniu wartości gęstości prawdopodobieństwa uzyskania próby $(y_1,y_2,...y_T)$, przy założonych wartościach parametrów Θ. Należy wybrać taką ocenę parametrów Θ, dla której funkcja wiarygodności osiąga wartość maksymalną. Funkcja wiarygodności procesu $AR(p)-BL(P,Q)$ zapisana jest wzorem

$$\ln L(y_1,y_2,...,y_T;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p,\varphi_{11},\varphi_{12},...,\varphi_{kl},...,\delta)=$$
$$\sum_{t=1}^{T}\left(-0{,}5\ln(2\pi)-0{,}5\ln(\delta^2)-0{,}5\left(y_t-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i y_{t-i}+\sum_{k=1}^{P}\sum_{l=1}^{Q}\varphi_{kl}y_{t-k}\varepsilon_{t-l}\right)^2/\delta^2\right) \tag{3}$$

Kolejną metodą szacowania parametrów modeli dwuliniowych jest metoda quasi wiarygodności oparta o filtr Kalmana[1]. W celu wykorzystania tej metody

[1] Opis metody największej wiarygodności metoda opartej o filtr Kalmana zawarty jest w pracy [Durbin, Koopman 2001]. Dla realizacji tej metody wystarczająca jest znajomość wartości oczekiwanych wektora stanu i obserwacji.

należy najpierw przedstawić proces w przestrzeni stanu (ozn. SSM). Ogólny model SSM składa się z równania stanu

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \mathbf{C}\delta_t , \tag{4}$$

oraz równania obserwacji

$$Y_t = \mathbf{H}\boldsymbol{\alpha}_t + \varepsilon_t , \tag{5}$$

gdzie δ_t i ε_t są procesami białoszumowymi o wariancji odpowiednio δ_δ^2 δ_ε^2.
Rozpatrywany model $AR(p) - BL(P,Q)$ określony jest jako

$$\begin{aligned} y_t &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i} + \sum_{k=1}^{P}\sum_{l=1}^{Q} \varphi_{kl} y_{t-k} \varepsilon_{t-l} + \varepsilon_t \Rightarrow \\ y_t &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i} + \sum_{l=1}^{P} y_{t-l}\varepsilon_{t-1} + \sum_{l=1}^{P} y_{t-l}\varepsilon_{t-2} + \ldots + \sum_{l=1}^{P} y_{t-l}\varepsilon_{t-Q} + \varepsilon_t \end{aligned} . \tag{6}$$

Proces $AR(p) - BL(P,Q)$ w przestrzeni stanu można zapisać w postaci

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \sum_{i=1}^{Q} \mathbf{B}_i \boldsymbol{\alpha}_{t-1}\varepsilon_{t-i} + \mathbf{C}\varepsilon_t , \tag{7}$$

$$Y_t = \mathbf{H}\boldsymbol{\alpha}_t , \tag{8}$$

gdzie

$$\mathbf{C}' = [1,0,\ldots,0], \quad \mathbf{H} = [1,0,\ldots,0],$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{p-1} & -\alpha_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \varphi_{1i} & \varphi_{2i} & \cdots & \varphi_{p-1,i} & \varphi_{pi} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

W celu wykorzystania filtru Kalmana, na którym oparta jest funkcja wiarygodności, model przestrzeni stanu należy przekształcić w odpowiedni sposób.

Dla Q=1 SSM ma postać

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\alpha}_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \mathbf{C}\varepsilon_t , \tag{11}$$

$$Y_t = \mathbf{H}\boldsymbol{\alpha}_t . \tag{12}$$

Niech

$$\mathbf{x}_t = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1\varepsilon_t)\boldsymbol{\alpha}_t . \tag{13}$$

Wówczas równanie (11) ma postać $\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{C}\varepsilon_t$. Podstawiając $\boldsymbol{\alpha}_t$ do równania (12) i (13) otrzymujemy

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B}_1\varepsilon_t\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}\mathbf{C}\varepsilon_t + \mathbf{B}_1\mathbf{C}\varepsilon_t^2\,, \tag{14}$$

$$Y_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_{t-1} + \varepsilon_t\,. \tag{15}$$

W celu otrzymania wartości oczekiwanej szumu na poziomie równym zero w równaniu (14) dodano i odjęto składnik $\mathbf{B}_1\mathbf{C}\delta^2$. Stąd

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B}_1\varepsilon_t\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}\mathbf{C}\varepsilon_t + \mathbf{B}_1\mathbf{C}\left(\varepsilon_t^2 - \delta^2\right) + \mathbf{B}_1\mathbf{C}\delta^2\,. \tag{16}$$

Wartości oczekiwane wektora stanu i obserwacji wyznaczone na podstawie informacji dostępnych w chwili $t-1$ są następujące

$$E\left(\mathbf{x}_t | t-1\right) = \mathbf{A}E\left(\mathbf{x}_{t-1}\right) + \mathbf{B}_1\mathbf{C}\delta^2\,, \tag{17}$$

$$E\left(Y_t | t-1\right) = \mathbf{H}E\left(\mathbf{x}_{t-1}\right). \tag{18}$$

Dla Q=2 równania SSM są następujące

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\alpha}_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\alpha}_{t-1}\varepsilon_{t-2} + \mathbf{C}\varepsilon_t\,, \tag{19}$$

$$Y_t = \mathbf{H}\boldsymbol{\alpha}_t\,. \tag{20}$$

Niech

$$\mathbf{x}_t = \left(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1\varepsilon_t + \mathbf{B}_2\varepsilon_{t-1}\right)\boldsymbol{\alpha}_t\,. \tag{21}$$

Wówczas równanie (19) przyjmuje postać $\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{C}\varepsilon_t$. Podstawiając $\boldsymbol{\alpha}_t$ do równań (20) i (21) otrzymujemy

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B}_1\varepsilon_t\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B}_2\varepsilon_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}\mathbf{C}\varepsilon_t + \mathbf{B}_1\mathbf{C}\varepsilon_t^2 + \mathbf{B}_2\mathbf{C}\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}\,, \tag{22}$$

$$Y_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_{t-1} + \varepsilon_t\,. \tag{23}$$

Niech

$$\mathbf{z}_t = \left(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1\varepsilon_{t+1} + \mathbf{B}_2\varepsilon_t\right)\mathbf{x}_t\,. \tag{24}$$

Wówczas równanie (22) ma zapis $\mathbf{x}_t = \mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{A}\mathbf{C}\varepsilon_t + \mathbf{B}_1\mathbf{C}\varepsilon_t^2 + \mathbf{B}_2\mathbf{C}\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}$. Postać tą podstawiamy następnie do równań (23) i (24), w wyniku czego otrzymywane są równania.

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_t = {} & \mathbf{A}\mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{B}_1\varepsilon_{t+1}\mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{B}_2\varepsilon_t\mathbf{z}_{t-1} + c^2\mathbf{C}\varepsilon_t + \mathbf{B}_1\varepsilon_{t+1}\varepsilon_t + \\ & + \left(\mathbf{B}_2\mathbf{A}^2\mathbf{C} + \mathbf{A}\mathbf{B}_1\mathbf{C}\right)\varepsilon_t^2 + \mathbf{B}_1^2\mathbf{C}\varepsilon_{t+1}\varepsilon_t^2 + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_1\mathbf{C}\varepsilon_t^3 + \\ & + \mathbf{A}\mathbf{B}_2\mathbf{C}\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_1\mathbf{C}\varepsilon_{t+1}\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \mathbf{B}_2^2\mathbf{C}\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1}\end{aligned} \tag{25}$$

$$Y_t = \mathbf{H}\mathbf{z}_{t-2} + \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{C}\varepsilon_{t-1} + \mathbf{H}\mathbf{B}_1\mathbf{C}\varepsilon_{t-1}^2 + \mathbf{H}\mathbf{B}_2\mathbf{C}\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} \tag{26}$$

W celu otrzymania, zarówno w równaniu stanu, jak i równaniu obserwacji, wartości oczekiwanej szumu na poziomie równym zero, dodawano i odjęto wyrażenie $\left(\mathbf{B}_2\mathbf{A}^2\mathbf{C} + \mathbf{A}\mathbf{B}_1\mathbf{C}\right)\delta^2$ w równaniu (25) oraz wyrażenie $\mathbf{H}\mathbf{B}_1\mathbf{C}\delta^2$ w równaniu (26) otrzymując

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_t &= \mathbf{A}\mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{B}_1\varepsilon_{t+1}\mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{B}_2\varepsilon_t\mathbf{z}_{t-1} + c^2\mathbf{C}\varepsilon_t + \mathbf{B}_1\varepsilon_{t+1}\varepsilon_t + \\ &+ \mathbf{B}_1^2\mathbf{C}\varepsilon_{t+1}\varepsilon_t^2 + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_1\mathbf{C}\varepsilon_t^3 + \mathbf{A}\mathbf{B}_2\mathbf{C}\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \\ &+ \mathbf{B}_2\mathbf{B}_1\mathbf{C}\varepsilon_{t+1}\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \mathbf{B}_2^2\mathbf{C}\varepsilon_t^2\varepsilon_{t-1} + \\ &+ \left(\mathbf{B}_2\mathbf{A}^2\mathbf{C} + \mathbf{A}\mathbf{B}_1\mathbf{C}\right)\delta^2 + \left(\mathbf{B}_2\mathbf{A}^2\mathbf{C} + \mathbf{A}\mathbf{B}_1\mathbf{C}\right)\left(\varepsilon_t^2 - \delta^2\right)\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}Y_t &= \mathbf{H}\mathbf{z}_{t-2} + \mathbf{HAC}\varepsilon_{t-1} + \mathbf{H}\mathbf{B}_2\mathbf{C}\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + \\ &+ \mathbf{H}\mathbf{B}_1\mathbf{C}\left(\varepsilon_{t-1}^2 - \delta^2\right) + \mathbf{H}\mathbf{B}_1\mathbf{C}\delta^2\end{aligned} \tag{27}$$

Wartości oczekiwane wektora stanu i obserwacji oszacowane na podstawie informacji dostępnych w chwili $t-1$ określone są wzorami (28) i (29).

$$E\left(\mathbf{z}_t \middle| t-1\right) = \mathbf{A}E\left(\mathbf{z}_{t-1}\right) + \left(\mathbf{B}_2\mathbf{A}^2\mathbf{C} + \mathbf{A}\mathbf{B}_1\mathbf{C}\right)\delta^2, \tag{28}$$

$$E\left(Y_t \middle| t-1\right) = \mathbf{H}E\left(\mathbf{z}_{t-2}\right) + \mathbf{H}\mathbf{B}_1\mathbf{C}\delta^2. \tag{29}$$

Dla wartości Q>2 należy w pierwszym kroku postępować tak samo jak w przypadku Q=2, a następnie wprowadzać kolejne podstawienia w celu uzyskania odpowiedniej formy równania stanu i obserwacji.

ZASTOSOWANIE MODELI DWULINIOWYCH DLA EKONOMICZNYCH SZEREGÓW CZASOWYCH

Badaniu zostały poddane indeksy giełdowe WIG, WIG20, WIG-BANK, WIG-TELE, WIG-SPOZ, WIG-BUDO oraz WIG-INFO. Wszystkie szeregi czasowe były analizowane w okresie głównym 01.01.1997-30.06.2005. Dodatkowo szeregi zbadano w dwóch podokresach 01.01.1997-17.11.2000 oraz 18.11.2000-300.06.2005. Decyzja o utworzeniu dwóch podokresów spowodowana była faktem wprowadzenia w 17.11.2000 systemu WARSET, co mogło mieć znaczny wpływ na wycenę spółek i ostatecznie na własności indeksów. Dokonano analizy statystycznej logarytmicznych stóp zwrotu w okresie głównym oraz podokresach. Stwierdzono występowanie zjawiska skośności w większości przypadków. Natomiast w przypadku wszystkich indeksów odnotowano znacznie podwyższoną kurtozę. Przeprowadzono również test Boxa-Ljunga[2] i test Engla[3]. Dla większości indeksów stwierdzono statystycznie istotną autokorelację logarytmicznych stóp zwrotu. Test Engla wykazał statystycznie istotną autokorelację między kwadratami logarytmicznych stóp zwrotu dla wszystkich analizowanych szeregów.

Ważną kwestią przed zastosowaniem modelu do danych empirycznych jest prawidłowe rozpoznanie, czy badacz ma do czynienia z nieliniowością w warunkowej wartości średniej, czy w warunkowej wariancji. Okazuje się jednak, że zarówno procesy dwuliniowe $BL(P,Q)$, jak i procesy $GARCH(r,z)$ posiadają

[2] Liczba branych pod uwagę rzędów opóźnienia wyniosła 12 oraz 24.
[3] Przyjęto rząd opóźnienia 2 oraz 4.

podobną strukturę autokorelacyjną kwadratów obserwacji, na podstawie której są one odróżniane od modeli liniowych. Oznacza to, że na podstawie testu ARCH badacz nie jest w stanie wskazać jednoznacznie na proces $BL(P,Q)$ czy proces $GARCH(r,z)$[4]. Ponieważ istnieje możliwość pomyłki w specyfikacji modelu, dlatego też w przypadku analizy finansowych szeregów czasowych autorzy proponują przyjęcie modelu $AR(p)-BL(P,Q)-GARCH(r,z)$ postaci

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i} + \sum_{k=1}^{P}\sum_{l=1}^{Q} \varphi_{kl} y_{t-k}\eta_{t-l} + \eta_t , \tag{30}$$

$$\eta_t = \sqrt{h_t}\,\varepsilon_t ,\ h_t = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{z} h_{t-j} , \tag{31}$$

gdzie $\alpha_i, \varphi_{kl}, \gamma_i, \beta_j$ są parametrami procesu, a ε_t jest niezależną zmienną losową ze skośnego rozkładu t- Studenta $t_n^{\zeta}(0,\delta)$. Parametr n oznacza liczbę stopni swobody rozkładu, a wartość parametru ζ ma wpływ na skośność rozkładu.

Logarytm funkcji wiarygodności, przy szacowanych parametrach $\{\alpha_i, \varphi_{kl}, \gamma_i, \beta_j, n, \xi\}$, jest postaci[5]

$$\begin{aligned} &\ln L(y_1; y_2,..., y_T, \alpha_i, \varphi_{kl}, \gamma_i, \beta_j, n, \xi) = \\ &\sum_{t=1}^{T} (-0{,}5\ln\pi(n-2) + \ln\Gamma((n+1)/2) - \ln\Gamma(n/2) + \\ &\quad + \ln(2/(\xi+(1/\xi))) + \ln s - 0{,}5\ln h_t \\ &\quad + (n+1)\ln(1+((sy_t+m)^2\xi^K)/(n-2)) \end{aligned} \tag{32}$$

gdzie

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i} + \sum_{k=1}^{P}\sum_{l=1}^{Q} \varphi_{kl} y_{t-k}\varepsilon_{t-l}}{\sqrt{h_t}} \tag{33}$$

$$m = \frac{\Gamma((n-1)/2)\sqrt{n-2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n/2)}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) \tag{34}$$

$$s = \sqrt{\left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1\right) - m^2} \tag{35}$$

[4] Porównaj Bruzda (2003).

[5] Parametr n oznacza liczbę stopni swobody i w przypadku rozkładu normalnego przyjmuje wartość 30, parametr ξ odpowiada za skośność rozkładu i przyjmuje wartości z przedziału (0,1) dla rozkładu lewostronnie asymetrycznego oraz wartości z przedziału $(1,+\infty)$ dla rozkładu prawostronnie asymetrycznego.

$$K = \begin{cases} -2 & dla \quad y(t) \geq -\frac{m}{s} \\ +2 & dla \quad y(t) < -\frac{m}{s} \end{cases} \tag{36}$$

Przyjęto dwie wyjściowe specyfikacje szacowanych modeli. Pierwszą założoną specyfikację stanowi model $AR(p)-BL(P,Q)-GARCH(r,z)$, natomiast w przypadku drugiej specyfikacji przyjęto model $AR(p)-GARCH(r,z)$. Następnie po oszacowaniu obydwu modeli za pomocą kryterium informacyjnego Schwarza zostanie rozstrzygnięte zagadnienie, czy dodanie do modelu $AR(p)-GARCH(r,z)$ struktury dwuliniowej polepszyło jego dopasowanie do danych empirycznych. Ze względu na ograniczenie rozmiaru tekstu referatu, przedstawiono tylko przykładowe modele dla logarytmicznych stóp zwrotu indeksu WIG-TELE.

Tabela 1 Wyniki estymacji parametrów modeli dla indeksu WIG-TELE w okresie 01.01.1997-30.06.2005

	$AR(1)-BL(1,1)-GARCH(1,1)$		$AR(1)-GARCH(1,1)$	
Parametry	Oceny	t-Studenta	Oceny	t-Studenta
α_1	0,06	2,99	0,064	2,99
φ_{11}	0,98	1,86		
γ_0	0,000009	3,85	0,0000087	3,8
γ_1	0,09	7,18	0,09	7,16
β_1	0,89	74,07	0,89	75
n	7,17	6,34	7,16	6,37
ζ	1,007	33	1,01	32,65
K. Schwarza	-4,7293		K. Schwarza	-4,7314

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2 Wyniki estymacji parametrów modeli dla indeksu WIG-TELE w okresie 01.01.1997-17.11.2000

	$AR(1)-BL(1,1)-GARCH(1,1)$		$AR(1)-GARCH(1,1)$	
Parametry	Oceny	t-Studenta	Oceny	t-Studenta
α_1	0,1	3,29	0,11	3,38
φ_{11}	1,89	2,61		
γ_0	0,000054	3,29	0,000046	3,21
γ_1	0,18	4,43	0,13	4,34
β_1	0,79	21,19	0,81	23,6
n	7,07	3,69	6,919	3,76
ζ	0,94	22,59	0,96	2,97
K. Schwarza	-4,3734		K. Schwarza	-4,3737

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3 Wyniki estymacji parametrów modeli dla indeksu WIG-TELE w okresie 18.11.2000-30.06.2005

	$BL(1,1)-GARCH(1,1)$		$GARCH(1,1)$	
Parametry	Oceny	t-Studenta	Oceny	t-Studenta
φ_{11}	-0,56	0,64		
γ_0	0,0000056	2,5	0,0000056	2,49
γ_1	0,07	4,51	0,07	4,53
β_1	0,91	56,27	0,91	56,1
n	6,49	6,32	6,54	6,31
ζ	1,04	23,04	1,05	23,68
K. Schwarza	-5,001		K. Schwarza	-5,007

Źródło: opracowanie własne.

PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono model dwuliniowy, jego budowę, własności oraz metody estymacji. Model ten wykorzystano w empirycznej analizie indeksów giełdowych, gdzie dokonano próby opisu logarytmicznych stóp zwrotu. Otrzymane wyniki pozwoliły na porównanie modelu ze strukturą dwuliniową $AR(p)-BL(P,Q)-GARCH(r,z)$ z modem $AR(p)-GARCH(r,z)$. Uzyskane wartości kryterium informacyjnego Schwarza, dla modeli $AR(p)-BL(P,Q)-GARCH(r,z)$, $AR(p)-GARCH(r,z)$, różnią się dopiero na trzecim miejscu po przecinku (dla większości modeli), co w przypadku poprawnie oszacowanych modeli uniemożliwia ocenę faktu, czy dodanie do modelu $AR(p)-GARCH(r,z)$ struktury dwuliniowej polepszyło jego dopasowanie do danych empirycznych.

Badanie pozwoliło również na wysunięcie wniosku, iż w poszczególnych podokresach analizy może występować zjawisko autokorelacji dla stóp zwrotu, jak i zanikać, co należy brać pod uwagę w specyfikacji modeli. W przypadku wykorzystania w modelach skośnego rozkładu t-studenta uzyskiwane były statystycznie istotne wartości ocen parametrów ζ oraz n, co potwierdza zasadne przyjęcie tego rozkładu za rozkład warunkowy. Estymacja modeli w podokresach pozwoliła na identyfikację zmienności wartości ocen parametrów ζ oraz n, co świadczy o zmieniających się w czasie skośności rozkładów oraz kurtozy. W przypadku niektórych indeksów, wprowadzenie systemu WARSET miało wpływ na zanik struktury nieliniowej w wartości oczekiwanej, w tym sensie, że parametr φ_{11} odpowiedzialny za strukturę dwuliniową okazał się w podokresie 18.11.2000-30.06.2005 statystycznie nieistotny.

BIBLIOGRAFIA

Bruzda J. (2003) Procesy dwuliniowe i procesy GARCH w modelowaniu finansowych szeregów czasowych, Przegląd Statystyczny 2.

Doman M.,Doman R. (2004) Ekonometryczne modelowanie dynamiki rynku finansowego, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.

Durbin J., Koopman S.J. (2001) Time Series Analysis by State Space Methods, Oxford University Press, New York.

Granger C. W. J., Andersen A. P. (1978) An Introdution to Bilinear Time Series Models, Gottingen: Vandenhoeck and Ruprecht.

Subba Rao T., Gabr M.M. (1980) An Introduction to Bispectral Analysis and Bilinear Time Series Models, Springer-Verlag, Berlin.

THE METHODS OF ESTIMATING THE PARAMETERS OF BILINEAR MODELS

Abstract: In the paper we present stochastic process which is called bilinear process, the structure of the process and its properties. Then we present the representation of the state space for the bilinear model. Finally, we show the methods of estimating the parameters of bilinear models and some empirical examples as well.

Key words: bilinear model, GARCH model