METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XII/2, 2011, str. 168–179

WYKORZYSTANIE MIAR MATEMATYCZNYCH I BIZNESOWYCH DO PORÓWNANIA MODELI MACIERZY MIGRACJI STOSOWANYCH W ANALIZIE RYZYKA KREDYTOWEGO

Urszula Grzybowska, Marek Karwański
Katedra Informatyki, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
e-mails: urszula_grzybowska@sggw.pl, marek_karwanski@sggw.pl

Streszczenie: Modele ryzyka kredytowego, używane w bankach, bazują na modelach prawdopodobieństwa zajścia określonych zdarzeń (defaultów). Szeroka klasa tych modeli wykorzystywanych obecnie w praktyce opiera się na estymacji intensywności zdarzeń (ang. intensity-based models). W niniejszej pracy porównujemy wyniki uzyskane przy użyciu modeli Markowa oraz uogólnionych modeli liniowych (GLMM). W pracy przedstawiamy porównanie macierzy migracji w oparciu o różne miary odległości, miary uwzględniające prędkość zbieżności do defaultu oraz miary oparte na teorii absorbujących łańcuchów Markowa. Stosowane miary porównania macierzy migracji odmiennie odzwierciedlają różnice wartości klienta istotne z punktu widzenia biznesu. Modele Markowa dają najlepsze estymatory „biznesowe”, ale są trudne w praktycznych zastosowaniach.

Słowa kluczowe: macierze migracji, łańcuchy Markowa, łańcuchy absorbujące, uogólnione modele liniowe (GLMM), ryzyko kredytowe, SVD, wartości własne macierzy

WSTĘP

Modele ryzyka kredytowego używane w bankach bazują na modelach zakładających prawdopodobieństwo zajścia określonych zdarzeń. Stosowane są systemy ratingowe mierzące „zdolność kredytową klienta” i procesy zmian ratingów w czasie na podstawie danych historycznych. W ramach systemów ratingowych kredytobiorca jest przyporządkowany do jednej z klas ratingowych, w zależności od oceny zdolności kredytowej. W bankach stosowanych jest od 8 do 18 klas ratingowych klasyfikujących klientów. W szczególności zaklasyfikowanie klienta do klasy „default" oznacza, że oczekiwana jest strata, pożyczka ściągalna jest w zbyt niskim stopniu lub istnieją opóźnienia w płatnościach powyżej 90 dni. Szeroka klasa modeli wykorzystywanych obecnie w praktyce (np. CreditMetrics) opiera się na koncepcji intensywności zdarzeń. W roku 1997 Jarrow [Jarrow i in. 1997] zastosował do analizy intensywności podejście łańcuchów Markowa. Macierze migracji można również modelować przy pomocy statystycznych uogólnionych modeli liniowych dla badań longitudinalnych (GLMM), rozpatrując stany (klasy ratingowe) w dyskretnych punktach czasowych jako zdarzenia powiązane. Stosowane miary matematyczne porównania macierzy migracji nie odzwierciedlają różnic istotnych z punktu widzenia wyliczenia wartości klienta. Modele prowadzą do różnych wyników finansowych. W niniejszej pracy porównujemy estymatory prawdopodobieństw uzyskanych z modeli Markowa oraz modeli GLMM [Agresti 2002], [Diggle 2002]. Porównania oparto na miarach odległości pomiędzy macierzami migracji oraz na miarach „biznesowych" uwzględniających prędkość zbieżności do defaultu. Zastosowano także porównywania macierzy oparte na teorii absorbujących łańcuchów Markowa.

W pracy przedstawiamy elementy teorii łańcuchów Markowa oraz omawiamy krótko miary stosowane do porównywania macierzy migracji. Następnie omawiamy dane, a także uzyskane wyniki.

SKOŃCZONE ŁAŃCUCHY MARKOWA I ICH ZASTOSOWANIE

Niech E będzie zbiorem skończonym elementów, które nazywamy stanami. Niech wektor $p = [p_i]_{i\in E} = [p(i)]_{i\in E}$ będzie rozkładem prawdopodobieństwa na E. Atomy tego rozkładu nazywają się prawdopodobieństwami początkowymi, zaś wektor p rozkładem początkowym. Przez $P = [p(i,j)]_{i,j\in E} = p_{ij}$ oznaczmy macierz stochastyczną, której elementy p_{ij} oznaczają prawdopodobieństwa przejścia ze stanu i do stanu j, $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$. Macierz $P = [p_{ij}]$ nazywamy macierzą przejścia łańcucha Markowa [Feller, 1966].

Jeśli P jest macierzą przejścia łańcucha Markowa w jednym kroku, to P^k oznacza macierz przejścia w k krokach. Każda macierz stochastyczna może być macierzą przejścia pewnego łańcucha Markowa.

Wyznaczanie macierzy migracji w oparciu o Modele Łańcuchów Markowa

Pierwsza praca dotycząca zastosowania łańcuchów Markowa w modelowaniu opłacalności kredytów ukazała się w 1962 r. [Cyert i in. 1962]. Kolejno w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych XX wieku ukazało się szereg publikacji dotyczących zastosowania łańcuchów Markowa w modelowaniu ryzyka kredytowego. W spotykanych w literaturze tematu rozważaniach oraz w zastosowaniach modeli przyjmuje się, że zmiany ratingów można opisać za pomocą skończonego, jednorodnego, pochłaniającego łańcucha Markowa o macierzy przejścia $P = [p_{ij}]$, wyznaczonej na podstawie danych empirycznych jednym z kilku sposobów. Modelowanie ryzyka kredytowego w oparciu o teorię łańcuchów Markowa jest uzasadnione tylko dla stosunkowo krótkich okresów czasowych. Założenie jednorodności lub inaczej niezmienniczości w czasie nie jest zazwyczaj spełnione. Brak niezmienniczości w czasie, zauważony już w [Frydman 1984, Frydman i in. 1985], spowodowany jest najczęściej czynnikami zewnętrznymi (np. okresy cyklu gospodarczego). Modele zmiany czynników zewnętrznych rzadko stosowane są w praktyce. Zaproponowany w [Hőse i in. 2002] test niezmienniczości w czasie wymaga dostatecznie dużej próby dla każdego wyrazu macierzy, a jak wiadomo, migracje poza przekątną macierzy są stosunkowo nieliczne. Z tego też powodu elementy leżące na przekątnej są szacowne z dużą dokładnością, zaś elementy poza przekątną, z dużym błędem. Szczególną uwagę należy zwrócić na zera występujące w macierzach migracji. Zero oznacza brak albo niemożliwość migracji, a to z punktu widzenia zastosowań nie jest pożądane. Z punktu widzenia zastosowań w ocenie ryzyka kredytowego bardzo ważna jest ostatnia kolumna macierzy migracji, która przedstawia prawdopodobieństwa migracji do stanu niewypłacalności (default). Macierze przejścia stosowane do opisu migracji klientów są: diagonalnie dominujące, nieujemne, stochastyczne (suma elementów w wierszu wynosi 1), mają największą wartość własną równą 1. Ich pozostałe wartości własne są bliskie 1, posiadają stan pochłaniający (stan default).

W naszej pracy będziemy opierać się na ratingu zaproponowanym w Moody's Investors Service, obejmującym 8 stanów: „Aaa", „Aa", „A", „Baa", „Ba", „B", „Caa_C" oraz stan pochłaniający „D". Opis sposobu klasyfikacji kredytobiorcy do jednej z klas ratingowych oraz specyfikację klas można znaleźć w dyrektywach bazylejskich lub w [Saunders 2001].

Pochłaniające łańcuchy Markowa

Macierz przejścia pochłaniającego łańcucha Markowa ze stanami absorbującymi może być zapisana w postaci kanonicznej:

$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}$, gdzie: I jest macierzą jednostkową, zaś macierz R jest macierzą przejścia ze stanów nieabsorbujących do stanów absorbujących, a macierz Q jest macierzą przejścia ze stanów nieabsorbujących do stanów nieabsorbujących. Dla absorbujących łańcuchów Markowa, korzystając z postaci kanonicznej macierzy przejścia, potrafimy wyznaczyć średni czas do momentu pochłonięcia, a także średnią liczbę pojawień się w stanach niepochłaniających przed absorpcją. Słuszne są następujące twierdzenia [Iosifoscu1987]:

Twierdzenie 1

Jeżeli łańcuch Markowa jest łańcuchem pochłaniającym, to prawdopodobieństwo osiągnięcia stanu pochłaniającego wynosi 1.

Oznacza to, że niezależnie od tego, jaki jest stan początkowy, z czasem dochodzimy do stanu absorbującego.

Własności

- $Q^n \to 0$ dla $n \to \infty$;
- Macierz $(I - Q)$ jest odwracalna;
- $(I - Q)^{-1} = \sum_n Q^n$.

Definicja

Macierz $N = (I - Q)^{-1}$ nazywamy macierzą fundamentalną pochłaniającego łańcucha Markowa.

Stwierdzenie

Wyrazy macierzy N oznaczają średnią liczbę pojawień się w stanie niepochłaniającym przed pochłonięciem.

Wektor $t = N \cdot C$, gdzie $C = [1,...,1]^T$ jest wektorem oczekiwanej (średniej) liczby kroków przed pochłonięciem dla kolejnych niepochłaniających stanów początkowych.

Twierdzenie 2

Niech b_{ij} oznacza prawdopodobieństwo takie, że pochłaniający łańcuch Markowa zostanie pochłonięty w stanie s_j, jeżeli wyszedł ze stanu niepochłaniającego s_i. Niech $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ będzie macierzą prawdopodobieństw. Wówczas $B = N \cdot R$, gdzie N jest macierzą fundamentalną łańcucha Markowa, zaś macierz R jest klatką z kanonicznej postaci macierzy przejścia, tj. $P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}$.

Zauważmy, że w naszym przypadku macierz B jest wektorem jedynek, gdyż z czasem, niezależnie od stanu początkowego, prawdopodobieństwo pochłonięcia wynosi 1.

SPOSOBY PORÓWNYWANIA MACIERZY MIGRACJI

W pracy [Jafry i in. 2004] omówiono kilka miar porównywania macierzy migracji. Wszystkie miary oparte są na miarach odległości. Niech $P = \lfloor p_{ij} \rfloor$ i $\hat{P} = \lfloor \hat{p}_{ij} \rfloor$ będą macierzami migracji. Definiujemy następujące metryki:

$$M_{DEV}(P,\hat{P}) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left|p_{ij} - \hat{p}_{ij}\right|}{2N} \tag{1}$$

$$M_{Euc}(P,\hat{P}) = \frac{\sqrt{N-1}}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(p_{ij} - \hat{p}_{ij}\right)^2} \tag{2}$$

$$M_{\max}(P,\hat{P}) = \max_{ij}\left|p_{ij} - \hat{p}_{ij}\right| \tag{3}$$

W pracy [Jafry i in. 2004] wprowadzono nową miarę opartą na rozkładzie SVD. Niech $\widetilde{P} = P - I$. Macierz $\widetilde{P}$ nazywa się macierzą mobilności. Niech:

$M_{SVD}(P) := \frac{\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\lambda_i(\widetilde{P}^T\widetilde{P})}}{N}$, gdzie λ_i są wartościami własnymi macierzy $\widetilde{P}^T\widetilde{P}$, wartościami szczególnymi macierzy $\widetilde{P}$. Miara otrzymana przy pomocy wartości szczególnych pozwala na rozróżnienie macierzy przejścia względem ich mobilności, czyli różnic wynikających z siły migracji między stanami. Dla celów porównania macierzy definiujemy odległość:

$$M_{SVD}(P,\hat{P}) = \left|M_{SVD}(P) - M_{SVD}(\hat{P})\right| \tag{4}$$

Przedstawione powyżej miary (1), (2) i (3) pozwalają porównać macierze migracji bazując na różnicach między wyrazami. Miara (4) mierzy siłę migracji między stanami. Dla celów biznesowych istotne są informacje wynikające z ostatniej kolumny macierzy migracji, kolumny prawdopodobieństw migracji do stanu default. Niestety, matematyczne miary porównywania macierzy nie odzwierciedlają różnic między macierzami względem ostatniej kolumny macierzy [Jafry i in. 2004]. Stąd zachodzi konieczność stosowania metod porównywania macierzy uwzględniających tło biznesowe: szybkość zbieżności do stanu default oraz prawdopodobieństwa przejścia do stanu default.

W pracy proponujemy porównanie oparte na podstawowych własnościach absorbujących łańcuchów Markowa, a także na pomiarze prędkości zbieżności do defaultu opisywanej przez drugą wartość własną macierzy migracji oraz badaniu i porównywaniu kolejnych potęg macierzy migracji. Oznacza to, że do badania różnic między macierzami wykorzystujemy ich własności dla długich okresów czasowych.

DANE

Do analizy porównawczej macierzy migracji wykorzystane zostały dane wygenerowane na podstawie rzeczywistej macierzy migracji (Tabela 1)[1].

Tabela 1. Macierz migracji

	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa_C	D
Aaa	0,8933	0,1018	0,0036	0	0,0012	0	0	0
Aa	0,0086	0,8781	0,1065	0,0029	0,0019	0	0	0,0019
A	0	0,0153	0,9027	0,0658	0,0126	0,0027	0	0,0009
Baa	0	0,0052	0,0628	0,8356	0,0817	0,0126	0	0,0021
Ba	0,001	0	0,0029	0,0391	0,8418	0,1035	0,0039	0,0078
B	0	0,001	0,0019	0,0038	0,0596	0,8221	0,0298	0,0817
Caa_C	0	0	0	0,0138	0,0276	0,0741	0,6034	0,281
D	0	0	0	0	0	0	0	1

Źródło: Moody's Investors Service (2000)

Na jej podstawie wygenerowano 2000 hipotetycznych klientów z jednakowym prawdopodobieństwem w każdej klasie ratingowej („Aaa", „Aa", „A", „Baa", „Ba", „B", „Caa_C" oraz „D") co miało odpowiadać schematowi badania typu case-control. Następnie przeliczone zostały trajektorie 5 okresowe dla każdego klienta zgodnie z zadaną macierzą migracji. Dane te stanowiły bazę, na której szacowane były modele migracji. Wykorzystując różne metody estymacji otrzymaliśmy 12 macierzy przejścia. Do dalszej analizy wykorzystaliśmy 10 macierzy: uzyskaną metodą kohortową dla kilku okresów macierz PI 1 oraz PI 2, macierz uzyskaną metodą Aalena-Nelsona, A1 oraz A2, otrzymane przy wykorzystaniu uogólnionych modeli liniowych (GLMM) macierze B GLM (brzegowy model GLM) oraz T GLM (model przejścia GLM), a także macierze uzyskane za pomocą generatorów (oznaczane literą G). Opis metod estymacji macierzy przejścia można znaleźć w [Jafry i in. 2004], [Israel i in. 200], [Jones 2005], [Rachev i in. 2009]. Sposób wyznaczania generatorów macierzy przedstawiono w [Israel i in. 2001], [Rachev i in. 2009][2]. Macierze A1 i PI 1 uzyskano w oparciu o metodę Bootstrap [Efron i in. 1993].

[1] Zastosowanie opisanych metod na danych rzeczywistych wymaga spełnienia kilku warunków pozwalających na uznanie jakości danych za wystarczającą. Będzie to przedmiotem kolejnych badań.

[2] Metody wyznaczania macierzy migracji oraz ich generatorów opisaliśmy dokładnie w pracy „Przykłady i porównanie modeli macierzy migracji stosowanych w analizie ryzyka kredytowego" przyjętej do druku w MPaR'11.

WYNIKI

Dla otrzymanych macierzy wyznaczono macierze fundamentalne oraz oczekiwane liczby kroków przed pochłonięciem dla każdego stanu początkowego. Otrzymane wyniki przedstawiono w Tabeli 2.

Tabela 2. Średnia liczba kroków przed migracją do stanu „default” dla kolejnych stanów początkowych

	B GLM	B GLM G	A1	T GLM	T GLM G	PI 2	PI 2 G	A2	PI 1	PI 1 G
Aaa	69.09	68.12	73.08	48.03	45.19	75.58	74.61	74.16	21.08	21.04
Aa	62.69	62.09	64.66	43.97	41.58	66.85	66.37	65.77	19.37	19.36
A	55.61	55.18	57.32	40.95	38.87	59.03	58.84	58.46	17.33	17.33
Baa	45.04	44.67	47.74	37.02	34.57	49.20	49.06	48.40	13.81	13.81
Ba	33.60	33.42	33.05	26.80	25.78	33.90	33.93	32.99	9.87	9.87
B	24.93	24.84	21.06	21.98	21.21	20.80	20.82	20.31	7.84	7.84
Caa_C	11.90	11.86	11.71	10.67	10.47	10.48	10.57	10.26	4.24	4.28

Źródło: obliczenia własne

W pracy [Jafry i in. 2004] opisano zależność między prędkością zbieżności do defaultu a wartościami własnymi macierzy. Mianowicie, prędkość zbieżności do defaultu może być szacowana poprzez drugą w kolejności wartość własną macierzy przejścia. W pracy [Jafry i in. 2004] podano wzory dla macierzy stopnia 2.

Tabela 3. Porównanie drugich wartości własnych macierzy migracji

B GLM	B GLM G	A1	T GLM	T GLM G	PI 2	PI 2 G	A 2	PI 1	PI 1 G
0.977	0.976	0.977	0.972	0.970	0.977	0.9771	0.977	0.934	0.9335

Źródło: obliczenia własne

Wyznaczyliśmy wartości własne otrzymanych macierzy. Uzyskane wyniki potwierdzają fakt, że prędkość zbieżności do defaultu jest determinowana przez drugą wartość własną macierzy przejścia. Mianowicie, widoczne w tabeli 2 różnice między pierwszymi 8 macierzami i ostatnimi 2, ilustrowane są także przez różnice wielkości drugich wartości własnych macierzy z Tabeli 3. Niestety, druga wartość własna nie pozwala na uwidocznienie różnic między pierwszymi ośmioma macierzami. Stąd nie może być ona wykorzystywana do porównywania macierzy przejścia uzyskanych różnymi metodami.

W Tabelach 4a-4d porównano ostatnie kolumny potęg macierzy przejścia uzyskanych różnymi metodami oraz wyznaczono największe i najmniejsze wartości dla każdego stanu. Analizując wartości z Tabeli 4a zauważamy znaczne rozproszenie największych i najmniejszych prawdopodobieństw migracji do stanu default dla różnych stanów początkowych w przypadku macierzy migracji.

Analizując wartości z kolejnych Tabel 4b-4d zauważamy koncentrację najmniejszych i największych wartości. Najmniejsze prawdopodobieństwa migracji do defaultu, z wyjątkiem ostatniego stanu, obserwujemy dla macierzy otrzymanej bootstrapową metodą PI. Największe wartości prawdopodobieństw migracji do stanu default, z wyjątkiem ostatniego i przedostatniego stanu, otrzymaliśmy dla macierzy otrzymanych przy pomocy generatora dla modelu przejścia GLM (T GLM G). W przypadku ostatniego stanu, Caa_C, i przedostatniego B, największe prawdopodobieństwa migracji do defaultu otrzymaliśmy dla macierzy A2, uzyskanej estymatorem Aalena-Nelsona, a najmniejsze dla macierzy modelu przejścia GLM (T GLM G).

Aby zbadać, czy powyższe obserwację wynikające z zastosowań biznesowych znajdują odzwierciedlenie w miarach matematycznych, obliczyliśmy odległości między wybranymi parami macierzy. Otrzymaliśmy rezultaty, których część przedstawiamy w Tabeli 5 i Tabeli 6.

Tabela 5. Odległości między wybranymi parami macierzy

	A 1	A 1	PI 1	PI 1	PI 1	PI 2
Miara	T GLM	M GLM	M GLM	T GLM	T GLM G	TGLM
1	0.0886	0.0531	0.0358	0.0523	0.0510	0.0690
2	0.1416	0.0796	0.0467	0.0691	0.0651	0.0854
3	0.3566	0.2139	0.0738	0.1439	0.1313	0.1799
4	0.1190	0.1650	0.0357	0.0103	0.0106	0.0457

Źródło: obliczenia własne

Tabela 6. Odległości między wybranymi macierzami i ich generatorami

	PI 2	TGLM
	PI 2 G	TGLMG
1	0.0010	0.0046
2	0.0016	0.0063
3	0.0027	0.0151
4	0.0002	0.0003

Źródło: obliczenia własne

Zauważmy, że największe wartości odległości (1), (2), (3) otrzymaliśmy dla macierzy A1 i T GLM. Oznacza to, że z punktu widzenia miar matematycznych, macierze te różnią się najbardziej między sobą. Przeczy to obserwacjom związanym z miarami biznesowymi, z punktu widzenia, których największe różnice zaobserwowano między macierzami PI 1 oraz T GLM G. Rozbieżność ta wynika z faktu, że miary matematyczne uwzględniają wszystkie kolumny macierzy migracji, zaś biznesowe koncentrują się na wartościach ostatniej.

Tabela 4 a. Porównanie ostatnich kolumn macierzy migracji (wartości dla stanu D wynoszą 1)

	A1	B GLM	B GLM G	PI 2	PI 2 G	A 2	T GLM G	T GLM	PI 1	PI 1 G	max	min
Aaa	0	0.0025	0.0025	0	0.0001	0	0.0011	0	0	0	0.0025	0
Aa	0.0013	0.0026	0.0026	0.0019	0.001	0.0024	0.0129	0.0128	0.0004	0.0004	0.0129	0.0004
A	0.0005	0.0034	0.0034	0.0009	0.0009	0.0001	0.0067	0.0065	0.0002	0.0002	0.0067	0.0001
Baa	0.0035	0.0102	0.0102	0.0021	0.0021	0.0003	0.0034	0	0.0019	0.0019	0.0102	0
Ba	0.0211	0.0204	0.0204	0.0078	0.0078	0.0077	0.0382	0.0377	0.014	0.014	0.0382	0.0077
B	0.0756	0.0584	0.0586	0.0817	0.0819	0.0864	0.0666	0.0656	0.066	0.0662	0.0864	0.0584
Caa_C	0.165	0.2774	0.276	0.281	0.2795	0.2868	0.2487	0.2553	0.2535	0.2516	0.2868	0.165

Tabela 4 b. Porównanie ostatnich kolumn potęg macierzy migracji dla n=4

Aaa	0.0008	0.0104	0.0105	0.0012	0.0016	0.0015	0.0163	0.0119	0.0003	0.0003	0.0163	0.0003
Aa	0.006	0.0115	0.0115	0.0072	0.0073	0.0083	0.0507	0.0491	0.0018	0.0018	0.0507	0.0018
A	0.0076	0.0171	0.0172	0.0065	0.0067	0.003	0.0382	0.0357	0.0031	0.0032	0.0382	0.003
Baa	0.0267	0.0458	0.0461	0.0181	0.0185	0.0137	0.0475	0.0346	0.0162	0.0162	0.0475	0.0137
Ba	0.099	0.0987	0.099	0.0729	0.073	0.079	0.1638	0.1627	0.0686	0.0687	0.1638	0.0686
B	0.2608	0.2246	0.2248	0.2876	0.2878	0.2979	0.2502	0.2495	0.2141	0.2143	0.2979	0.2141
Caa_C	0.4854	0.6308	0.6295	0.6426	0.6407	0.6497	0.4504	0.4536	0.5417	0.5397	0.6497	0.4504

Źródło: obliczenia własne

Tabela 4 c. Porównanie ostatnich kolumn potęg macierzy migracji dla n=10

n=10	A1	B GLM	B GLM G	PI 2	PI 2 G	A 2	T GLM G	T GLM	PI 1	PI 1 G	max	min
Aaa	0.0083	0.03	0.0304	0.0082	0.0095	0.009	0.0805	0.0698	0.0022	0.0023	0.0805	0.0022
Aa	0.0257	0.0377	0.0381	0.0231	0.024	0.0229	0.133	0.1262	0.0078	0.0079	0.133	0.0078
A	0.0466	0.0621	0.0625	0.039	0.0397	0.0326	0.1353	0.1275	0.0184	0.0188	0.1353	0.0184
Baa	0.1095	0.1415	0.1428	0.0956	0.0967	0.0947	0.1862	0.1653	0.0576	0.0577	0.1862	0.0576
Ba	0.2679	0.2736	0.2745	0.257	0.2571	0.2721	0.3496	0.346	0.1574	0.1575	0.3496	0.1574
B	0.4994	0.4501	0.4502	0.5321	0.5322	0.5414	0.4493	0.447	0.3446	0.3447	0.5414	0.3446
Caa_C	0.7454	0.7814	0.7811	0.8012	0.7999	0.8051	0.5262	0.5266	0.6311	0.63	0.8051	0.5262

Tabela 4 d. Porównanie ostatnich kolumn potęg macierzy migracji dla n=15

Aaa	0.0237	0.0526	0.0538	0.0208	0.0233	0.0214	0.1507	0.1352	0.006	0.0062	0.1507	0.006
Aa	0.0564	0.0715	0.0725	0.0489	0.0508	0.048	0.2082	0.1969	0.0166	0.0168	0.2082	0.0166
A	0.099	0.1163	0.1172	0.0884	0.0895	0.0828	0.2261	0.2149	0.0352	0.0357	0.2261	0.0352
Baa	0.1933	0.2318	0.2339	0.1827	0.1842	0.186	0.2924	0.27	0.086	0.0862	0.2924	0.086
Ba	0.3905	0.3969	0.3979	0.3911	0.3912	0.407	0.4499	0.4446	0.1964	0.1964	0.4499	0.1964
B	0.6187	0.5638	0.5639	0.6429	0.643	0.6506	0.5355	0.5316	0.3821	0.3822	0.6506	0.3821
Caa_C	0.8244	0.8236	0.8235	0.8456	0.8444	0.8487	0.5618	0.5612	0.6447	0.6437	0.8487	0.5612

Źródło: obliczenia własne

Z drugiej strony najmniejsze różnice między macierzami są w takim samym stopniu uwzględniane przez wszystkie z omawianych przez nas metod porównywania macierzy. W szczególności, otrzymane wyniki wskazują na małe różnice między macierzami przejścia i ich odpowiednikami uzyskanymi przy pomocy generatorów.

Ciekawym wydaje się bardzo mała wartość odległości (4) dla macierzy PI 1 oraz T GLM G. Oznacza to, że pomimo znacznych różnic między tymi macierzami z punktu widzenia miar biznesowych, macierze te przedstawiają stosunkowo podobną siłę migracji między stanami. Należy zwrócić uwagę, że ostatnio wprowadzone przepisy dotyczące monitorowania statusu klientów (tzw. impairment) zmierzają w kierunku wyznaczonym przez modele matematyczne.

WNIOSKI

Uzyskane wyniki wskazują na znaczne różnice między wynikami biznesowymi uzyskanymi przy użyciu macierzy migracji wyznaczonych różnymi metodami. W szczególności metoda PI 1 wyraźnie zbyt nisko szacuje prawdopodobieństwa migracji do defaultu, zaś metoda T GLM przeszacowuje prawdopodobieństwa migracji do defaultu. Stąd też wydaje nam się uzasadnionym, wykorzystywanie bezpośredniej metody PI do celu estymacji macierzy migracji (PI 2 lub PI 2 G). Metoda ta jest najprostszą z wykorzystywanych metod. Rezultaty, które nie wskazują na przeszacowanie lub niedoszacowanie prawdopodobieństw migracji do defaultu, otrzymujemy także przy pomocy macierzy brzegowej modelu GLM (B GLM oraz B GLM G). Dobrą metodą jest estymator Aalena – Nelsona (macierz A1). Metoda ta jednakże jest dość trudna w praktycznych zastosowaniach.

BIBLIOGRAFIA

Agresti A. (2002) Categorical Data Analysis, Wiley Series in Probability and Statistics.

Basel Committee on Banking Supervision The Internal Ratings-Based Approach. Consultative Document (2001).

Diggle P. (2002) Analysis of Longitudinal Data, Oxford University Press, USA.

Cyert R. M. Davidson H. J., Thomson G. L. (1962) Estimation of Allowance for Doubtful Accounts by Markov Chains, Mgmt. Sci. 8, 287-303.

Efron, B. and Tibshirani, R. J. (1993) An Introduction to the Bootstrap, Chapman & Hall, New York.

Feller W. (1966) Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa PWN, Warszawa.

Frydman H., Kallberg J. G,. Kao L. D. (1985) Testing the Adequacy of Markov Chain and Mover-Stayer Models as Representations of Credit Behavior," Operations Research", Vol. 33.

Frydman H. (1984) Maximum Likelihood Estimation in the Mover-Stayer Model," Journal of the American Statistical Association", Vol. 79.

Hőse, S. Huschens S. Wania R. (2002) Rating Migrations. "Applied Quantitative Finance: Theory and Computational Tools" Ed. Hőrdle W., Kleinow T., Stahl G. Springer.

Iosifoscu M. (1987) Skończone Łańcuchy Markowa. WNT.

Israel R. B., Rosentahl J. S. Wei J. Z. (2001) Finding generators for Markov Chains via empirical transition matrices, with applications to credit rating "Mathematical Finance", Vol. 11, No. 2.

Jafry Y., Schuermann T. (2004) Measurement, estimation and comparison of credit migration matrices "Journal of Banking and Finance", Vol. 28, No. 11.

Jarrow R. A., Lando D., Turnbull S. M. (1997) A Markov model for the term structure of credit risk spreads. "Review of Financial Studies ", Vol. 10, No. 2.

Jones M. T.: Estimating Markov Transition Matrices Using Proportions Data: An Application to Credit Risk. IMF Working Paper WP/05/219.

Lando D., Skodeberg T. M. (2002) Analyzing rating transitions and rating drift with continuous obserwations "Journal of Banking and Finance", No. 26.

Moody's Investors Service (2002),"Historical Default Rates of Corporate Bond Issuers, 1920-1999" , p 25.

Moody's, http://www.moodys.com/

Rachev S. T. Trueck S. (2009) Rating Based Modeling of Credit Risk Theory and Application of Migration Matrices. Academic Press.

Saunders A. (2001) Metody pomiaru ryzyka kredytowego, Oficyna Ekonomiczna Kraków.

Schuermann T. Credit Migration Matrices w Encyclopedia Quantitative Risk Analysis & Assessment, http://www.wiley.com//legacy/wileychi/risk/

S&P, http://www.standardandpoors.com/ratings/en/eu

APPLICATION OF MATHEMATICAL MEASURES AND BUSINESS MEASURES TO COMPARE MIGRATION MATRICES USED IN CREDIT RISK ANALYSIS

Abstract: Credit risk models used in banks are based on probability models for occurrence of default. A vast class of these models is based on the notion of intensity In this paper we compare results obtained within Markov chain approach and with help of statistical longitudinal models (GLMM) in which states (rating classes) in discrete time points are regarded as matched pairs. The comparison of obtained migration matrices is based on various distance measures, properties of absorbing Markov chains and convergence to default. Various methods of matrix comparison reflect business based differences between clients in a different way. Markov models give good business estimators but are difficult to apply in practice.

Key words: migration matrices, Markov chains, absorbing Markov chains, generalized longitudinal models (GLMM), credit risk, SVD, Eigenvalues