METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XII/2, 2011, str. 322–332

ESTYMACJA PARAMETRÓW SZEREGU FOURIERA I ICH PRAKTYCZNE ZASTOSOWANIA

Sylwester Smolik
Wyższa Szkoła Informatyki i Ekonomii TWP w Olsztynie
e-mail: sylwester_smolik@sggw.pl

Streszczenie: Zjawiska okresowe – w szczególności sezonowe, proponuje się opisywać pierwszymi wyrazami rozwinięcia funkcji okresowej w szereg Fouriera. Będziemy się zajmować takimi zjawiskami, których liczby je opisujące y_t daje się rozłożyć na trzy składowe: tendencję rozwojową $f(t)$, składnik okresowy (w szczególności sezonowy) $z(t)$ i składnik losowy E_t. Zapisujemy ten fakt następująco:

$y_t = f(t) + z(t) + E_t \quad dla \quad t = 1, 2, \ldots, n.$

Parametry trendu $f(t)$ mogącego mieć różną postać analityczną, wyznaczamy metodą średnich. Uzyskane nowe punkty empiryczne (t, z_t) opisujemy modelem wahań okresowych w postaci sumy harmonik $z_t = s + \sum_{r=1}^{j} A_r \sin(rwt + \theta_r) - E_t$, gdzie $w = 2\pi / T$. Oszacowanie parametrów tego modelu metodą najmniejszych kwadratów ma postać:

$$\hat{s} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} z_t; \qquad \hat{\theta}_r = arctg\left(\sum_{t=1}^{n} z_t \cos(rwt) \Big/ \sum_{t=1}^{n} z_t \sin(rwt)\right);$$

$$A_r = \frac{2}{n}\left(\cos\hat{\theta}_r \cdot \sum_{t=1}^{n} z_t \sin(rwt) + \sin\hat{\theta}_r \cdot \sum_{t=1}^{n} z_t \cos(rwt)\right) \text{ dla } r = 1, 2, \ldots, j < T/2.$$

Będą przytoczone przykłady zastosowań.

Słowa kluczowe: szereg Fouriera, harmoniki, metoda najmniejszych kwadratów.

WSTĘP

Badając pewne zjawisko, dysponujemy zwykle ciągiem obserwacji (t, y_t) dla $t = 1, 2, \ldots, n$. Nie znamy jednak funkcji $f(t)$ opisującej to zjawisko. Załóżmy przy tym, że zjawisko jest ciągłe, a więc funkcję $f(t)$ nieskończoną ilość razy różniczkowalną możemy rozwinąć w szereg Maclaurina: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Do opisu tego zjawiska możemy wykorzystać wielomian odpowiedniego stopnia. Estymację parametrów wielomianu metodą najmniejszych kwadratów opanowano, podaje się błędy poszczególnych parametrów i dopasowanie modelu do danych empirycznych. Ten najprostszy model opisu jest dopracowany do końca. Niestety, tak jak wiele innych modeli monotonicznych, nie rozwiązuje zjawisk okresowych w szczególności sezonowych. Funkcje okresowe proponujemy rozwijać w szereg Fouriera, oszacować jego pierwsze parametry metodą najmniejszych kwadratów i do aproksymacji punktów (t, y_t) brać taki wielomian trygonometryczny, który zapewni dobre dopasowanie modelu – podobnie jak przy wielomianach algebraicznych. Podstawy teoretyczne tego postępowania są następujące.

ESTYMACJA PARAMETRÓW SUMY HARMONIK

Jeżeli funkcja $f(t)$ spełnia w przedziale $< 0; T >$ warunki Dirichleta, a ponadto jest okresowa $f(t) = f(t+T)$ to jest rozwijalna w szereg trygonometryczny Fouriera $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nwt + b_n \sin nwt)$ dla każdego t. Szeregowi Fouriera nadamy wygodniejszą w estymacji postać analityczną (wygodniejszą w posługiwaniu się nim):

$$f(t) = s + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos nwt + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin nwt \right) =$$

$$= s + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\sin\theta_n \cdot \cos nwt + \cos\theta_n \cdot \sin nwt \right) =$$

$$= s + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\theta_n + nwt\right), \text{ gdzie } w = 2\pi / T.$$

Będziemy zajmować się takimi procesami, których liczby je opisujące y_t daje się rozłożyć na trzy składowe: tendencję rozwojową (trend) $f(t)$, składnik okresowy (w szczególności sezonowy) $z(t)$ i składnik losowy E_t. Zapiszemy ten fakt następująco:

$$y_t = f(t) + z(t) + E_t \quad \text{dla} \quad t = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Należy podkreślić, że ten sposób interpretowania opiera się na założeniu, że wymienione składowe szeregu czasowego są wynikiem działania trzech różnych kompleksów przyczyn działających niezależnie. Mając ciąg punktów empirycznych (t, y_t) dla $t = 1, 2, \ldots, n$ obrazujących przebieg badanego zjawiska potrafimy wyznaczyć tendencję rozwojową $f(t)$. Najwygodniej jest estymować jej parametry metodą średnich. Tę zerową sumę liczb dodatnich i ujemnych

$$z_t = y_t - \hat{f}(t) - E_t \tag{2}$$

opiszemy modelem wahań okresowych w postaci sumy harmonik:

$$z_t = s + \sum_{r=1}^{j} A_r \sin(rwt + \theta_r) - E_t \quad \text{dla} \quad t = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Parametry harmonik estymujemy klasyczną metodą najmniejszych kwadratów, z (3) otrzymujemy:

$$G(s, A_r, \theta_r, w) = \sum_{t=1}^{n} E_t^2 = \sum_{t=1}^{n} \left[z_t - s - \sum_{r=1}^{j} A_r \sin(rwt + \theta_r) \right]^2 = (\min) \tag{4}$$

Warunkiem koniecznym istnienia minimum funkcji G (właściwie najmniejszej jej wartości) jest zerowanie się jej pochodnych cząstkowych. Dlatego

$$\frac{\partial G}{\partial s} = 2\sum_{t=1}^{n} \left[z_t - s - \sum_{r=1}^{j} A_r \sin(rwt + \theta_r) \right] (-1) = 0;$$

$$\frac{\partial G}{\partial A_r} = 2\sum_{t=1}^{n} \left[z_t - s - \sum_{r=1}^{j} A_r \sin(rwt + \theta_r) \right] \cdot \left[-\sin(rwt + \theta_r) \right] = 0 \text{ dla } r = 1, 2, \ldots, j;$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta_r} = 2\sum_{t=1}^{n} \left[z_t - s - \sum_{r=1}^{j} A_r \sin(rwt + \theta_r) \right] \cdot \left[-A_r \cos(rwt + \theta_r) \right] = 0 \text{ dla } r = 1, 2, \ldots, j;$$

$$\frac{\partial G}{\partial w} = 2\sum_{t=1}^{n} \left[z_t - s - A_1 \sin(1wt + \theta_1) - A_2 \sin(2wt + \theta_2) - \cdots - A_j \sin(jwt + \theta_j) \right] \cdot$$

$$\cdot \left[-A_1 \cos(1rwt + \theta_1) \cdot t - A_2 \cos(2wt + \theta_2) \cdot 2t - \cdots - A_j \cos(jwt + \theta_j) \cdot jt \right] = 0.$$

Wykonując uproszczenia, mnożenia, uwzględniając wszystkie interesujące nas zmienne, otrzymujemy tzw. układ równań normalnych odpowiadający wprowadzonemu modelowi (3):

$$
\begin{array}{l}
\hat{s}\cdot n + \hat{A}_1\cdot\sum_{t=1}^{n}\sin(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1) + \cdots + \hat{A}_j\cdot\sum_{t=1}^{n}\sin(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j) = \sum_{t=1}^{n} z_t \\
j\left\{\begin{array}{l}
\hat{s}\cdot\sum_{t=1}^{n}\sin(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1) + \hat{A}_1\cdot\sum_{t=1}^{n}\sin^2(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1) + \cdots + \hat{A}_j\cdot\sum_{t=1}^{n}\sin(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1)\sin(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j) = \sum_{t=1}^{n} z_t\sin(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1) \\
\hat{s}\cdot\sum_{t=1}^{n}\sin(2\hat{w}t+\hat{\theta}_2) + \hat{A}_1\cdot\sum_{t=1}^{n}\sin(2\hat{w}t+\hat{\theta}_2)\sin(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1) + \cdots + \hat{A}_j\cdot\sum_{t=1}^{n}\sin(2\hat{w}t+\hat{\theta}_2)\sin(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j) = \sum_{t=1}^{n} z_t\sin(2\hat{w}t+\hat{\theta}_2) \\
\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\hat{s}\cdot\sum_{t=1}^{n}\sin(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j) + \hat{A}_1\cdot\sum_{t=1}^{n}\sin(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j)\sin(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1) + \cdots + \hat{A}_1\cdot\sum_{t=1}^{n}\sin^2(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j) = \sum_{t=1}^{n} z_t\sin(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j)
\end{array}\right. \\
j\left\{\begin{array}{l}
\hat{s}\cdot\sum_{t=1}^{n}\cos(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1) + \hat{A}_1\cdot\sum_{t=1}^{n}\cos(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1)\sin(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1) + \cdots + \hat{A}_j\cdot\sum_{t=1}^{n}\cos(1\hat{w}t+\hat{\theta}_j)\sin(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j) = \sum_{t=1}^{n} z_t\cos(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1) \\
\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\hat{s}\cdot\sum_{t=1}^{n}\cos(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j) + \hat{A}_1\cdot\sum_{t=1}^{n}\cos(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j)\sin(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1) + \cdots + \hat{A}_j\cdot\sum_{t=1}^{n}\cos(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j)\sin(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j) = \sum_{t=1}^{n} z_t\cos(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j)
\end{array}\right. \\
\hat{s}\left[\hat{A}_1\sum_{t=1}^{n} t\cos(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1) + 2\hat{A}_2\cdot\sum_{t=1}^{n} t\cos(2\hat{w}t+\hat{\theta}_2) + \cdots + j\hat{A}_j\cdot\sum_{t=1}^{n} t\cos(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j)\right] + \hat{A}_1\left[\hat{A}_1\sum_{t=1}^{n} t\sin(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1)\cos(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1) + \right. \\
\left. +2\hat{A}_2\sum_{t=1}^{n} t\sin(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1)\cos(2\hat{w}t+\hat{\theta}_2) + \cdots + j\hat{A}_j\cdot\sum_{t=1}^{n} t\sin(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1)\cos(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j)\right] + \cdots + \\
+\hat{A}_j\left[\hat{A}_1\sum_{t=1}^{n} t\sin(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j)\cos(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1) + \cdots + j\hat{A}_j\cdot\sum_{t=1}^{n} t\sin(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j)\cos(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j)\right] = \hat{A}_1\cdot\sum_{t=1}^{n} tz_t\cos(1\hat{w}t+\hat{\theta}_1) + \\
+2\hat{A}_2\cdot\sum_{t=1}^{n} tz_t\cos(2\hat{w}t+\hat{\theta}_2) + 3\hat{A}_3\cdot\sum_{t=1}^{n} tz_t\cos(3\hat{w}t+\hat{\theta}_3) + \cdots + j\hat{A}_j\cdot\sum_{t=1}^{n} tz_t\cos(j\hat{w}t+\hat{\theta}_j).
\end{array}
\qquad (5)
$$

Układ równań (5) jest bardzo skomplikowany. Jego rozwiązywanie rozpoczniemy od przekształceń i uproszczeń występujących w nim sum, oraz zakładamy znajomość T będącą liczbą naturalną. Korzystamy z J.M. Ryżyk i J.S. Gradsztejn – Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów. PWN Warszawa 1964, s. 39 wzór 1.342.

$1^{\circ} \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2} \operatorname{cosec} \frac{x}{2}$; $2^{\circ} \sum_{k=0}^{n} \cos kx = \cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2} \operatorname{cosec} \frac{x}{2} + 1$.

Obliczamy

$$S_1 = \sum_{t=1}^{n} \sin(kwt + \theta_k) = \cos\theta_k \cdot \sum_{t=1}^{n} \sin kwt + \sin\theta_k \cdot \sum_{t=1}^{n} \cos kwt =$$
$$= \cos\theta_k \cdot \left(\sin \frac{n+1}{2} kw \cdot \sin \frac{n}{2} kw \cdot \operatorname{cosec} \frac{kw}{2} \right) +$$
$$+ \sin\theta_k \cdot \left(\cos \frac{n+1}{2} kw \cdot \sin \frac{n}{2} kw \cdot \operatorname{cosec} \frac{kw}{2} \right) = \tag{6}$$
$$= \sin \frac{nkw}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{kw}{2} \left(\sin \frac{(n+1)kw}{2} \cdot \cos\theta_k + \cos \frac{(n+1)kw}{2} \cdot \sin\theta_k \right) =$$
$$= \sin \frac{nkw}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{kw}{2} \cdot \sin \left[\frac{(n+1)kw}{2} + \theta_k \right] \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, j.$$

Nie tylko obliczyliśmy wartość tego typu sum, ale widzimy, że przy $n = mT$ (tzn., gdy liczba wyrazów szeregu czasowego wykorzystywana przy estymacji modelu jest wielokrotnością znanego okresu opisywanego procesu), wtedy

$$\sin \frac{nkw}{2} = \sin \frac{mT \cdot k \cdot 2\pi}{2T} = \sin(mk\pi) = 0 \tag{7}$$

oraz $$\operatorname{cosec} \frac{kw}{2} = \frac{1}{\sin \frac{k \cdot 2\pi}{2 \cdot T}} = \frac{1}{\sin \frac{k}{T}\pi} \neq \infty \quad \text{dla} \quad k < T. \tag{8}$$

Wnioskujemy z tych rozważań, że przy $n = mT$ i dla $j < T$ sumy S_1 są równe zeru. Podobnie przy $n = mT$

$$S_2 = \sum_{t=1}^{n} \cos(kwt + \theta_k) = \cos\theta_k \cdot \sum_{t=1}^{n} \cos kwt - \sin\theta_k \cdot \sum_{t=1}^{n} \sin kwt =$$
$$= \sin \frac{nkw}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{kw}{2} \cdot \cos \left[\frac{(n+1)kw}{2} + \theta_k \right] \tag{9}$$

i przy restrykcji k < T są również równe zeru.

Wiemy, że $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. Jeżeli $\frac{\alpha+\beta}{2} = kwt + \theta_k$ i $\frac{\alpha-\beta}{2} = rwt + \theta_r$ to

$\alpha = kwt + rwt + \theta_k + \theta_r = (k+r)\,wt + (\theta_k + \theta_r);\quad \beta = (k-r)\,wt + (\theta_k - \theta_r)$.

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{t=1}^{n} \sin(kwt + \theta_k)\cdot\cos(rwt + \theta_r) = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\sin\left[(k+r)wt + (\theta_k + \theta_r)\right] + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\sin\left[(k-r)wt + (\theta_k - \theta_r)\right] = \frac{1}{2}\cos(\theta_k + \theta_r)\cdot\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\sin(k+r)wt + \\
&+ \frac{1}{2}\sin(\theta_k + \theta_r)\cdot\sum_{t=1}^{n}\cos(k+r)wt + \frac{1}{2}\cos(\theta_k - \theta_r)\cdot\sum_{t=1}^{n}\sin(k-r)wt + \\
&+ \frac{1}{2}\sin(\theta_k - \theta_r)\cdot\sum_{t=1}^{n}\cos(k-r)\,wt.
\end{aligned}\tag{10}$$

Korzystając ze wzoru (1.342) w pracy przytoczonej wcześniej, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{1}{2}\cos(\theta_k + \theta_r)\cdot\sin\frac{(n+1)w(k+r)}{2}\cdot\sin\frac{nw(k+r)}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{w(k+r)}{2} + \\
&+ \frac{1}{2}\sin(\theta_k + \theta_r)\cdot\cos\frac{(n+1)w(k+r)}{2}\cdot\sin\frac{nw(k+r)}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{w(k+r)}{2} + \\
&+ \frac{1}{2}\cos(\theta_k - \theta_r)\cdot\sin\frac{(n+1)w(k-r)}{2}\cdot\sin\frac{nw(k-r)}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{w(k-r)}{2} + \\
&+ \frac{1}{2}\sin(\theta_k - \theta_r)\cdot\cos\frac{(n+1)w(k-r)}{2}\cdot\sin\frac{nw(k-r)}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{w(k-r)}{2} = \\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{nw(k+r)}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{w(k+r)}{2}\cdot\sin\left[\frac{(n+1)w(k+r)}{2} + (\theta_k + \theta_r)\right] + \\
&+ \frac{1}{2}\sin\frac{nw(k-r)}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{w(k-r)}{2}\cdot\sin\left[\frac{(n+1)w(k-r)}{2} + (\theta_k - \theta_r)\right].
\end{aligned}$$

Gdy $n = mT$, tzn. liczebność punktów empirycznych jest naturalną wielokrotnością okresu procesu, wtedy:

$\sin\frac{nw(k+r)}{2} = \sin\frac{mT(k+r)}{2}\frac{2\pi}{T} = \sin(k+r)m\pi = 0$; podobnie

$\sin\frac{nw(k-r)}{2} = \sin\frac{mT(k-r)}{2}\frac{2\pi}{T} = \sin(k-r)m\pi = 0$.

Jeśli ponadto $k < T/2$ i $r < T/2$ i $k \neq r$, to

$\sin\frac{w(k+r)}{2} = \sin\frac{k+r}{T}\pi \neq 0$, oraz $\sin\frac{w(k-r)}{2} = \sin\frac{(k-r)}{2}\frac{2\pi}{T} = \sin\frac{k-r}{T} \neq 0$.

Dlatego przy wprowadzonych restrykcjach ($j < T/2$) sumy $S_3 = 0$.

Przy $k = r$ otrzymujemy:

$$S_{3a}=\sum_{t=1}^{n}\sin(rwt+\theta_r)\cos(rwt+\theta_r)=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\sin(2rwt+2\theta_r)=$$
$$=\frac{1}{2}\cos 2\theta_r\cdot\sum_{t=1}^{n}\sin 2rwt+\frac{1}{2}\sin 2\theta_r\cdot\sum_{t=1}^{n}\cos 2rwt=$$
$$=\frac{1}{2}\cos 2\theta_r\cdot\sin\frac{(n+1)2rw}{2}\cdot\sin\frac{n2rw}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{2rw}{2}+$$
$$+\frac{1}{2}\sin 2\theta_r\cdot\cos\frac{(n+1)2rw}{2}\cdot\sin\frac{n2rw}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{2rw}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sin nrw\cdot\sin\left[(n+1)rw+2\theta_r\right]\cdot\operatorname{cosec}rw=0\rightarrow S_{3a}=0.$$

Z różnicy cosinusów wnioskujemy:

$$\begin{aligned}S_4&=\sum_{t=1}^{n}\sin(kwt+\theta_k)\sin(rwt+\theta_r)=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\cos\left[(k-r)wt+(\theta_k-\theta_r)\right]+\\&-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\cos\left[(k+r)wt+(\theta_k+\theta_r)\right]=\frac{1}{2}\cos(\theta_k-\theta_r)\cdot\sum_{t=1}^{n}\cos(k-r)wt+\\&-\frac{1}{2}\sin(\theta_k-\theta_r)\cdot\sum_{t=1}^{n}\sin(k-r)wt-\frac{1}{2}\cos(\theta_k+\theta_r)\cdot\sum_{t=1}^{n}\cos(k+r)wt+\\&+\frac{1}{2}\sin(\theta_k+\theta_r)\cdot\sum_{t=1}^{n}\sin(k+r)wt.\end{aligned}\tag{11}$$

Korzystając ze wzoru (1.342) w pracy [2] otrzymujemy:

$$\begin{aligned}S_4&=\frac{1}{2}\cos(\theta_k-\theta_r)\cdot\cos\frac{(n+1)w(k-r)}{2}\cdot\sin\frac{n(k-r)w}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{(k-r)w}{2}+\\&-\frac{1}{2}\sin(\theta_k-\theta_r)\cdot\sin\frac{(n+1)(k-r)w}{2}\cdot\sin\frac{n(k-r)w}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{(k-r)w}{2}+\\&-\frac{1}{2}\cos(\theta_k+\theta_r)\cdot\cos\frac{(n+1)(k+r)w}{2}\cdot\sin\frac{n(k+r)w}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{(k+r)w}{2}+\\&+\frac{1}{2}\sin(\theta_k+\theta_r)\cdot\sin\frac{(n+1)(k+r)w}{2}\cdot\sin\frac{n(k+r)w}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{(k+r)w}{2}=\\&=\frac{1}{2}\sin\frac{n(k-r)w}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{(k-r)w}{2}\cdot\cos\left[\frac{(n+1)(k-r)w}{2}+(\theta_k-\theta_r)\right]+\\&-\frac{1}{2}\sin\frac{n(k+r)w}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{(k+r)w}{2}\cdot\cos\left[\frac{(n+1)(k+r)w}{2}+(\theta_k+\theta_r)\right].\end{aligned}\tag{12}$$

Gdy $n=mT;\quad k,r,m\in N\quad$ i $\quad k\neq r$, wtedy:

$$\sin\frac{n(k-r)w}{2}=\sin\frac{mT(k-r)}{2}\frac{2\pi}{T}=\sin(k-r)m\pi=0\quad\text{oraz}$$

$\sin\frac{n(k+r)w}{2}=\sin\frac{mT(k+r)}{2}\frac{2\pi}{T}=\sin(k+r)m\pi=0$. Jeśli ponadto $k<T/2$ i $r<T/2$ to $\sin\frac{(k-r)w}{2}=\sin\frac{(k-r)}{2}\frac{2\pi}{T}=\sin\frac{(k-r)}{T}\pi\neq 0$ i

$\sin\frac{(k+r)w}{2}=\sin\frac{(k+r)}{2}\frac{2\pi}{T}=\sin\frac{(k+r)}{T}\pi\neq 0$.

Udowodniono więc, że przy wprowadzonych założeniach $S_4=0$.

Przy $k=r$ otrzymujemy:

$$S_{4a}=\sum_{t=1}^{n}\sin^2(rwt+\theta_r)=\sum_{t=1}^{n}\frac{1-\cos(2rwt+2\theta_r)}{2}=$$
$$=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\cos(2rwt+2\theta_r)=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos 2\theta_r\cdot\sum_{t=1}^{n}\cos 2rwt-\sin 2\theta_r\cdot\sum_{t=1}^{n}\sin 2rwt\right)=$$
$$=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos 2\theta_r\cdot\cos\frac{(n+1)2rw}{2}\cdot\sin\frac{n2rw}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{2rw}{2}-\sin 2\theta_r\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sin\frac{(n+1)2rw}{2}\cdot\sin\frac{n2rw}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{2rw}{2}\right)=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sin(nrw)\cdot\operatorname{cosec}(rw)\cdot$$
$$\cdot\cos\left[(n+1)rw+2\theta_r\right]=\frac{n}{2}.$$

Udowodniono, że przy $n=mT$ i $k,r<T/2$ (czyli $j<T/2$)

$$S_4=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad k\neq r,\\ n/2 & \text{dla} \quad k=r.\end{cases}\tag{13}$$

Układ równań normalnych (5) dla sumy harmonik przy znanym T, gdy $w=2\pi/T$, $n=mT$, $r=1,2,\dots,j<T/2$ przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
&\hat{s}\cdot n+\hat{A}_1\cdot 0+\hat{A}_2\cdot 0+\hat{A}_3\cdot 0+\ldots+\hat{A}_j\cdot 0=\sum_{t=1}^{n}z_t\\
&\hat{s}\cdot 0+\hat{A}_1\cdot 0+\hat{A}_2\cdot 0+\hat{A}_3\cdot 0+\ldots+\hat{A}_j\cdot 0=\cos\theta_1\cdot\sum_{t=1}^{n}z_t\cos 1\hat{w}t-\sin\theta_1\cdot\sum_{t=1}^{n}z_t\sin 1\hat{w}t\\
&\hat{s}\cdot 0+\hat{A}_1\cdot 0+\hat{A}_2\cdot 0+\hat{A}_3\cdot 0+\ldots+\hat{A}_j\cdot 0=\cos\theta_2\cdot\sum_{t=1}^{n}z_t\cos 2\hat{w}t-\sin\theta_2\cdot\sum_{t=1}^{n}z_t\sin 2\hat{w}t\\
&\vdots\\
&\hat{s}\cdot 0+\hat{A}_1\cdot 0+\hat{A}_2\cdot 0+\hat{A}_3\cdot 0+\ldots+\hat{A}_j\cdot 0=\cos\theta_j\cdot\sum_{t=1}^{n}z_t\cos j\hat{w}t-\sin\theta_1\cdot\sum_{t=1}^{n}z_t\sin j\hat{w}t\\
&\hat{s}\cdot 0+\hat{A}_1\cdot\frac{n}{2}+\hat{A}_2\cdot 0+\hat{A}_3\cdot 0+\ldots+\hat{A}_j\cdot 0=\cos\theta_1\cdot\sum_{t=1}^{n}z_t\sin 1\hat{w}t+\sin\theta_1\cdot\sum_{t=1}^{n}z_t\cos 1\hat{w}t\\
&\hat{s}\cdot 0+\hat{A}_1\cdot 0+\hat{A}_2\cdot\frac{n}{2}+\hat{A}_3\cdot 0+\ldots+\hat{A}_j\cdot 0=\cos\theta_2\cdot\sum_{t=1}^{n}z_t\sin 2\hat{w}t+\sin\theta_2\cdot\sum_{t=1}^{n}z_t\cos 2\hat{w}t\\
&\vdots\\
&\hat{s}\cdot 0+\hat{A}_1\cdot 0+\hat{A}_2\cdot 0+\hat{A}_3\cdot 0+\ldots+\hat{A}_j\cdot\frac{n}{2}=\cos\theta_j\cdot\sum_{t=1}^{n}z_t\sin j\hat{w}t+\sin\theta_j\cdot\sum_{t=1}^{n}z_t\cos j\hat{w}t
\end{aligned}\tag{14}$$

Przy obecnej sprawozdawczości, te dodatkowe restrykcje na dane empiryczne upraszające zasadniczo układ równań normalnych (5) nie są bardzo uciążliwe.
Z układu (14) wyznaczamy oszacowanie poszukiwanych parametrów modelu (3):

$$\hat{s} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} z_t; \qquad \hat{\theta}_r = arctg\left(\sum_{t=1}^{n} z_t \cos(r\hat{w}t) \Big/ \sum_{t=1}^{n} z_t \sin(r\hat{w}t)\right) \tag{15}$$

$$\hat{A}_r = \frac{2}{n}\left(\cos\hat{\theta}_r \cdot \sum_{t=1}^{n} z_t \sin(r\hat{w}t) + \sin\theta_r \cdot \sum_{t=1}^{n} z_t \cos(r\hat{w}t)\right) \quad \text{dla} \quad r = 1, 2, \ldots, j < T/2 .$$

Wzory (15) są przydatne szczególnie przy opisie zmienności sezonowej, znamy bowiem wtedy T. Dla obserwacji miesięcznych $\hat{w} = 2\pi/T = 2\pi/12 = \pi/6$, dla kwartalnych $\hat{w} = 2\pi/4 = \pi/2$. W przypadku jednej harmoniki zastosowano je w pracy [Smolik, 1995].

Przykład

Wartości kwartalnych przychodów operacyjnych (w tys. zł) pewnego biura turystycznego w latach 1995-2000 kształtowały się następująco:

Rok	Kwartał				Σ
	1	2	3	4	
1995	82	98	120	114	414
1996	99	109	127	121	456
1997	110	121	140	134	505
1998	120	135	159	147	561
1999	132	142	162	149	585
2000	140	156	176	154	626
Σ	683	761	884	819	3147

Przykład ten rozwiązano w książce [Zeliaś, 2004] s. 104.
My opracujemy go inaczej, stosując wprowadzoną wcześniej teorię. Wyznaczymy trend liniowy i sezonowość opiszemy harmoniką.

$$f_t = b_0 + b_1 \cdot t + \varepsilon_t \rightarrow \hat{b}_1 = \frac{\operatorname{cov}(t,y)}{\operatorname{var}(t)} = \frac{\sum ty_t - \bar{t}\cdot\sum y_t}{\sum t^2 - \bar{t}\cdot\sum t} = \frac{42609 - 12,5\cdot 3147}{4900 - 12,5\cdot 300} = 2,845;$$

$\hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}_1 \cdot \bar{t} = 131,125 - 2,845\cdot 12,5 = 95,56$. Czyli

$$\hat{f}(t) = 2,845\cdot t + 95,56; \quad z(t) = y_t - \hat{f}(t). \tag{16}$$

Na wyznaczonych punktach (t, z_t) dla $t = 1, 2, \ldots, 24$ opisujemy harmonikę $z_t = s + A\sin(wt + \theta) + \varepsilon_t$ zgodnie z wzorami (15), przyjmując $\hat{w} = 2\pi/T = 2\pi/4 = \pi/2$ (dane kwartalne). $\hat{s} = \frac{1}{n}\sum z_t = -0,795/24 = -0,033 \approx 0$;

$\hat{\theta} = arctg\left(\sum z_t \cos\hat{w}t \Big/ \sum z_t \sin\hat{w}t\right) = arctg\left[23,86/(-166,005)\right] = -0,143$;

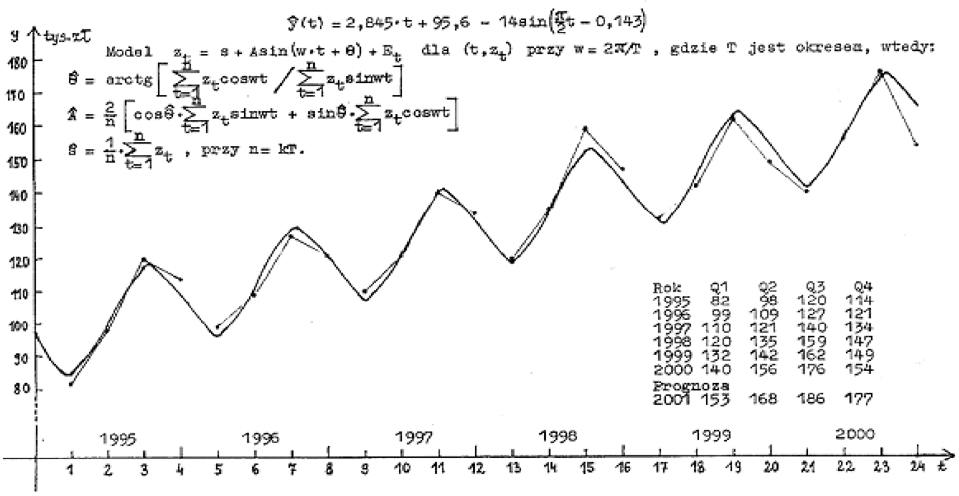
$$\hat{A} = \frac{2}{n}\left(\cos\hat{\theta}\cdot\sum z_t \sin\hat{w}t + \sin\hat{\theta}\cdot\sum z_t \cos\hat{w}t\right) = -13{,}98 \approx -14{,}0\,.$$

Ostatecznie przyjmujemy model:

$$\hat{y}(t) = 2{,}845\cdot t + 95{,}6 - 14{,}0\sin\left(\frac{\pi}{2}t - 0{,}143\right) \quad \text{w tys. zł,} \quad \text{dla} \quad t = 1,2,\ldots \tag{17}$$

Jego dopasowanie do danych empirycznych jest następujące: współczynnik zbieżności $\varphi^2 = \sum(y_t - \hat{y}_t)^2 \big/ \sum(y_t - \bar{y})^2 = 324{,}3507/11998{,}625 = 0{,}027$. Współczynnik determinacji $R^2 = 1 - \varphi^2 = 0{,}973$ – wyznaczony model tłumaczy 97,3% zmienności Y; jest to dobry model. Prognoza kwartalnych przychodów operacyjnych w 2001 r. (w tys. zł) ma postać: $\hat{y}(25) = 152{,}87$; $\hat{y}(26) = 167{,}57$; $\hat{y}(27) = 186{,}27$; $\hat{y}(28) = 177{,}26$. Różni się od podanej w książce [Zeliaś, 2004] s. 107.
Graficzny obraz tego zdarzenia zamieszczono na rys. 1.

Rys. 1. Wartości kwartalnych przychodów operacyjnych w latach 1995-2000



Źródło: obliczenia własne

LITERATURA

Borkowski B., Dudek H., Szczesny W. (2004) Ekonometria. Wybrane zagadnienia, PWN, Warszawa.

Ryżyk J.M. I Gradsztejn J.S. (1964) Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów. PWN, Warszawa.

Smolik S. (1988) Wyznaczanie parametrów funkcji Gompertza. Przegląd Statystyczny, nr 3, s. 244-253.

Smolik S. (1989) Wyznaczanie parametrów krzywych popytu. Biuletyn Informacyjny Akademii Rolniczo-Technicznej w Olsztynie, Nr 27, s. 89-107.

Smolik S. (1995) Uproszczona procedura estymacji modelu wahań okresowych. Przegląd Statystyczny, R. XLII, z. 3-4, s. 449-457.

Smolik S. (1997) Sezonowość w opisie procesów rolniczych. Wiadomości Statystyczne, nr 4, s. 10-14.

Smolik S. (2003) Opis składowej okresowej w szeregu czasowym. Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych – III, Wydawnictwo SGGW, Warszawa, s. 174-186.

Smolik S. (2003) Estymacja koniunktury w szeregu czasowym. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Lanego we Wrocławiu, Prace Naukowe Nr 988, s. 532-540.

Smolik S. (2005) Cykliczność w rozwoju produkcji zwierzęcej w Polsce. Przestrzenno-czasowe modelowanie i prognozowanie zjawisk gospodarczych, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, s. 263-270.

Zeliaś A., Pawełek B., Wanat S. (2004) Prognozowanie ekonomiczne, PWN, Warszawa.

HOW TO ESTIMATE FOURIER SERIES PARAMETERS AND TO USE THEM IN PRACTICE

Abstract: Proposed is identification of a periodical phenomenon - that of seasonal character in particular - by means of the first terms of its periodical function expanded into Fourier series. We will operate over those phenomena where values y_t employed to identify them can be factorised into three components: a development trend $f(t)$, a periodical component (that of seasonal character in particular) $z(t)$ and a random component E_t. Such an event can be identified in the following way:

$y_t = f(t) + z(t) + E_t \quad dla \quad t = 1, 2, \ldots, n.$

The parameters of the trend $f(t)$ of any analytical form can be determined by using the mean value theorem. The determined new analytical points (t, z_t) we identify by means of a periodical variation model in its harmonic sum form

$$z_t = s + \sum_{r=1}^{j} A_r \sin(rwt + \theta_r) - E_t, \quad gdzie \quad w = 2\pi / T.$$

Estimation of the model parameters made with the use of the method of least squares has the following form:

$$\hat{s} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} z_t; \qquad \hat{\theta}_r = arctg\left(\sum_{t=1}^{n} z_t \cos(rwt) \Big/ \sum_{t=1}^{n} z_t \sin(rwt)\right);$$

$$A_r = \frac{2}{n}\left(\cos\hat{\theta}_r \cdot \sum_{t=1}^{n} z_t \sin(rwt) + \sin\hat{\theta}_r \cdot \sum_{t=1}^{n} z_t \cos(rwt)\right) \; dla \; r = 1, 2, \ldots, j < T/2.$$

Application examples are presented.

Key words: Fourier series, harmonics, method of least squares.