

**LINIOWO-DYNAMICZNY MODEL OPTYMALIZACYJNY
GOSPODARSTWA ROLNEGO
W WOJEWÓDZTWIE ZACHODNIOPOMORSKIM
ZE STOCHASTYCZNYMI PARAMETRAMI**

Jadwiga Zaród

Katedra Zastosowań Matematyki w Ekonomii
Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie
e-mail: jzarod@zut.edu.pl

Streszczenie: Na podstawie danych GUS i ARiMR zbudowano liniowo-dynamiczny model gospodarstwa rolnego. Model ten składa się z czterech bloków połączonych ze sobą za pomocą warunków wspólnych. Parametry techniczno-ekonomiczne modelu, dotyczące wydajności podstawowych upraw, zastąpiono równaniami regresji. W celu uwzględnienia losowego charakteru funkcji celu wykorzystano trzy algorytmy: maksymalizujący dochód rolniczy (model E), minimalizujący ryzyko osiągnięcia dochodu rolniczego (model V) oraz minimalizujący ryzyko uzyskania dochodu z określonego przedziału (VE).

Słowa kluczowe: model liniowo-dynamiczny, stochastyczne parametry modelu, równania regresji, dochód rolniczy

WSTĘP

Produkcja rolnicza w dużej mierze zależy od czynników naturalnych, między innymi takich jak rodzaj gleby, opady, temperatura. Wartość tej produkcji pomniejszona o koszty stanowi dochód rolniczy. Jednak ceny ziemiopłodów, środków produkcji i usług różnią się, nawet w poszczególnych rejonach tego samego województwa, i zmieniają się z roku na rok.

Liniowo-dynamiczne modele optymalizacyjne z losowymi parametrami pozwalają uwzględnić stochastyczny charakter produkcji rolniczej i wskazują ryzyko związane z osiągnięciem wartości oczekiwanej dochodu rolniczego.

Celem tej pracy jest ukazanie ryzyka w produkcji rolniczej na przestrzeni czterech lat. Realizację celu umożliwiają modele programowania liniowego

i stochastycznego. Ryzyko związane z czynnikami agroklimatycznymi i nawożeniem opisują w skonstruowanym modelu. parametry techniczno-ekonomiczne. Natomiast zmieniające się czynniki ekonomiczne uwzględniają współczynniki funkcji celu.

Optymalizacją produkcji rolniczej zajmowali się już między innymi: Kisielińska [1999], Krawiec [1991], Waś [2005], Zieliński [2009]. Zbudowany model w tym opracowaniu uwzględnia dynamiczny i stochastyczny charakter produkcji gospodarstwa rolnego.

METODA BADAWCZA

Dla przeciętnego gospodarstwa rolnego w województwie zachodniopomorskim w latach 2006-2009 zbudowano model optymalizacyjny. Model ten składa się z czterech bloków (po jednym dla każdego roku) połączonych ze sobą za pomocą warunków wspólnych. W literaturze przedmiotu model taki nosi nazwę modelu liniowo-dynamicznego [Jeleniewska 1993, Krawiec 1991]. Pojedynczy blok to klasyczny, liniowy model optymalizacyjny o zapisie macierzowym [Grabowski 1980]:

$$AX \leq b, \quad (1)$$

$$X \geq 0, \quad (2)$$

$$F(X) = \sum CX \rightarrow \max \quad (3)$$

gdzie:

X – wektor zmiennych decyzyjnych modelu optymalizacyjnego

A – macierz parametrów techniczno-ekonomicznych

b – wektor wyrazów wolnych

C – wektor współczynników funkcji celu

Warunki wiążące, łączące poszczególne bloki modelu, dotyczą zmianowania roślin. Cały model składa się z 56 zmiennych decyzyjnych i 60 ograniczeń. Dokładny opis modelu gospodarstwa rolnego podano w pracy [Zaród 2008].

Parametry techniczno-ekonomiczne, uwzględniające jednostkowe wydajności podstawowych upraw, zastąpiono w tym modelu równaniami regresji o postaci: [Zeliaś 2000]

$$y_{it} = \alpha_0 + \alpha_{1t}x_{1t} + \dots + \alpha_{nt}x_{nt} + \mu_0 \quad i=1, \dots, n \quad (4)$$

gdzie

y_{it} – wektor plonów *i-tej* uprawy

x_{it} – wektory zmiennych objaśniających

α_{it} – skalary oznaczające parametry strukturalne

μ_0 – składnik losowy

Na podstawie wieloletnich danych, dotyczących nawożenia roślin, średnich temperatur powietrza i sumy opadów (zmiennie objaśniające) w okresie wegetacji oszacowano podstawowe statystyki funkcji regresji (tabela 1). W funkcji tej nie uwzględniono stałej α_0 , gdyż jej obecność znacznie pogorszyłaby istotność parametrów strukturalnych.

Tabela 1. Parametry strukturalne i struktury stochastycznej równań wydajności

Zmienne	Wz	t	Wrz	t	Wzi	t
Nawożenie	0,22	1,8	0,39	2,96	1,34	2,55
Temperatura	-0,81	1,4	-2,11	2,98	-4,75	1,61
opady	0,07	2,4	0,04	1,35	0,45	4,96
R ²	0,84		0,98		0,92	
Se	2,11		2,07		10,44	

Źródło: obliczenia własne

Objaśnienia: wz – wydajność zbóż(dt/ha), wrz- wydajność rzepaku (dt/ha), wzi - wydajność ziemniaków (dt/ha), t – wartość statystyki t Studenta, R² współczynnik determinacji, Se – odchylenie standardowe

Zmienne objaśniające w badanych latach przyjmowały wartości pokrywające ich rzeczywiste wahania. Pozwoliło to uwzględnić stochastyczny charakter czynników wpływających na produkcję rolniczą w modelu optymalizacyjnym.

Do badania wpływu zmieniających się warunków ekonomicznych (cen płodów rolnych, środków produkcji i usług oraz dotacji) wykorzystano trzy wersje modeli z losową funkcją celu [Krawiec 1991]: model E, V i VE.

Model E to zdeterminowany, dynamiczny problem linowy wyrażony za pomocą wzorów (1) – (3). Wynikiem rozwiązania tego modelu jest wektor zmiennych decyzyjnych x_E przedstawiający optymalną strukturę zasiewów oraz maksymalna wartość oczekiwana dochodu rolniczego d_E (skalar) jaką można w danych warunkach osiągnąć. Natomiast losowość funkcji celu określa wariancja, którą przyjęto jako miarę ryzyka realizacji dochodu, wyrażona wzorem:

$$\sigma_E^2 = x_E^T S x_E \quad (5)$$

gdzie:

S – macierz wariancji i kowariancji dochodów rolniczych

x_E – wektor wierszowy zmiennych decyzyjnych z rozwiązania optymalnego

x_E^T – transponowany wektor x_E z rozwiązania optymalnego

W modelu V warunki (1) – (2) nie ulegają zmianie. Natomiast funkcją celu jest wariancją zmiennej losowej, którą należy minimalizować:

$$F(x) = x^T S x \rightarrow \min \quad (6)$$

gdzie:

x – wektor zmiennych decyzyjnych

x^T – transponowany wektor zmiennych decyzyjnych

Rozwiązanie modelu V wymaga zastosowania algorytmu programowania kwadratowego. Wynikiem rozwiązania jest wektor zmiennych decyzyjnych x_V i minimalne ryzyko σ_V (skalar) uzyskania dochodu przy uwzględnionych warunkach.

Wartość dochodu rolniczego obliczana jest na podstawie wzoru:

$$d_V = c^T x_V \quad (7)$$

gdzie:

c^T – transponowany wektor parametrów funkcji celu

W modelu VE do warunków bilansowych (1) wprowadzono dodatkowe ograniczenie na wartość oczekiwaną dochodu o postaci:

$$c^T x \geq d_i \quad (8)$$

gdzie:

d_i – wektor dochodów rolniczych, który przyjmuje wartości z przedziału $\langle d_V, d_E \rangle$.

Pozwala to wyznaczyć zbiór rozwiązań (do analiz został on podzielony na 5 części), w którym dolną granicę dochodu wyznacza model V a górną model E. Funkcja celu i wartość dochodu w modelu VE są obliczane identycznie jak w modelu V.

MATERIAŁ BADAWCZY

Do budowy liniowo-dynamicznego modelu optymalizacyjnego wykorzystano dane Głównego Urzędu Statystycznego, Agencji Restrukturyzacji i Modernizacji Rolnictwa oraz Zachodniopomorskiego Oddziału Doradztwa Rolniczego w latach 2006-2009. Informacje te stanowiły parametry techniczno-ekonomiczne i wyrazy wolne modelu. Dane klimatyczne pochodziły ze stacji agrometeorologicznej w Lipniku koło. Stargardu Szczecińskiego. Niektóre z tych statystyk przedstawia tabela 2.

Tabela 2. Podstawowe dane statystyczne województwa zachodniopomorskiego

Wyszczególnienie	2006	2007	2008	2009
Liczba gospodarstw	59149	57226	59624	56450
Powierzchnia użytków rolnych* (ha)	16,65	17,04	16,16	16,87
Powierzchnia gruntów ornych* (ha)	13,67	12,88	12,25	12,79
Grunty odłogowane* (ha)	1,58	0,47	0,36	0,43
Struktura zasiewów* (%): zboża	74,4	71,5	72,1	73,0
rzepak	12,2	14,7	13,9	14,6
okopowe	5,4	5,3	5,1	5,3
pozostałe	8,0	8,5	8,9	7,1
Nawożenie NPK* (kg)	119,0	120,1	125,3	130,1
Temperatura powietrza IV-IX * (°C)	16,5	15,6	15,2	15,4
Suma opadów od IV do IX (mm)	238,4	477,4	279,3	353,0

Źródło: obliczenia własne, objaśnienia: *wartość średnia

Kryterium celu modelu był dochód rolniczy. Współczynniki funkcji celu obliczono jako różnicę pomiędzy wartością produkcji (plon z 1ha * cena za 1dt) a kosztami (zł/ha) pomniejszonymi o dopłaty podstawowe i uzupełniające.

Kalkulacje kosztów przeprowadzono w oparciu o opracowania ZODR [Kalkulacje rolnicze 2006-2009]. Macierz wariancji i kowariancji dochodów rolniczych została obliczona na podstawie dochodów osiągniętych w 10 rejonach województwa zachodniopomorskiego w czterech analizowanych latach. Podziału województwa na rejon przydatności rolniczej dokonano za pomocą funkcji klasyfikacyjnej analizy dyskryminacyjnej [Zaród 2009]. Macierz wariancji uwzględnia różnice cen płodów rolnych, środków produkcji i usług w rejonach województwa w latach 2006 -2009.

WYNIKI ROZWIĄZAŃ MODELI

Rozwiązanie modelu E wskazało optymalną strukturę produkcji, która wynikała ze zmianowania roślin. Warunki bilansowe modelu zostały tak skonstruowane, aby powierzchnia upraw na tych samych polach była mniejsza bądź równa powierzchni w kolejnych latach. Rośliny wchodzące bezpośrednio po sobie na dane pole zostały tak zaplanowane, aby zachować i podnosić żyzność gleby i wydajność roślin. Zestaw zmiennych decyzyjnych z podziałem na pola w poszczególnych blokach (latach) wraz z zajmowanym przez nich arealem przedstawia tabela 3. Brak wielkości zasiewu przy niektórych uprawach oznacza ich nieopłacalność (nie weszły do rozwiązania optymalnego).

Tabela3 Zmienne decyzyjne z rozwiązania optymalnego modelu E

Lata	Następstwo upraw na polach			
	I	II	III	IV
2006	buraki 0,2ha ziemniaki 0,46ha owies 1,66ha	pszenica 2,51ha jęczmień 3,68ha	pszenżyto - rzepak 1,5ha	żyto 1,17ha pozostałe uprawy 0,98ha
2007	pszenica 2,32ha jęczmień -	pszenżyto 4,39ha rzepak 1,8ha	żyto0,06ha pozostałe uprawy 1,44ha	buraki 0,23 ziemniaki 0,4ha owies 1,52
2008	pszenżyto 0,73ha rzepak 1,59ha	żyto 4,82 pozostałe uprawy 1,21ha	buraki0,20ha ziemniaki 0,43ha owies 0,87ha	pszenica 2,15ha jęczmień -
2009	żyto 1,48ha pozostałe uprawy 0,82ha	buraki0,21ha ziemniaki 0,45ha owies 5,37ha	pszenica 1,5ha jęczmień -	pszenżyto 0,42ha rzepak 1,73ha

Źródło: obliczenia własne wykonane w programie MATLAB

Warunki bilansowe modelu dotyczące wydajności poszczególnych upraw zakładały sprzedaż ziemiopłodów, która była równoznaczna z ich zbiorami. Zbiory w badanych latach zależały od wartości jakie przyjmowały zmienne objaśniające w równaniach regresji. W celach porównawczych zbiory z rozwiązania optymalnego przeliczono na jeden hektar zasiewów a wyniki (plony) przedstawiono w tabeli 4.

Tabela 4. Plony podstawowych roślin wynikające z rozwiązania optymalnego

Uprawy	Plony (dt/ha) w analizowanych latach			
	2006	2007	2008	2009
Zboża	29,93	32,07	30,66	39,89
Rzepak	21,20	25,21	23,61	33,20
Ziemniaki	185,60	210,74	199,99	253,84
Buraki	392,41	460,53	400,27	474,56

Źródło: obliczenia własne wykonane w programie MATLAB

Najwyższe plony upraw w rozwiązaniu optymalnym osiągnięto w roku 2009 a najniższe w 2006. Różnica w wydajnościach jednostkowych zbóż sięgała 25%, rzepaku 32,15% a ziemniaków 26,82%. Tak znaczne wahania plonów świadczą o dużej niepewności produkcji rolniczej i potwierdzają jej stochastyczny charakter.

Dochód rolniczy w rozwiązaniu optymalnym modelu E w czterech analizowanych latach łącznie wynosił 74349,60zł. a jego odchylenie standardowe było równe 7410,15zł., czyli ryzyko realizacji dochodu sięgało 9,97%.

Rozwiązanie modelu V wytyczyło taką strukturę produkcji, która minimalizowała ryzyko uzyskania dochodu rolniczego przy zmieniających się czynnikach pogodowych. W konstrukcji modelu założono taki sam typ płodozmianu dla wszystkich rozwiązań a następujące po sobie rośliny w kolejnych latach łączyły poszczególne bloki modelu. Otrzymane zmienne decyzyjne, dotyczące upraw w hektarach, w postaci zmianowania roślin przedstawia tabela 5.

Tabela 5. Zmienne decyzyjne z rozwiązania optymalnego modelu V

Lata	Następstwo upraw na polach			
	I	II	III	IV
2006	buraki 0,2ha ziemniaki 0,46ha owies 0,16ha	pszenica 2,51ha jęczmień 4,87ha	pszenżyto - rzepak 1,5ha	żyto 1,48ha pozostałe uprawy 0,98ha
2007	pszenica 0,82ha jęczmień -	pszenżyto 1,8ha Rzepak 5,58ha	żyto - pozostałe uprawy 1,01ha	buraki 0,23ha ziemniaki 0,43ha owies 1,8ha
2008	pszenżyto - rzepak 0,82ha	żyto 6,17ha pozostałe uprawy 1,21ha	buraki0,20ha ziemniaki 0,43ha owies 0,38ha	pszenica 2,15ha jęczmień 0,31ha
2009	żyto pozostałe uprawy 0,82ha	buraki0,21ha ziemniaki 0,45ha owies 6,72ha	pszenica1,01ha jęczmień -	pszenżyto 0,73ha rzepak 1,73ha

Źródło: obliczenia własne wykonane w programie MATLAB

Wysokość plonów w rozwiązaniu modelu V nie uległa zmianie, ponieważ we wszystkich modelach wydajność upraw zależała od tych samych równań regresji. Wartość oczekiwana dochodu rolniczego w czterech analizowanych latach ogółem wynosiła 58198,32zł. Odchylenie standardowe, które przyjęto jako miarę

ryzyka równało się 3258,51zł. Dochód rolniczy w modelu V stanowił około 78% maksymalnej wartości oczekiwanej uzyskanej w modelu E a niepewność jego realizacji zmniejszyła się do 5,6%.

Rozwiązania optymalne modeli VE pozwalają wybrać satysfakcjonującą wartość dochodu rolniczego z przedziału: 58198,32 – 74349,60zł rozpatrywaną łącznie z jej wariancją lub odchyleniem standardowym. W celu ułatwienia analiz przedział ten podzielono na 5 części. Wyniki modelu VE₁ są identyczne jak modelu V ze względu na dolne ograniczenie dochodu i algorytm rozwiązywania. Dochód rolniczy i jego ryzyko dla pozostałych przedziałów przedstawia tabela 6.

Tabela 6. Wartości funkcji celu modeli VE

Wyszczególnienie	Wartości funkcji celu modeli VE				
	VE ₂	VE ₃	VE ₄	VE ₅	VE ₆
Dochód rolniczy (zł)	61441,26	64684,20	67927,13	71170,07	74349,60
Ryzyko (zł)	3547,13	3840,91	4138,55	4451,58	5289,92
Ryzyko (%)	5,77	5,94	6,09	6,34	7,27
Dochód rolniczy/ha* (zł/ha)	4766,58	5018,17	5264,75	5521,34	5768,01

Źródło: obliczenia własne wykonane w programie MATLAB,
objaśnienia: *dochód rolniczy przeliczony na 1ha gruntów ornych

Najkorzystniejszym rozwiązaniem ze względu na wartość oczekiwaną i stosunkowo niskie odchylenie standardowe było rozwiązanie modelu VE₆. Pozwoliło ono uzyskać taki sam dochód rolniczy jak w modelu E zmniejszając niepewność jego realizacji o 2,7%. Strukturę produkcji tego rozwiązania za pomocą płodozmianu przedstawia tabela 6.

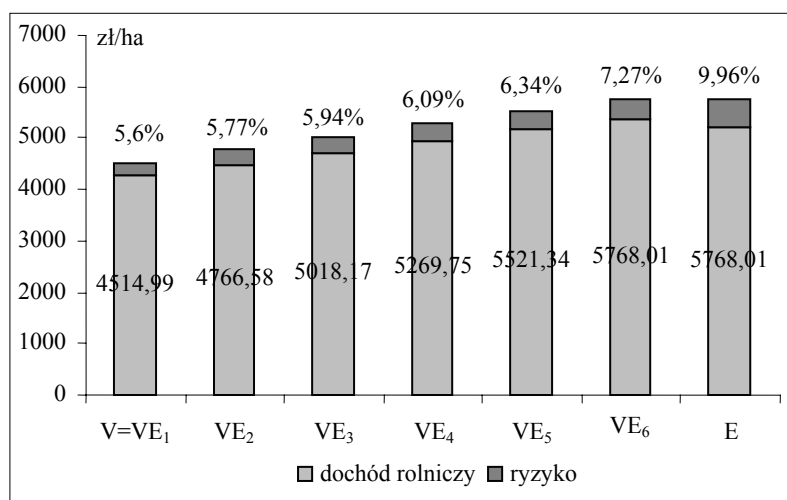
Tabela 6. Zmienne decyzyjne z rozwiązania optymalnego modelu VE₆

Lata	Następstwo upraw na polach			
	I	II	III	IV
2006	buraki 0,2ha ziemniaki 0,46ha owies 1,66ha	pszenica 2,51ha jęczmień -	pszenżyto - rzepak 1,51ha	żyto 4,89ha pozostałe uprawy 0,98ha
2007	pszenica 2,32ha jęczmień -	pszenżyto 0,71ha rzepak 1,81ha	żyto 0,5ha pozostałe uprawy 1,01ha	buraki 0,23 ziemniaki 0,43ha owies 5,21
2008	pszenżyto 0,72ha rzepak 1,6ha	żyto 1,08 pozostałe uprawy 1,21ha	buraki 0,20ha ziemniaki 0,43ha owies 0,88ha	pszenica 2,15ha jęczmień 3,72
2009	żyto 1,46ha pozostałe uprawy 0,82ha	buraki 0,21ha ziemniaki 0,45ha owies 1,63ha	pszenica 1,51ha jęczmień -	pszenżyto 4,16ha rzepak 1,71ha

Źródło: obliczenia własne wykonane w programie MATLAB

W celach porównawczych przeliczono wartości dochodów rolniczych i ryzyka, uzyskanych w wyniku rozwiązania modeli V VE i E, na jeden hektar gruntów ornych. Minimalizacja wariancji funkcji celu zapewnia zmniejszenie rozrzutu wartości, jakie może przybierać dochód rolniczy wokół swojej wartości oczekiwanej. Dla rolnika niepokojąca jest zwłaszcza możliwość zmniejszenia dochodu o wartość odchylenia standardowego. Na rysunku 1 przedstawiono jednostkowy dochód rolniczy z zaznaczeniem jaka jego część może być niepewna w realizacji.

Rysunek 2. Jednostkowe dochody rolnicze



Źródło: obliczenia własne

Wraz ze wzrostem jednostkowych dochodów rolniczych (obliczanych łącznie dla czterech analizowanych lat) wzrasta nieznacznie ryzyko ich realizacji. W żadnym modelu ryzyko to nie przekracza 10%. Oznacza to, że w województwie zachodniopomorskim warunki ekonomiczne w badanych latach nie były zbyt zróżnicowane.

Najbardziej opłacalnym kierunkiem produkcji wśród zbóż okazała się uprawa pszenicy. Występuje ona we wszystkich rozwiązaniach w ilości wynikającej ze struktury zasiewów (udział pszenicy w ogólnej powierzchni zasiewów był ograniczony ze względu na duże wymagania glebowe). Również uprawa rzepaku, buraków i ziemniaków okazała się działalnością dochodową, lecz ograniczoną ze względu na rzeczywisty udział w powierzchni zasiewów.

W badaniach nie uwzględniono produkcji zwierzęcej, gdyż w województwie zachodniopomorskim tylko około 13% gospodarstw rolnych zajmuje się hodowlą bydła i około 18% hodowlą trzody chlewnej.

WNIOSKI

- W rozwiązaniach optymalnych modeli E, V i VE zestaw zmiennych decyzyjnych nie ulega zmianie a jedynie ich wielkości.
- Najbardziej opłacalne kierunki produkcji to uprawa pszenicy, rzepaku, buraków i ziemniaków. Uprawy te występują w każdym rozwiązaniu optymalnym w ilościach wynikających z górnej granicy warunków ograniczających.
- Różnice dochodów rolniczych osiąganych w wyniku rozwiązań optymalnych modelu V i E są znaczne i sięgają 22%.
- Ryzyko realizacji dochodów rolniczych rośnie wraz ze wzrostem dochodów, ale w żadnym z analizowanych modeli nie przekracza 10%.
- Najkorzystniejszym rozwiązaniem ze względu na wartość oczekiwaną i stosunkowo niską wariancję jest rozwiązanie modelu VE₆. Wskazuje ono, jakie zmiany należy dokonać w strukturze zasiewów, aby zmniejszyć ryzyko osiągnięcia dochodu o 2,7% w stosunku do modelu E.

BIBLIOGRAFIA

- Grabowski W. (1980) Programowanie matematyczne, PWE, Warszawa.
- Jeleniewska E. (1993) Próba określenia reakcji przedsiębiorstwa rolniczego na zmieniające się warunki gospodarowania przy wykorzystaniu metody programowania liniowo-dynamicznego, *Zagadnienia Ekonomiki Rolnictwa* 4-5, Warszawa, str. 92-94.
- Kalkulacje rolnicze (2006, 2007, 2008, 2009), Zachodniopomorski Ośrodek Doradztwa Rolniczego, Barzkowice, (biuletyny).
- Kisielewska J. (1999) Zastosowanie nieliniowych modeli optymalizacyjnych do planowania produkcji w gospodarstwie rolniczym, *Zagadnienia Ekonomiki Rolnictwa* 2-3, Warszawa, str. 97-107.
- Krawiec B. (1991) Metody optymalizacji w rolnictwie, PWN, Łódź.
- Wąs A. (2005) Model optymalizacyjny rolnictwa (na przykładzie gminy Kobylnica), SGGW, Warszawa, (rozprawa doktorska).
- Zaród J. (2008) Programowanie liniowo-dynamiczne jako narzędzie analizujące zmiany w funkcjonowaniu gospodarstw rolnych, *Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego*, str.429-435.
- Zaród J. (2009): Wykorzystanie analizy dyskryminacyjnej do podziału województwa zachodniopomorskiego na rejony przydatności rolniczej, *Journal of Agribusiness and Rural Development* 3(13), Poznań, str. 345-354.
- Zeliaś A. (2000) Metody statystyczne, PWE, Warszawa.
- Zieliński M.(2009) Optymalizacja decyzji inwestycyjnych w gospodarstwie zbożowym, *Journal of Agribusiness and Rural Development* 2(12), str. 295-301.

**DYNAMIC LINEAR OPTIMALIZATION MODEL
OF FARM IN WEST POMERANIA PROVINCE
WITH STOCHASTIC PARAMETERS**

Abstract: Based on data from CSO and the ARMA constructed a dynamic optimization model of the farm. This model consists of four blocks (one for each year) linked together by means of common conditions, established on the principle of recursive relationships. Technical and economic parameters of the model related to the primary productivity of crops, were replaced by regression equations. To take into account the random nature of the objective function three algorithms were used: maximizing farm income (model E), which minimizes the risk of achieving agricultural income (model V) and minimizes the risk of receiving income from a specific interval (VE).

Key words: dynamic linear model, stochastic parameters of the models, regression equations, farm income