METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XIII/1, 2012, str. 118 – 126

O JEDNOLITYM PODEJŚCIU DO RACHUNKU WARIACYJNEGO I STEROWANIA OPTYMALNEGO

Wiesław Grygierzec
Katedra Statystyki Matematycznej, Uniwersytet Rolniczy w Krakowie
e-mail: rrgrygie@cyf-kr.edu.pl

Streszczenie: Problemy *rachunku wariacyjnego* oraz *sterowania optymalnego* to z jednej strony dwie intensywnie rozwijane teorie matematyczne, z drugiej strony obie sprowadzają się do badania warunkowych zagadnień extremalnych. Zasada Lagrange'a pozwala zamienić poszukiwanie ekstremum warunkowego na poszukiwanie punktów stacjonarnych funkcji Lagrange'a. Idea ta może mieć zastosowania jeszcze w wielu zagadnieniach wychodzących poza pierwotne rozważanie jej twórcy.

Słowa kluczowe: rachunek wariacyjny, sterowanie optymalne, problemy ekstremalne, ekstrema warunkowe, mnożniki Lagrange'a, równanie Eulera-Lagrange'a, zasada maksimum Pontriagina

WSTĘP

Wzmianki o poszukiwaniach minimów i maksimów można już znaleźć w pracach Euklidesa, Apoloniusza i Archimedesa. Potrzeba rozwiązywania zagadnień extremalnych w decydujący sposób motywowała rozwój analizy matematycznej i rachunku wariacyjnego w okresie XVII i XVIII w. Na okres ten przypada odkrycie praw optyki i mechaniki. Rachunek wariacyjny stał się w tym okresie językiem, w którym były formułowane najważniejsze zasady z zakresu nauk przyrodniczych.

Począwszy od lat 50-tych ubiegłego stulecia w związku z pojawieniem się nowych zastosowań głównie z zakresu technologii przemysłowych, lotów kosmicznych oraz ekonomii, obserwujemy ponowny wzrost zainteresowania zagadnieniami ekstremalnymi. W szczególności pojawia się nowa teoria sterowania optymalnego.

Przedmiotem naszego artykułu jest przedstawienie wspólnego podejścia do zagadnień rachunku wariacyjnego oraz teorii sterowania optymalnego. W tym celu, rozważmy funkcjonał $J : X \to R$, określony na przestrzeni Banacha X oraz niech $A \subset X$ będzie zbiorem domkniętym. Interesuje nas problem ekstremalny w postaci:

$$\begin{cases} J(x) \to \inf; \\ \Phi(x) = 0, \\ f_i(x) \le 0, i \in I, \\ x \in A. \end{cases} \tag{1}$$

Jeżeli założymy, że $\exists c > 0$ takie, że

$$-\infty < c < J(x) \le \infty \text{ dla } x \in A,$$

wówczas istnieje kres dolny

$$d := \inf_{x \in A} J(x).$$

Pojawiają się trzy istotne pytania dla matematyki i zastosowań:

1. Czy istnieje rozwiązanie $\hat{x}$: $J(\hat{x}) = d$ problemu (1)?
2. Czy $\hat{x}$ jest jedyne?
3. Jak znaleźć $\hat{x}$?

EKSTREMA FUNKCJONAŁÓW NA PRZESTRZENIACH BANACHA

Metoda mnożników Lagrange'a

Rozpocznijmy od ilustracji przykładu z analizy funkcji dwóch zmiennych, rozważmy problem:

$$\begin{cases} F(x,y) \to \min \\ \Phi(x,y) = 0 \end{cases} \qquad (x,y) \in R^2$$

W metodzie *mnożników Lagrange'a* warunek konieczny dla ekstremum funkcji $F : R^2 \to R$ przy warunku $\Phi(x,y) = 0$ w punkcie (x_0, y_0) jest następującej postaci:

$$\begin{cases} F_x(x_0,y_0) + \lambda \Phi_x(x_0,y_0) = 0, \\ F_y(x_0,y_0) + \lambda \Phi_y(x_0,y_0) = 0, \end{cases} \quad \Phi(x_0,y_0) = 0 \tag{2}$$

Metoda *mnożnikow Lagrange'a* wykorzystuje fakt, że ekstremum warunkowe funkcji F może leżeć tylko w tych punktach, w których leży punkt stacjonarny zmodyfikowanej funkcji celu

$$\mathsf{L} = F + \lambda \Phi,$$

zwanej *funkcją Lagrange'a*.

Operatory na przestrzeniach Banacha

Zajmiemy się znalezieniem odpowiednika warunku (2) w przypadku, gdy

X, Y są przestrzeniami Banacha. Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha jest przestrzenią unormowaną, zupełną tzn. każdy ciąg Cauchy'ego jej elementów jest zbieżny do pewnego jej elementu, w szczególności jest przestrzenią nieskończenie wymiarową. Niech będą dane funkcjonał oraz operator:

$$F : X \to R, \quad \Phi : X \to Y .$$

Poszukujemy rozwiązania następującego problemu ekstremum warunkowego:

$$\begin{cases} F(x) \to \inf; \\ \Phi(x) = 0, x \in X. \end{cases} \tag{3}$$

Przypomnijmy jeszcze definicje operatora *sprzężonego* oraz pochodnej na przestrzeniach. Banacha. Niech będzie dany operator liniowy i ograniczony

$$A : X \to Y .$$
.

Definicja operatora sprzężonego

X^*, Y^* – przestrzenie sprzężone do przestrzeni Banacha X, Y :

X^* - zbiór funkcjonałów liniowych ograniczonych określonych w X

$f \in X^* \Leftrightarrow f : X \to \mathrm{R}$ liniowy, ograniczony;

Y^* - zbiór funkcjonałów liniowych ograniczonych określonych w Y

$g \in Y^* \Leftrightarrow g : Y \to \mathrm{R}$ liniowy, ograniczony;

Niech dany będzie $y^* \in Y^*, y^* : Y \to R$ - funkcjonał liniowy, ograniczony. Zdefiniujmy funkcjonał $f : X \to R$ -liniowy ograniczony wzorem:

$$f(x) = y^*(Ax) .$$

Dzięki operatorowi *A* możemy zdefiniować nowy operator:

$$Y^* \ni y^* \to f = (y^* \circ A) \in X^* .$$

Tym operatorem jest właśnie *operator sprzężony* dla danego operatora liniowego, ograniczonego *A:*

$$A^* : X^* \to Y^*$$

$$A^* y^* = y^* \circ A$$

$y^* \circ A = A^* y^*$ czyli $y^*(Ax) = (A^* y^*)(x)$

Dla oznaczenia wartości funkcjonału na argumencie powszechnie używa się symbolu $< \cdot, \cdot >$, tzn. mamy:

$$< y^*, Ax > = < A^* y^*, x >,$$

$$< Ax, y^* > = < x, A^* y^* > .$$

Definicja Pochodnej

Niech $\Phi : X \to Y$. Mówimy, że Φ jest różniczkowalne w $x_0 \in X$ w *sensie Frecheta,* jeżeli istnieje operator liniowy ograniczony $A(x_0) : X \to Y$ taki, że

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| \Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) - A(x_0).h \|}{\| h \|} = 0,$$

wtedy operator $A(x_0)$ nazwiemy *pochodna* Φ w punkcie x_0 i oznaczamy $\Phi'(x_0)$

$$A(x_0) = \Phi'(x_0) \in \mathcal{L}(X,Y).$$

Extrema funkcjonałów, równanie Eulera-Lagrange'a

Obecnie znajdziemy odpowiednik zasady mnożników Lagrange'a (2) czyli tzw. *równanie Eulera-Lagrange'a* dla warunkowych ekstremów rachunku wariacyjnego. Równania te są naturalnym uogólnieniem metody mnożników Lagrange'a i stoi ona u podstaw ich uzyskania. Zdefiniujmy następująca *funkcje Lagrange'a* dla problemu (3)

$$\mathcal{L}(x, \lambda, y^*) = \lambda F(x) + \langle y^*, \Phi(x) \rangle, \tag{4}$$

gdzie $\lambda \in R$, $y^* \in Y^*$ nazwiemy *mnożnikami Lagrange'a.*

Twierdzenie 1 Załóżmy, że funkcje F i Φ są klasy C^1 w otoczeniu punktu $x_0 \in X$, $\Phi(x_0) = 0$ oraz niech obraz X poprzez odwzorowanie: $\{x \to \Phi'(x_0)x\}$ będzie domknięty. Jeżeli funkcjonał F osiąga na zbiorze $\{x \in X : \Phi(x) = 0\}$ minimum lokalne w x_0 wówczas istnieją mnożniki *Lagrange'a* $(\lambda, y^*) \neq (0,0)$ takie, że zachodzi równanie Eulera Lagrange'a:

$$\mathsf{L}_x(x, \lambda, y^*) = \lambda F'(x_0) + [\Phi'(x_0)]^* y^* = 0, \text{ (tożsamość w } X^*)$$

czyli

$$\lambda [F'(x_0)](x) + [\Phi'(x_0)]^* (y^*)(x) = 0 \quad \forall x \in X,$$

powyżej $\mathcal{L}_x$ oznacza pochodną cząstkową $\mathcal{L}$ względem *x, tzn.*

$$\mathcal{L}_x(x, \lambda, y^*) = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}(x, \lambda, y^*).$$

Twierdzenie1 mówi, że poszukiwanie rozwiązania problemu ekstremalnego (3) z warunkami możemy ograniczyć do punktów stacjonarnych odpowiedniej *funkcji Lagrange'a* (4). Jest to zasadnicza korzyść, gdyż np. w sytuacji przestrzeni skończenie wymiarowych $X = R^n, Y = R^m$ wystarczy zadanie sprowadza się do rozwiązania układu *m+n* równań z *m+n* niewiadomymi.

Abstrakcyjny problem sterowania, równanie Eulera-Lagrange'a.

Niech będą dane przestrzenie Banacha: Y, U, V, będziemy rozważać szczególną postać przestrzeń X:

$$X = Y \times U,$$

gdzie Y -przestrzeń stanów, U-przestrzeń sterowań. Zakładamy, że dane są funkcjonał J i operator Φ:

$$J : Y \times U \to R,$$

$$\Phi : Y \times U \to V,$$

dodatkowo $U_\partial \subset U$ - podzbiór wypukły, niepusty. Rozważamy problem ekstremalny:

$$\begin{cases} J(y,u) \to \inf; \\ \Phi(y,u) = 0, \quad u \in U_\partial. \end{cases} \tag{5}$$

Zdefiniujemy następującą funkcję Lagrange'a:

$$\mathcal{L}(y,u,\lambda,y^*) = \lambda J(y,u) + < p, \Phi(y,u) >,$$

$\lambda \in R_+, \quad p \in V^*$.

Twierdzenie 1 będzie miało teraz następującą wypowiedź: jeżeli para $(\hat{y}, \hat{u}) \in Y \times U$ jest rozwiązaniem problemu (5) wówczas przy pewnych dodatkowych założeniach regularnościowych (ze względu na ich techniczny charakter nie podajemy ich tutaj w całości)

$$\exists (\lambda, p) \in R_+ \times V^* \setminus \{0\} \text{ takie, że}$$

$$< \mathrm{L}'_{\mathrm{y}}(\hat{y},\hat{u},\lambda,p), h > \quad = 0 \text{ dla dowolnego } h \in Y,$$

$$< \mathrm{L}'_{\mathrm{u}}(\hat{y},\hat{u},\lambda,p), u - \hat{u} > \quad \geq 0 \text{ dla dowolnego } u \in U_\partial.$$

WARUNEK KONIECZNY EKSTREMUM W RACHUNKU WARIACYJNYM I STEROWANIU OPTYMALNYM

Problem rachunku wariacyjnego i sterowania optymalnego.

W dalszych rozważaniach zmienna $t \in [0,T]$ będzie reprezentowała czas. Dodatkowo będziemy rozważali dwie grupy zmiennych

$$x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \quad \text{zmienne stanu},$$

$$u = (u_1, \ldots u_r) \in R^r \quad \text{sterowanie}.$$

Zdefiniujmy funkcjonał

$$J(x,u) = \int_0^T f(t, x(t), u(t))dt + \Psi(x(T)).$$

Będziemy rozważali następujący problem.

Problem Lagrange'a dla rachunku wariacyjnego.

$$\begin{cases} J(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^T f(t,x(t),u(t))dt \to \inf; \\ \dot{x} = \varphi(t,x,u), \\ h_0(x(0)) = 0,\ h_1(x(T)) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

gdzie

$$f: R\times R^n \times R^r \to R, \qquad \varphi: R\times R^n\times R^r \to R^n,$$
$$h_i: R^n \to R^{s_i}, \quad i = 0,1.$$

O funkcjach zakładamy, że są różniczkowalne w sposób ciągły. Zdefiniujmy *Lagrangian:*

$$L(t,x,\dot{x},u,p,\lambda) = \lambda f(t,x,u) + (p \mid \dot{x} - \varphi(t,x.u)), \tag{7}$$

oraz *funkcję Lagrange'a* $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),l_0,l_1,\lambda)$.

$$\begin{aligned} \mathsf{L} &= \int_0^T L(t,x(t),\dot{x}(t),u(t),p(t),\lambda)dt + \\ &+ (l_0 \mid h_0(x(0)) + (l_1 \mid h_1(x(T)), \end{aligned} \tag{7'}$$

gdzie przez $(\cdot\mid\cdot)$ oznaczamy iloczyn skalarny w R^m, $m = n, s_i$, $i = 1,2$ w zależności od kontekstu.

Twierdzenie 2. Jeżeli para $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ jest rozwiązaniem problemu (6) wówczas istnieją mnożniki Lagrange'a: $\lambda \ge 0, l_i \in R^{s_i}, i = 0,1$ oraz $p(\cdot)\in C_1^n(0,T)$, nie wszystkie równe zero oraz spełniające:

a) równanie Eulera względem zmiennej x

$$\left.\left(-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x\right)\right|_{(x_*(t),u_*(t))} = 0, \tag{8}$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} L_{\dot{x}}\,|_{(x_*(0),u_*(0))} &= h_0^{'*}(x_*(0))l_0, \\ L_{\dot{x}}\,|_{(x_*(T),u_*(T))} &= h_1^{'*}(x_*(T))l_1; \end{aligned} \tag{9}$$

b) równanie Eulera względem zmiennej u

$$L_u\,|_{(x_*(t),u_*(t))} = 0; \tag{10}$$

Równania (8), (10) są kolejnymi odpowiednikami warunku (2) dla ekstremum warunkowego. Biorąc pod uwagę (7) równanie (8) z warunkami brzegowymi (8) można zapisać jako równanie różniczkowe z warunkami brzegowymi.

$$\begin{cases} -\dot{p}(t) = \varphi_x^*(t, x_*(t), u_*(t))p(t) + \lambda f_x^*(t, x_*(t), u_*(t)); \\ p(t_0) = h_{0x}^*(t_0, x_*(t_0))l_0, \\ p(t_1) = h_{1x}^*(t_{1*}, x_*(t_1))l_1. \end{cases}$$

Natomiast równanie (10) przyjmie postać

$$\varphi_u^*(t, x_*(t), u_*(t))p = \lambda f_u^*(t, x_*(t), u_*(t)).$$

Rozwiązanie powyższych równań różniczkowych oznacza znalezienie mnożników Lagrange'a. W szczególności mnożnik *p(t)* w przypadku zagadnień ekonomicznych posiada dodatkowo interpretacje jako tzw. *shadow price*.

Twierdzenie 2 to kolejna postać zasady Lagrange'a, w jej myśl zdefiniowanie funkcji Lagrange'a (7') pozwala nam sprowadzić badanie problemu warunkowego ekstremum (6) do badania ekstremum

$$\mathrm{L} \to \inf ,$$

bez dodatkowych warunków.

Zasada maksimum Pontriagina dla sterowania optymalnego.

$$\begin{cases} J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T f(t, x(t), u(t))dt \to \inf; \\ \dot{x} = \varphi(t, x, u), \\ u \in U \subset R^r, \\ h_0(x(0)) = 0, h_1(x(T)) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

gdzie

$$f : R \times R^n \times R^r \to R, \qquad \varphi : R \times R^n \times R^r \to R^n$$

$$h_i : R^n \to R^{s_i}, \quad i = 0,1$$

O funkcjach zakładamy, że są różniczkowalne w sposób ciągły. Rozważmy funkcję:

$$H(t, x, u, p, \lambda) = \lambda f(t, x, u) + (p \mid \varphi(t, x.u)),$$

($p \in R^n$, $\lambda \in R_+$) oraz definiujmy funkcje zwaną *Hamiltonianem:*

$$\mathcal{H}(t, x, p, \lambda) = \sup_{u \in U} H(t, x, u, p, \lambda).$$

Twierdzenie 3 (Zasada maksimum Pontriagina)
Jeżeli $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ jest rozwiązaniem problemu (11) określonym na przedziale $[t_{0*}, t_{1*}]$ wówczas istnieją $\lambda \geq 0, l_i \in R^{s_i}, i = 0{,}1$ oraz $p(\cdot) \in C_1^n(0,T)$, nie wszystkie równe zero, takie że:

a) $p(t)$ spełnia równanie sprzężone

$$\dot{p} = -H_x = -\varphi_x^*(t, x_*(t), u_*(t))p + \lambda f_x^*(t, x_*(t), u_*(t)),$$

z warunkami

$$p(t_{0*}) = h_{0x}^*(t_{0*}, x_*(t_{0*}))l_0,$$

$$p(t_{1*}) = h_{1x}^*(t_{1*}, x_*(t_{1*}))l_1;$$

b) dla p.w. $t \in [t_{0*}, t_{1*}]$

$$H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda) = \max_{u \in U} H(t, x_*(t), u, p(t), \lambda) = \mathscr{H}(t, x_*(t), p(t), \lambda);$$

c) Hamiltonian $\mathscr{H}(t, x_*(t), p(t), \lambda)$ jest ciągły na przedziale $[t_{0*}, t_{1*}]$ oraz spełnia warunki brzegowe

$$\mathscr{H}(t_{0*}, x_*(t_{0*}), p(t_{0*}), \lambda) = (h_{0t}^*(t_{0*}, x_*(t_{0*})) \mid l_0),$$

$$\mathscr{H}(t_{1*}, x_*(t_{1*}), p(t_{1*}), \lambda) = (h_{1t}^*(t_{1*}, x_*(t_{1*})) \mid l_1);$$

Zasada maksimum Pontriagina to w pewnym sensie jeszcze jedna forma uogólnienia zasady Lagrange'a na sytuacje sterowania optymalnego. W myśl tej zasady warunek konieczny ekstremum warunkowego w problemie sterowania optymalnego (11) pokrywa się z warunkiem koniecznym ekstremum odpowiednio zdefiniowanej funkcji Lgrange'a. Można zatem poszukiwać rozwiązania problemu sterowania optymalnego wśród punktów stacjonarnych tej funkcji.

Autor pragnie wyrazić wdzięczność Profesorowi Bolesławowi Szafirskiemu za inspiracje i wiele cennych i uwag przy redakcji niniejszego artykułu.

BIBLIOGRAFIA

Fleming W.H., Rishel R.W. (1975) Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer-Verlag

Fursikov A.V. (2000) Optimal Control of Distributed Systems, Theory and Applications. Americal Mathematical Society.

Ioffe A.D., Tihomirov V.M. (1979) Theory of Extremal Problems, North-Holland Publishing Company.

Vinter R. (2000) Optimal Control, Birkhauser.

Szafirski B. (2012) Notatki z seminarium prowadzonym w IM Uniwersytetu Jagiellońskiego, Materiały nie publikowane.

UNIFIED APPROACH TO CALCULS OF VARIATIONS AND OPTIMAL CONTROL

Abstract: Calculus of variations and optimal control theory are on one hand side intensively developing mathematical theories on the other at the center of both of them lies investigating of extremal problems. In connection with extremal problems there naturally arise questions important for mathematics and applications: 1) does there exist a solution of the problem? 2) is the solution unique? 3) how to really find the solution? For problems with constrains, a general principle was proposed by Lagrange. This idea can be generalized far beyond the limits of the problems that he considered. In the paper we present unified formulation of problems of calculus of variations and optimal control in connection with Lagrange principle.

Key words: calculus of variations, optimal control, extremal problems with constrains, Lagrange multipliers, Euler-Lagrange equation, Pontryagin maximum principle