

O MIERNIKACH DOKŁADNOŚCI PROGNOZ *EX POST* W PROGNOZOWANIU ZMIENNYCH O SILNYM NATĘŻENIU SEZONOWOŚCI

Maria Szmuksta-Zawadzka

Studium Matematyki

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie

e-mail: maria.szmuksta-zawadzka@zut.edu.pl

Jan Zawadzki

Katedra Zastosowań Matematyki w Ekonomii

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie

jan.zawadzki@zut.edu.pl

Streszczenie: Praca poświęcona jest dyskusji o stosowaniu relatywnych mierników dokładności prognoz ex-post. Autorzy wykazali, że sytuacji, gdy zmienna charakteryzuje się bardzo dużą amplitudą wskaźników sezonowości nie może być wykorzystywany średni absolutny błąd prognozy (MAPE). Rozważania teoretyczne zostały zilustrowane na przykładzie produkcji energii cieplnej.

Słowa kluczowe: mierniki dokładności prognoz, wahania sezonowe

WPROWADZENIE

Część teoretyczna pracy poświęcona jest rozważaniom dotyczącym stosowania absolutnych a zwłaszcza względnych mierników dokładności prognoz ex-post w sytuacji, gdy zmienne prognozowane charakteryzują się bardzo dużym natężeniem wahań sezonowych tzn. dużym rozstępem ocen wskaźników sezonowości.

Z doświadczenia wynika i takie założenie przyjęto w pracy, że z sytuacją występowania silnych wahań sezonowych będziemy mieć do czynienia wtedy, gdy amplituda ocen wskaźników sezonowości przekracza 60 punktów procentowych. Na duże wahania wartości zmiennej prognozowanej narażony jest zwłaszcza średni absolutny błąd prognozy (MAPE) będący średnią z ilorazów bezwzględnych wartości różnic prognoz i realizacji oraz realizacji zmiennej prognozowanej.

Rozważania teoretyczne zostały zilustrowane na przykładzie produkcji energii cieplnej.

ROZWAŻANIA TEORETYCZNE

W pracach¹ poświęconych analizie dokładności prognoz *ex-post* jako jeden z celów jej przeprowadzania wymienia się wybór najlepszej metody (najlepszego predyktora) wyznaczania prognoz wygasłych. Predyktor lub predyktory charakteryzujące się najniższymi ocenami odpowiednich mierników dokładności rekomenduje się jako predyktory służące budowie prognoz *ex ante*.

W analizie błędów prognoz *ex post* stosowane są zarówno mierniki absolutne jak i względne. Do najczęściej stosowanych mierników absolutnych należą (symbole mierników składają się z pierwszych liter ich nazw w języku angielskim):

- średni błąd predykcji *ex post*:

$$ME = \frac{1}{r} \sum_{t=1}^r (Y_t - Y_{tp}) \quad (1)$$

- średni błąd absolutny:

$$MAE = \frac{1}{r} \sum_{t=1}^r |Y_t - Y_{tp}| \quad (2)$$

- pierwiastek błędu średniokwadratowego:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{r} \sum_{t=1}^r (Y_t - Y_{tp})^2} \quad (3)$$

Między miernikami (1)-(3) zachodzi relacja:

$$|ME| \leq MAE \leq RMSE \quad (4)$$

Relacja między miernikami (2) i (3) wynika bezpośrednio z relacji między średnią z sumy wartości bezwzględnych i pierwiastkiem ze średniej sumy kwadratów.

Spośród mierników względnych należy wymienić przede wszystkim dwa powiązane z miernikami (2) i (3). Pierwszym z nich jest średni absolutny błąd procentowy dany wzorem:

$$MAPE = \frac{1}{r} \sum_{t=1}^r \frac{|Y_t - Y_{tp}|}{Y_t} \quad (5)$$

¹ Por. np. Pawłowski Z. (1973), Przyczynek do teorii analizy predyktywnej informacji *ex post*, Przegląd Statystyczny R. XXIII z.1 s.61-83

Natomiast drugim jest pierwiastek ze współczynnika Theila:

$$I = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^r (Y_t - Y_{tp})^2}{\sum_{t=1}^r Y_t^2}} \quad (6)$$

Ponad to w literaturze² spotkać można mierniki względne będące ilorazami mierników absolutnych *MAE* oraz *RMSE* oraz średniej wartości zmiennej prognozowanej:

$$V_{RSME} = \frac{RMSE}{\bar{y}} \quad (7)$$

$$V_{MAE} = \frac{MAE}{\bar{y}} \quad (8)$$

$$\text{gdzie: } \bar{y} = \frac{1}{r} \sum_{t=1}^r Y_t \quad (9)$$

W celu zbadania relacji między V_{RSME} a pierwiastkiem ze współczynnika Theila (*I*) dokonamy przekształcenia współczynnika I^2 :

$$I^2 = \frac{\sum_{t=1}^r (Y_t - Y_{tp})^2}{\sum_{t=1}^r Y_t^2} \quad (10)$$

Mnożąc licznik i mianownik przez $\frac{1}{r}$ mamy:

$$I^2 = \frac{\frac{1}{r} \sum_{t=1}^r (Y_t - Y_{tp})^2}{\frac{1}{r} \sum_{t=1}^r Y_t^2} = \frac{MSE}{\bar{y}^2} \quad (11)$$

² Liczba potencjalnych mierników, które mogą być wykorzystane w analizie *ex post* dokładności prognoz jest znacznie większa. W pracy Schwarze J. (Hrsg) (1981), *Ausgewählte Prognosenverfahren*, Verlag Neue Wirtschafts-Briefe, Herne/Berlin w rozdziale poświęconym tym miernikom wymienia się ich kilkadziesiąt. W większości są one pochodnymi mierników danych wzorami (1), (2), (4) i (5).

Pierwiastkując obie strony wzoru (11) i korzystając ze wzoru (3) otrzymujemy ostatecznie:

$$I = \frac{RMSE}{\sqrt{\bar{y}^2}} \quad (12)$$

Relację współczynnika I oraz V_{RSME} możemy zapisać następująco:

$$\frac{RMSE}{\sqrt{\bar{y}^2}} \leq \frac{RMSE}{\bar{y}} \quad (13)$$

Określenie znaku nierówności wynika z faktu, że pierwiastek ze średniej z kwadratów jest nie mniejszy od średniej arytmetycznej.

Natomiast brak jest możliwości określenia relacji mierników $MAPE$ oraz I (w odróżnieniu od relacji MAE i $RSME$), ponieważ w odmienny sposób definiowane są ich mianowniki. W przypadku miernika I istnieje możliwość zapisania go jako ilorazu pierwiastków licznika i mianownika:

$$I = \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^r (Y_t - Y_{tp})^2}}{\sqrt{\sum_{t=1}^r Y_{tp}^2}} \quad (14)$$

Takiej możliwości nie ma w przypadku miernika $MAPE$, który jest liczony jako średnia z relatywnych różnic bezwzględnych odchyleń wartości prognoz i wartości rzeczywistych podzielonych przez realizację zmiennej prognozowanej.

Miernik ten jest bardzo wrażliwy na niskie wartości realizacji zmiennej prognozowanej. Przykładowo dla tej samej wartości bezwzględnej błędu prognozy a pięciokrotnie niższej realizacji błąd względny będzie pięciokrotnie wyższy.

Można zaproponować zastąpienie miernika $MAPE$ danego wzorem (5) miernikiem ważonym $MAPE_w$, w którym indywidualne wartości bezwzględne absolutnych błędów prognoz ważne są np. udziałami poszczególnych miesięcy w sumie rocznej:

$$w_t = \frac{Y_t}{\sum_{i=1}^r Y_i} \quad (15)$$

Biorąc pod uwagę (15) wzór na $MAPE_w$ możemy zapisać następująco:

$$MAPE_w = \sum_{t=1}^r \frac{|Y_t - Y_{tp}|}{Y_t} \cdot \frac{Y_t}{\sum_{t=1}^r Y_t} \quad (16)$$

Po dokonaniu przekształcenia wzór (16) przyjmie postać:

$$MAPE_w = \frac{\sum_{t=1}^r |Y_t - Y_{tp}|}{\sum_{t=1}^r Y_t} \quad (17)$$

Następnie po pomnożeniu mianownika przez $\frac{r}{r}$ otrzymamy:

$$MAPE_w = \frac{\sum_{t=1}^r |Y_t - Y_{tp}|}{r \bar{y}} \quad (18)$$

Z kolei wyłączając przed znak sumy jako stałe $\frac{1}{r \bar{y}}$ mamy:

$$MAPE_w = \frac{1}{r \bar{y}} \sum_{t=1}^r |Y_t - Y_{tp}| \quad (19)$$

Uwzględniając (2) otrzymujemy ostatecznie:

$$MAPE_w = \frac{MAE}{\bar{y}} = V_{MAE} \quad (20)$$

Relacja między $MAPE$ i $MAPE_w$ może być różna. Przy założeniu, że wysokie względne błędy prognoz występować będą w okresach, w których udziały realizacji w sumie rocznej będą niewielkie to średni ważony błąd procentowy $MAPE_w$ będzie niższy od $MAPE$.

PRZYKŁAD EMPIRYCZNY

Przeprowadzone wyżej rozważania teoretyczne zostaną zilustrowane przykładem modelowania i prognozowania produkcji niekonwencjonalnej energii cieplnej w wybranym Zakładzie zajmującym się eksploatacją złóż wód geotermalnych. Dane statystyczne o jej kształtowaniu się pochodzą z Banku Danych Katedry Zastosowań Matematyki ZUT w Szczecinie.

Szacowany będzie model szeregu czasowego z liniowym trendem i periodycznym składnikiem sezonowym (S), w którym sezonowość opisywana jest za pomocą wielomianu trygonometrycznego:

$$Y_t = \alpha_1 t + \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m/2} (a_{0i} \sin \omega_i t + b_{0i} \cos \omega_i t) + U_t, \quad (21)$$

gdzie: $\omega_i = \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{m}$, a m oznacza długość cyklu wahań.

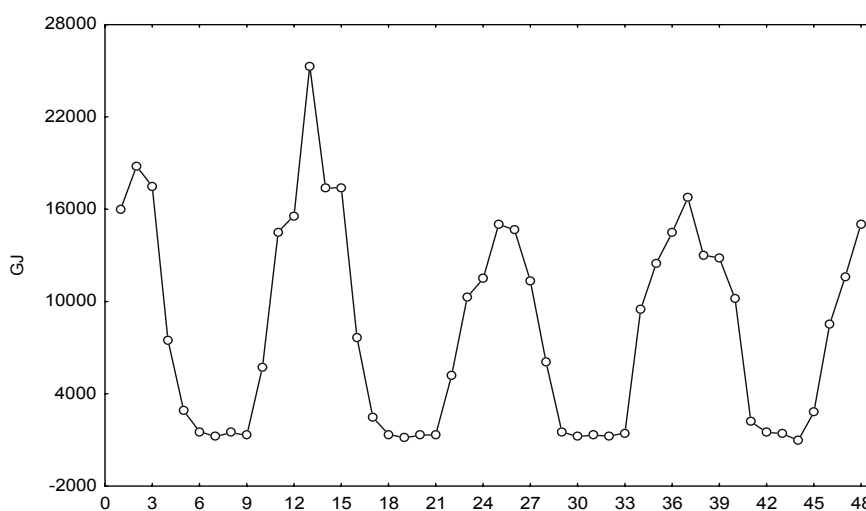
Ponadto oszacowany zostanie model przyczynowo opisowy (P) różniący się od modelu (S) tym, że zawierać będzie zmienną objaśniającą X_{it} oznaczającą

średnią miesięczną temperaturę powietrza (w °C). Analityczny zapis tego modelu będzie następujący:

$$Y_t = \beta_1 X_{it} + \alpha_1 t + \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m/2} (a_{0i} \sin \omega_i t + b_{0i} \cos \omega_i t) + U_t, \quad (22)$$

Kształtowanie się zmiennej prognozowanej w okresie estymacyjnym przedstawione zostało na rysunku 1.

Rysunek 1 Kształtowanie się produkcji geotermalnej energii cieplnej według miesięcy (w GJ)



Źródło: opracowanie własne

Jak wynika z rysunku zmienna prognozowana charakteryzuje się bardzo silnymi wahaniami sezonowymi. W celu określenia skali wahań zostały oszacowane wskaźniki sezonowości. Ich oceny zostały zestawione w tabeli 1. W tabeli tej zestawiono także udziały poszczególnych składowych harmonicznych sinusoidalnych ($S_i = \sin \omega_i t$) oraz kosinusoidalnych ($C_i = \cos \omega_i t$) w wyjaśnianiu sezonowej wariacji badanej zmiennej.

Tabela 1. Oceny wskaźników sezonowości oraz udziały składowych harmonicznych

Miesiąc	Oceny wsk. sez.	Składowa harmoniczna	Udział (w %)
I	235,1	S ₁	30,26
II	189,0	S ₂	1,25
III	172,0	S ₃	1,33
IV	98,8	S ₄	0,21
V	25,3	S ₅	0,38
VI	16,9	C ₁	65,96
VII	14,9	C ₂	0,00
VIII	16,5	C ₃	0,05
IX	17,3	C ₄	0,03
X	86,2	C ₅	0,42
XI	154,9	C ₆	0,12
XII	173,0	Suma	100,00

Źródło: obliczenia własne

Z informacji zawartych w tabeli wynika, że maksymalna ocena wskaźnika sezonowości wynosząca 235,1 przypada na styczeń a minimalna na lipiec-14,9. Tak więc amplituda składników sezonowości przekracza 220 punktów procentowych a współczynnik zmienności tych wskaźników wynosi 81,7 %. Wynika z niej ponadto, że oceny wskaźników nie przekraczające 25,3 procent przypadają na miesiące od maja do września włącznie. Oznacza to, że w tych miesiącach należy liczyć się z dużymi ocenami błędów względnych prognoz.. Dane zawarte w ostatniej kolumnie wskazują na zdecydowaną dominację pierwszej harmoniki (o cyklu dwunastomiesięcznym) w wyjaśnianiu wariacji sezonowej produkcji energii geotermalnej. Jej udział przekracza 96 procent. Wskaźniki udziałów wyższe od jednego procenta otrzymano jedynie dla dwóch składowych sinusoidalnych o cyklach: sześć- i czteromiesięcznym.

W tabeli 2 zestawione zostały oceny parametrów strukturalnych i syntetyczne oceny parametrów struktury stochastycznej modeli danych równaniami: (21) –model S oraz (22)–model P.

Oceny statystyk t otrzymane dla równania S wskazują na statystyczną istotność parametrów występujących przy trzech pierwszych składowych sinusoidalnych i pierwszej składowej kosinusoidalnej a więc tych składowych, których udział w wyjaśnianiu wariacji sezonowej zmiennej przekraczał jeden procent. Ujemna ocena parametru przy zmiennej czasowej wskazuje na spadkową tendencję produkcji energii geotermalnej. W równaniu przyczynowo-opisowym statystycznie istotny okazał się parametr przy zmiennej X_{1t} . Spośród składowych harmonicznych statycznie istotne oceny otrzymano dla czterech składowych sinusoidalnych i dwóch składowych kosinusoidalnych. Zwraca uwagę fakt,

że nieistotne okazały się parametry przy dwóch składowych o najwyższych udziałach w wyjaśnianiu wariacji sezonowej.

Tabela 2. Oceny parametrów strukturalnych i struktury stochastycznej równań S i P

Zmienna	Model S		Model P	
	Ocena par.	t(35)	Ocena par.	t(34)
W. wolny	8775,60	13,78	17365,34	14,81
S ₁	4886,27	11,08	731,40	1,22
S ₂	992,19	2,28	1226,59	4,60
S ₃	-1023,71	-2,36	-797,00	-3,00
S ₄	409,28	0,95	893,38	3,30
S ₅	544,06	1,26	593,09	2,25
C ₁	7213,68	16,65	96,37	0,10
C ₂	13,65	0,03	471,14	1,74
C ₃	-198,59	-0,46	43,25	0,16
C ₄	-162,04	-0,37	-106,26	-0,40
C ₅	-573,00	-1,32	-590,21	-2,24
C ₆	-215,17	-0,70	-266,57	-1,43
t	-23,566	-1,03	1,938	0,14
X _{It}	-	-	-835,44	-7,76
R ²	0,9241		0,9726	
SE	2119		1291,4	
\bar{y}	8198,23		8198,23	
V _{SE}	0,2585		0,1575	

Źródło: obliczenia własne

Z kształtowania się ocen współczynników determinacji wynika, że obydwa równania w ponad 90 procentach wyjaśniają kształtowanie się zmiennej prognozowanej. Dla równania przyczynowo-opisowego ocena ta jest o ponad pięć punktów procentowych wyższa. Równanie to charakteryzuje się ponad 10 punktów procentowych niższą oceną współczynnika zmienności losowej.

Na podstawie oszacowanych równań na kolejne 12 miesięcy zostały zbudowane prognozy produkcji energii a następnie została przeprowadzona analiza *ex post* ich dokładności.

Kształtowanie się prognoz otrzymanych na podstawie oszacowanych równań S i P oraz realizacji zmiennej prognozowanej przedstawione zostały w tabeli 3.

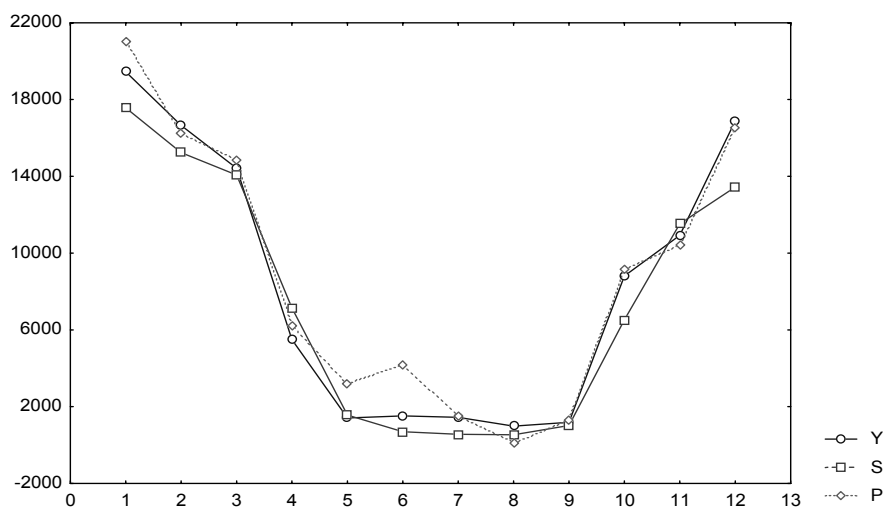
Tabela 3. Prognozy i realizacje produkcji geotermalnej energii cieplnej (GJ)

Nr okresu prog.	Yt	Pt	St
1	19448,66	20996,43	17572,51
2	16653,45	16237,50	15240,54
3	14422,65	14855,31	14067,21
4	5499,27	6219,24	7145,89
5	1417,20	3193,70	1563,90
6	1518,00	4150,52	697,36
7	1446,00	1508,10	561,26
8	985,00	89,88	540,32
9	1191,00	1317,13	1017,76
10	8811,50	9162,11	6521,42
11	10923,20	10420,25	11526,51
12	16893,16	16544,52	13440,16

Źródło: obliczenia własne

Prezentację graficzną informacji zawartych w powyższej tabeli stanowi rysunek 3.

Rysunek 3. Kształtowanie się prognoz i realizacji produkcji energii cieplnej (w GJ)



Źródło: obliczenia własne

Z rysunku wynika, że wartości prognoz otrzymanych na podstawie modelu P dla maja i czerwca dość znacznie różnią się od realizacji. Przy niskich wielkościach produkcji oznacza to występowanie dużych względnych błędów

prognoz. Największą różnicę prognozy i realizacji dla modelu S otrzymano dla grudnia. Jednak wielkość produkcji w tym miesiącu była około 10 razy wyższa niż w miesiącach letnich-stąd odpowiednio niższy był błąd względny.

Na podstawie danych zawartych w tabeli 3 obliczone zostały absolutne i relatywne mierniki dokładności prognoz *ex post* otrzymanych na podstawie modelu szeregu czasowego z liniowym trendem i periodycznym składnikiem sezonowym (S) oraz modelu przyczynowo-opisowego, do którego jako zmienną objaśniającą wprowadzono temperaturę (P). Ich oceny zostały zestawione w tabeli 4. Spośród ocen parametrów struktury stochastycznej zwraca uwagę bardzo wysoka wartość względnego błędu prognoz otrzymanych na podstawie modelu P wynosząca 36,81 procent. Dla modelu S jest ona o ponad 12 punktów procentowych niższa. Tak, więc oparcie się na mierniku MAPE, szczególnie w przypadku modelu P stawia pod dużym znakiem zapytania w ogóle możliwość wykorzystania go w procesie prognozowania. Wysoka jego ocena wynika z bardzo dużych względnych błędów prognoz dla miesięcy przypadających na koniec wiosny i lato (ich wartości dla maja i czerwca przekraczają 100 procent). Miesiące te charakteryzują się bardzo niskim zapotrzebowaniem na energię cieplną - jest ona używana jedynie jako źródło podgrzania wody zimnej. Współczynniki zmienności względnych błędów prognoz przyjęły wartości wynoszące odpowiednio:

Tabela 4. Oceny absolutnych i względnych mierników błędów prognoz (w %) produkcji geotermalnej energii cieplnej (w GJ)

Miernik	Jednostki	Model	
		S	P
<i>ME</i>	GJ	-776,19	457,13
<i>MAE</i>	GJ	1175,62	817,57
<i>RMSE</i>	GJ	1516,33	1175,62
<i>MAPE</i>	%	23,98	36,81
$MAPE_{w=} = V_{MAE}$	%	14,22	9,89
<i>I</i>	%	14,11	10,29
V_{RMSE}	%	18,34	13,38

Źródło: obliczenia własne

dla modelu S 82,6 a modelu P 160,1 procent. Wyklucza to w sposób jednoznaczny użycie średnich absolutnych błędów prognoz (*MAPE*) jako mierników oceny ich dokładności.

Potwierdzeniem tego spostrzeżenia jest bardzo duże zróżnicowanie ocen mierników MAPE w ujęciu kwartalnym. Oceny błędów średnich w poszczególnych kwartałach wynosiły dla modelu S: 6,87, 31,45, 40,29 oraz 17,32 procent. W przypadku modelu P oceny te przyjęły wartości: 4,49, 103,96, 35,23 oraz 3,54 procent. Jednocześnie w sposób odmienny kształtowały się udziały poszczególnych kwartałów w produkcji rocznej. Wynosiły one odpowiednio:

50,93, 8,51, 3,65 oraz 36,92 procent. Z tego wynika, że łączny udział kwartałów II i III był jedynie nieznacznie wyższy od 12,5 procent. Taka struktura produkcji oznacza, że wskaźniki $MAPE_w$ przyjmują znacznie niższe wartości. Po przeprowadzeniu operacji „ważenia” błędów względnych udziałami poszczególnych miesięcy w sumie rocznej jego ocena dla modelu P uległa zmniejszeniu do 9,89 procent. W przypadku modelu S miał miejsce spadek z 23,98 do 14,22 procent.

Oceny współczynników I przyjęły wartości znacznie niższe od odpowiednich średnich względnych błędów prognoz($MAPE$) i wynosiły odpowiednio: dla modelu S 14,11 procent a modelu P 10,29 procent. W pierwszym przypadku ocena I jest o 0,11 punktu procentowego niższa od $MAPE_w$ a w drugim wyższa o 0,40 punktu procentowego.

PODSUMOWANIE

Z przeprowadzonych w pracy rozważań oraz przedstawionego przykładu empirycznego wynika jednoznacznie, że do oceny „jakości” prognoz *ex post* zmiennych charakteryzujących się dużą skalą wahań sezonowych nie powinien być wykorzystany przeciętny względny błąd prognozy ($MAPE$) a przeciętny ważony względny błąd prognozy ($MAPE_w$) lub pierwiastek ze współczynnika rozbieżności Theila (I).

BIBLIOGRAFIA

- Dittann P., Dittann I, Szabelka-Pasierbińska E., Szpulak A. (2009) Prognozowanie w zarządzaniu przedsiębiorstwem, Wolters Kluwer.
- Gruszczyński M., Podgórska M.(1996) Ekonometria, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa.
- Pawłowski Z. (1973) przyczynek do teorii analizy predyktywnej informacji *ex post*, Przegląd Statystyczny R. XXIII z.1 s.61-83.
- Schwarze J. (Hrsg) (1981) Ausgewahlte Prognosenverfahren, Verlag Neue Wirtschafts-Briefe, Herne/Berlin.
- Zeliaś A., Pawełek B., Wanat S. (2003) Prognozowanie ekonomiczne. Teoria, przykłady, zadania., PWN, Warszawa.

**ABOUT MEASURES OF EX-POST THE FORECASTS ACCURACY
USED TO VARIABLES WITH STRONG OF SEASONAL
FLUCTUATIONS**

Abstract: This work is devoted to discussions on application of relative measures of accuracy of the ex-post forecasts. The authors showed that when the variable has a very large amplitude of seasonality indicators the average absolute forecast error (MAPE) can not be used. Theoretical study are illustrated on the example of thermal energy production.

Key words: measures of forecasts accuracy, seasonal fluctuations