METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XIII/3, 2012, str. 107 – 116

KILKA UWAG DOTYCZĄCYCH STOPY ZWROTU W TERMINIE DO WYKUPU

Andrzej Karpio
Katedra Ekonometrii i Statystyki
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
andrzej_karpio@sggw.pl

Streszczenie: Stopa zwrotu w terminie do wykupu (YTM) jest podstawową i powszechnie stosowaną miarą efektywności inwestycji w papiery dłużne. Wykorzystywana przez praktyków definicja zakłada stałe płatności kuponowe i jednakowe okresy odsetkowe. Są to ograniczenia nierealistyczne. W prezentowanej pracy autor zajmuje się przypadkiem ogólnym, podaje wyrażenia na wartość wewnętrzną obligacji bez wymienionych założeń. W konsekwencji wyprowadza wzór na stopę zwrotu w terminie do wykupu w postaci uwzględniającej zmienne okresy odsetkowe, posiadający własności asymptotyczne zgodne z metodologią wyceny papierów dłużnych i dający możliwość dalszych przybliżeń.

Słowa kluczowe: obligacja, wartość wewnętrzna, krzywa dochodowości, stopa zwrotu w terminie do wykupu, bieżąca stopa zwrotu

WSTĘP

Problem określenia efektywności inwestycji w papiery dłużne jest bardzo istotny z punktu widzenia rynku finansowego, przede wszystkim ze względu na rolę jaką odgrywają na nim instrumenty emitowane przez skarb państwa. Możliwa do osiągnięcia stopa zwrotu, wielkość płatności kuponowych, stopy dyskontowe są podstawą konstrukcji instrumentów dłużnych innych emitentów, którzy opierają się na parametrach charakteryzujących instrumenty skarbowe. Jednym z podstawowych jest stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM (ang. *yield to maturity*) definiowana przy założeniu płaskiej struktury terminowej. Na ogół nie da się podać jej dokładnej wartości, wymagane są przybliżenia, a zatem założenia upraszczające definicję. W pracy zrezygnowano z wielu uproszczeń, chociażby z jednakowych okresów odsetkowych, czy też założenia, że w momencie wyznaczania stopy zwrotu w terminie do wykupu mamy przed sobą pełne okresy odsetkowe. Intencją autora jest uporządkowanie wiedzy na temat YTM i podanie wzorów, zarówno ścisłych, gdy jest to możliwe, jak i przybliżonych, ale w ogólniejszej postaci niż są stosowane w praktyce. Dodatkowo przeprowadzona zostanie dyskusja własności stopy zwrotu w terminie do wykupu. Rozważania zostaną ograniczone do obligacji bez dodatkowych opcji w rodzaju prawa do wcześniejszego wykupu przez emitenta lub prawa do przedstawienia do wcześniejszego wykupu przez inwestora. Również nie będą rozważane obligacje zamienne, te bowiem bardziej przypominają opcje niż instrumenty dłużne.

ROZWAŻANIA WSTĘPNE

W tej części pracy zostaną podane założenia wstępne oraz przeprowadzona dyskusja ogólnego wzoru na wartość wewnętrzną obligacji. Załóżmy, że mamy do czynienia z obligacją wypłacającą odsetki w chwilach przyszłych $t_1, t_2, \ldots, t_N$ (daty). Ponadto, chwilę dzisiejszą, czyli datę wyceny obligacji, oznaczać będziemy symbolem t_0. W tym momencie odsetki mogą być wypłacane, ale nie muszą. Dodatkowo, dla wygody, chwilę końcową t_N oznaczać będziemy symbolem T. Wówczas następuje wykup obligacji oraz wypłata ostatniego kuponu. Przyjęte oznaczenia pozwalają wyrazić w postaci różnic: termin do wykupu $T - t_0$ oraz okresy odsetkowe $\Delta t_{i-1} = t_i - t_{i-1}$, gdzie $i = 1,2,\ldots,N$. Zachodzi wówczas oczywista równość: $\sum_{i=1}^{N} \Delta t_{i-1} = T - t_0$. Przyjmujemy umowę, że wszelkie okresy czasu będą wyrażone w latach. Niech $h_{i-1,i}$ oznacza strumień odsetek (kwotę odsetek odniesioną do roku). Wówczas, w okresie odsetkowym Δt_{i-1} wypłata będzie równa: $h_{i-1,i}\Delta t_{i-1}$. Strumień odsetek wiąże się z nominalną stopą kuponową w okresie od t_{i-1} do t_i związkiem: $h_{i-1,i} = s_{i-1,i} P_M$, gdzie P_M jest wartością nominalną obligacji.

Do wyceny obligacji konieczne jest przyjęcie wymaganych stóp procentowych, związanych z momentami wypłaty odsetek. Będą one grały rolę stóp dyskontowych. Załóżmy zatem, że dysponujemy strukturą terminową zadawaną funkcją $r(t)$. Z definicji $r(t)$ jest nominalną stopą natychmiastową (spot), czyli stopą zwrotu z inwestycji zaczynającej się w chwili obecnej t_0 i kończącej się w chwili przyszłej *t*. Na użytek dalszych rozważań wprowadzimy oznaczenie: $r(t_i) = r_{0,i}$. Nie ograniczając ogólności rozważań możemy założyć, że struktura terminowa jest funkcją ciągłą i ma skończoną wartość graniczną: $\lim_{t\to\infty} = r_{0,\infty}$. Założenie to wynika z praktyki rynkowej. Inwestycje długoterminowe, na przykład dwudziesto- lub trzydziestoletnie charakteryzują się skończonymi nominalnymi stopami procentowymi, niewiele różniącymi się od stóp kilku lub kilkunastoletnich. Nie czynimy żadnych założeń dotyczących monotoniczności $r(t)$, ale warto przypomnieć standardową terminologię: normalna struktura terminowa występuje wówczas, gdy funkcja jest rosnąca; odwrócona, gdy jest malejąca i płaska, gdy jest to funkcja stała. Pomijamy inne przypadki, gdy $r(t)$ nie jest monotoniczna, chociaż takie sytuacje mają miejsce na rzeczywistych rynkach finansowych. Większość wyników zaprezentowanych w pracy nie zależy od monotoniczności struktury terminowej. Dużo ważniejsze jest przyjęte wyżej założenie o skończonej granicy przy *t* dążącym do nieskończoności.

Standardowe wyrażenie na wartość wewnętrzną obligacji, jako suma zdyskontowanych przepływów finansowych, przybiera postać [Karpio, 2008, 3]:

$$P_{t_0T} = \sum_{i=1}^{N} \frac{h_{i-1,i}\Delta t_{i-1}}{\prod_{m=1}^{i}\left(1 + r_{0,i}\Delta t_{m-1}\right)} + \frac{P_M}{\prod_{m=1}^{N}\left(1 + r_{0,N}\Delta t_{m-1}\right)} \tag{1}$$

gdzie symbol P_{t_0T} w jawny sposób uwzględnia chwilę dzisiejszą t_0 (data wyceny) i końcową *T* (wykup obligacji). Wyrażenie to jest mało wygodne do dalszej dyskusji poza dwoma wnioskami, które nasuwają się natychmiast: wartość wewnętrzna jest malejącą funkcją stóp natychmiastowych $r_{0,i}$ oraz jej wartość, przy zerowych stopach procentowych jest równa: $P_{t_0T} = \sum_{i=1}^{N} h_{i-1,i}\Delta t_{i-1} + P_M$. Zatem wyraża się w postaci sumy płatności kuponowych i wartości nominalnej. Dalsza dyskusja wymaga przekształcenia powyższego wzoru. W tym celu korzystamy z definicji jednookresowych stóp terminowych $f_{i-1,i}$, związanych z okresami odsetkowymi Δt_{i-1} [Karpio, 2008, 4], [Luenberger, 2003]:

$$1 + f_{i-1,i}\Delta t_{i-1} = \frac{\prod_{m=1}^{i}\left(1 + r_{0,i}\Delta t_{m-1}\right)}{\prod_{m=1}^{i-1}\left(1 + r_{0,i-1}\Delta t_{m-1}\right)} \tag{2}$$

Dodatkowo, zastępując strumienie odsetek $h_{i-1,i}$ stopami kuponowymi $s_{i-1,i}$ możemy otrzymać następującą zależność:

$$\frac{P_{t_0T}}{P_M} - 1 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(s_{i-1,i} - f_{i-1,i}\right)\Delta t_{i-1}}{\prod_{m=1}^{i}\left(1 + r_{0,i}\Delta t_{m-1}\right)} \tag{3}$$

Dyskusję tego wzoru wraz z wnioskami ważnymi z punktu widzenia inwestorów, można znaleźć we wcześniejszej pracy autora [Karpio, 2008, 3]. Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na to, że wartość wewnętrzna istotnie zależy od relacji pomiędzy stopami kuponowymi $s_{i-1,i}$ i stopami terminowymi $f_{i-1,i}$. Te ostatnie, w zależności od konstrukcji obligacji, mogą być stopami WIBOR lub rentownością bonów skarbowych, jeśli rozważamy obligacje o zmiennym oprocentowaniu. Skarb Państwa najczęściej oferuje oprocentowanie powiązane z tymi dwoma parametrami rynkowymi. Oczywiście, nie znamy przyszłych stóp, ani rynkowych, ani kuponowych, ale emitent zawsze deklaruje określoną relację pomiędzy nimi. Zaglądając do listów emisyjnych obligacji skarbowych[1] zauważymy, że obligacje detaliczne mają stopy kuponowe związane ze stopą WIBOR (utożsamianą w tym przypadku z $f_{i-1,i}$) relacją: $s_{i-1,i} = pf_{i-1,i}$, gdzie p jest dla danej obligacji stałym czynnikiem, najczęściej przyjmującym wartości: 0,98, 0,95 itd.. W obecnej sytuacji rynkowej współczynniki p są mniejsze od jedności, z wyjątkiem serii wyemitowanej w lutym 2012 roku, dla której $p = 1$. Warto w tym momencie wspomnieć, że ten przypadek prowadzi do anomalnego zachowania się ceny obligacji w funkcji stóp dyskontowych [Karpio, 2012, 5]. Wspomniana seria TZ0215 jest ostatnią notowaną na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Kolejne emisje mają identyczną konstrukcję, ale nie są notowane na wolnym rynku. Z kolei oprocentowanie obligacji hurtowych powiązane jest z rentownością bonów skarbowych. Ich związek ze stopami terminowymi opisany jest równością: $s_{i-1,i} = s + f_{i-1,i}$, w której s jest rzędu jednego procenta. W pracy [Karpio, 2008, 3] zamieszczono dyskusję powyższej zależności zakładając ogólną relację: $s_{i-1,i} = s + pf_{i-1,i}$, zatem obejmującą obie grupy wspomnianych obligacji skarbowych. W szczególnym przypadku otrzymujemy obligacje o stałym oprocentowaniu ($p = 0$) lub obligacje zerokuponowe ($s = 0, p = 0$).

STOPA ZWROTU W TERMINIE DO WYKUPU

Definicja stopy zwrotu w terminie do wykupu r_{YTM} jest następująca: Jest to stopa spełniająca równanie:

$$\frac{P_{t_0T}}{P_M} - 1 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(s_{i-1,i} - r_{YTM}\right)\Delta t_{i-1}}{\prod_{m=1}^{i}\left(1 + r_{YTM}\Delta t_{m-1}\right)} \tag{4}$$

w którym P_{t_0T} jest ceną rynkową obligacji lub wartością wewnętrzną, jeśli r_{YTM} potraktujemy jako stopę wymaganą przez inwestora. Rozwiązanie tego równania nastręcza wiele kłopotów i może być otrzymane jedynie w postaci przybliżonej, z wyjątkiem pewnych szczególnych przypadków. Cena jest funkcją ciągłą i monotonicznie malejącą do zera przy stopie r_{YTM} dążącej do nieskończoności, zatem istnieje jednoznaczne rozwiązanie powyższego równania przy zadanej wartości P_{t_0T}. Obserwując notowania obligacji na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie można zauważyć, że ich cena niewiele różni się

[1] Listy emisyjne są dostępne na stronach Ministerstwa Finansów: www.mf.gov.pl

od wartości nominalnej. Poniższa tabela podaje notowania obligacji trzyletnich o zmiennym oprocentowaniu. W oczy rzuca się mała płynność, niestety jest to cecha wszystkich obligacji występujących na polskim rynku kapitałowym, w tym również skarbowych.

Tabela 1. Tabela notowań obligacji trzyletnich na GPW w dniu 7 09 2012

Nazwa obligacji	Data ostatniej transakcji	Kurs zamknięcia
TZ0214	2012-09-06	100,19
TZ0215	2012-09-05	100,21
TZ0513	2012-09-03	100,00
TZ0514	2012-09-06	100,30
TZ0813	2012-09-05	99,91
TZ0814	2012-09-05	100,22
TZ1112	2012-08-17	99,90
TZ1113	2012-09-07	100,05
TZ1114	2012-09-07	100,20

Źródło: Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie

W konsekwencji nasuwa się przypuszczenie, że rozwiązania równania (4) można poszukiwać przybliżając funkcję $P_{t_0T}(r_{YTM})$ styczną w punkcie, w którym zachodzi równość: $P_{t_0T} = P_M$. Z ciągłości i monotoniczności wynika, że taka wartość argumentu istnieje dokładnie jedna, bowiem wartości rozważanej funkcji zawierają się w przedziale $\left\langle P_M \sum_{i=1}^{N} s_{i-1,i}\Delta t_{i-1} + P_M, 0\right)$. Oznaczając szukaną stopę symbolem r_{YTM}^M (gdzie wskaźnik M nawiązuje do wartości nominalnej P_M) musimy rozwiązać równanie:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(s_{i-1,i} - r_{YTM})\Delta t_{i-1}}{\prod_{m=1}^{i}(1 + r_{YTM}\Delta t_{m-1})} = 0 \tag{5}$$

Jeśli stopa kuponowa jest stała ($s_{i-1,i} = s$), to ścisłym rozwiązaniem jest $r_{YTM}^M = s$, w pozostałych przypadkach ponownie musimy zadowolić się rozwiązaniem przybliżonym. Jeśli iloczyny w mianownikach zastąpimy jedynkami, to rozwiązaniem będzie średnia ważona czasem stóp kuponowych:

$$r_{YTM}^M \approx \sum_{i=1}^{N} s_{i-1,i} \frac{\Delta t_{i-1}}{T - t_0} \tag{6}$$

Pochodna ceny względem stopy r_{YTM}^{M} jest równa:

$$P'(r_{YTM}) = -\frac{P_M}{r_{YTM}}\left(1 - \frac{1}{\prod_{i=1}^{N}(1 + r_{YTM}\Delta t_{m-1})}\right) - \\ - P_M \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{(s_{i-1,i} - r_{YTM})\Delta t_{i-1}}{\prod_{m=1}^{i}(1 + r_{YTM}\Delta t_{m-1})}\sum_{m=1}^{i}\frac{\Delta t_{m-1}}{1 + r_{YTM}\Delta t_{m-1}}\right) \tag{7}$$

Suma po prawej stronie zawiera różnice $s_{i-1,i} - r_{YTM}$, które są bliskie zeru gdy $r_{YTM} = r_{YTM}^{M}$. Średnia stopa kuponowa niewiele różni się od swoich składników, przede wszystkim wówczas, gdy mamy do czynienia ze stabilną sytuacją rynkową. Wówczas stopy kuponowe zmieniają się w niewielkim zakresie, szczególnie w krótkim lub średnim okresie czasu. W konsekwencji, przybliżonemu współczynnikowi kierunkowemu szukanej stycznej można nadać wartość:

$$P'(r_{YTM}^{M}) \approx -\frac{P_M}{r_{YTM}^{M}}\left(1 - \frac{1}{\prod_{i=1}^{N}(1 + r_{YTM}^{M}\Delta t_{m-1})}\right) \tag{8}$$

Pisząc równanie stycznej i wyznaczając z niej r_{YTM} znajdujemy przybliżoną wartość stopy zwrotu w terminie do wykupu:

$$r_{YTM} \approx r_{YTM}^{M}\left(1 - \frac{P_{t_0T} - P_M}{P_M}\left(1 - \frac{1}{\prod_{m=1}^{N}(1 + r_{YTM}^{M}\Delta t_{m-1})}\right)^{-1}\right) \tag{9}$$

W przypadku obligacji o stałym kuponie $s_{i-1,i} = s = const$ stopa r_{YTM}^{M} jest równa stopie kuponowej s i jest to ścisłe rozwiązanie równania (4). Ponadto, pominięte wyżej wyrazy zawierające różnice $s_{i-1,i} - r_{YTM}$ są dokładnie równe zeru. Zatem w tym przypadku otrzymane przybliżenie stopy zwrotu w terminie do wykupu korzysta jedynie z przybliżenia zależności $P_{t_0T}(r_{YTM})$ styczną.

Przyjrzyjmy się równaniu na r_{YTM}^{M}. Zamiast przybliżonego rozwiązania w postaci średniej ważonej czasem stóp kuponowych możemy skorzystać z innego oszacowania. Załóżmy, że ciąg stóp kuponowych $s_{i-1,i}$ dla $i = 1,2,\ldots,N$ jest ograniczony, co jest naturalnym założeniem z punktu widzenia rynku finansowego. Górne i dolne ograniczenia oznaczmy odpowiednio: $s_{\max} = \sup\{s_{i-1,i}\}$, $s_{\min} = \inf\{s_{i-1,i}\}$.

Po skorzystaniu z tożsamości:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta t_{i-1}}{\prod_{m=1}^{i}\left(1+r_{YTM}\Delta t_{m-1}\right)}=\frac{1}{r_{YTM}}\left(1-\frac{1}{\prod_{m=1}^{N}\left(1+r_{YTM}\Delta t_{m-1}\right)}\right) \tag{10}$$

równanie (4) prowadzi do oszacowania:

$$s_{\min}\leq r_{YTM}^{M}\leq s_{\max} \tag{11}$$

Przyjęte rozwiązanie w postaci średniej ważonej czasem stóp kuponowych spełnia powyższą nierówność, ale to oszacowanie pozwala we wzorze (9) wstawić za r_{YTM}^{M} jakąkolwiek wartość spełniającą warunek (11), na przykład średnią arytmetyczną kresów ciągu $s_{i-1,i}$ lub obecną wartość stopy kuponowej. Ten drugi wariant jest szczególnie użyteczny z praktycznego punktu widzenia, bowiem nie wymaga znajomości wszystkich stóp kuponowych, w tym prognozowanych, a jedynie tej, która jest właśnie obowiązująca. Ponadto widać dlaczego obligacje o stałym kuponie prowadzą do ścisłego rozwiązania równania (4), wówczas oba kresy są jednakowe. Z otrzymanej zależności wynika dodatkowy ważny wniosek mający zastosowanie dla obligacji bezterminowych lub długoterminowych. Nawet w tym pierwszym przypadku, gdy ciąg stóp kuponowych jest nieskończony, założenie o jego ograniczoności pozostaje w mocy. W konsekwencji, w granicy $N\to\infty$ stopa zwrotu w terminie do wykupu, otrzymana z równania (9), przyjmuje wartość:

$$r_{YTM}=r_{YTM}^{M}\frac{P_{t_0T}}{P_M} \tag{12}$$

Jej jawna postać zależy od przyjętego oszacowania stopy r_{YTM}^{M}. Jeśli mamy do czynienia z obligacjami o stałym kuponie *s*, to otrzymane rozwiązanie prowadzi do stopy zwrotu zadanej wzorem:

$$r_{YTM}=s\frac{P_{t_0T}}{P_M} \tag{13}$$

W przypadku obligacji bezterminowych jest to ścisła wartość, którą można otrzymać bezpośrednio ze wzoru (4) na cenę obligacji, bez jakichkolwiek przybliżeń. Dla obligacji długoterminowych powyższy wzór jest przybliżony, ale często stosowany w praktyce, przede wszystkim ze względu na swoją prostotę.

Na zakończenie warto zwrócić uwagę na następujący aspekt zaprezentowanego rozwiązania równania (5), gdzie czynniki w mianownikach zastąpiono najmniejszą ich wartością, a mianowicie jedynkami. Jeśli poszukujemy lepszego przybliżenia, to możemy uwzględnić następny wyraz rozwinięcia i skorzystać z równości:

$$\frac{1}{\prod_{m=1}^{i}\left(1+r_{YTM}\Delta t_{m-1}\right)}\approx 1-r_{YTM}\left(t_i-t_0\right) \tag{14}$$

Wówczas rozwiązanie będzie miało postać:

$$r_{YTM}^{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} s_{i-1,i}\Delta t_{i-1}}{T - t_0 + \sum_{i=1}^{N} s_{i-1,i}\Delta t_{i-1}\left(t_{i-1} - t_0\right)} \tag{15}$$

Pozostałe wyrażenia na stopę zwrotu w terminie do wykupu pozostaną bez zmian, ale występująca w nich stopa r_{YTM}^{M} będzie miała wartość zadaną powyższym wzorem. Jednak to przybliżenie nie prowadzi do ścisłego rozwiązania równania (5), gdy mamy do czynienia z obligacjami o stałym kuponie. Jednak przykłady liczbowe wykorzystujące dane empiryczne pokazują, że lepsze wyniki daje przybliżenie wzorem (6) lub oszacowanie (11).

INNE PODEJŚCIE DO STOPY YTM

Najczęściej wykorzystywana do obliczeń przybliżona wartość stopy zwrotu w terminie do wykupu wykorzystuje przybliżenie zależności $P_{t_0T}\left(r_{YTM}\right)$ funkcją wymierną postaci:

$$P_{t_0T} = \frac{\alpha + \beta \cdot r_{YTM}}{1 + \gamma \cdot r_{YTM}} \tag{15}$$

Współczynniki α, β, γ dla obligacji o stałym kuponie wyznaczamy z warunków na wartości funkcji w punktach $r_{YTM} = 0$ (wtedy $P_{t_0T} = \sum_{i=1}^{N} h_{i-1,i}\Delta t_{i-1} + P_M$), $r_{YTM} = s$ (wówczas $P_{t_0T} = P_M$) oraz na wartość asymptotyczną przy $r_{YTM} \to +\infty$, przyjmując, że wartość wewnętrzna dąży do $-P_M$. Dwa pierwsze punkty leżą na krzywej, natomiast trzeci jest nierealistyczny, gdyż w rzeczywistości graniczną wartością P_{t_0T} jest zero. Takie podejście daje wzór dobrze sprawdzający się dla rzeczywistych wartości stopy zwrotu w terminie do wykupu niewiele różniącej się od zera i od $r_{YTM} = s$. Ma on postać [Fabozzi i in. 2000], [Luenberger, 2003]:

$$r_{YTM} \approx 2\frac{sP_M + \dfrac{P_M - P_{t_0T}}{T - t_0}}{P_M + P_{t_0T}} \tag{16}$$

Jednak w porównaniu z wyrażeniem zaproponowanym w poprzednim rozdziale, nie prowadzi on do właściwej wartości asymptotycznej charakteryzującej obligacje bezterminowe. Ponadto nie uwzględnia zmiennych okresów odsetkowych, które występują na rzeczywistym rynku. W szczególności, stopa obliczana z powyższego wzoru będzie jednakowa bez względu na to czy odsetki są wypłacane raz w roku, dwa razy, czy w innych okresach jeśli tylko obligacje mają jednakową cenę i taki sam termin do wykupu. Jest to oczywiste uproszczenie, inna jest stopa zwrotu gdy reinwestujemy kapitał częściej, a inna gdy rzadziej. Zatem wzór ten nie uwzględnia realiów rynku obligacji, niemniej jednak daje dosyć dobre przybliżenie i dlatego jest powszechnie stosowany. Można w tym miejscu zaproponować jego wariant mający zastosowanie do obligacji o zmiennym oprocentowaniu Mianowicie, jeśli drugi wspomniany wyżej warunek zastąpimy nieco ogólniejszym, ale przybliżonym: $r_{YTM} \approx \sum_{i=1}^{N} s_{i-1,i} \frac{\Delta t_{i-1}}{T-t_0}$, dla $P_{t_0T} = P_M$, to otrzymamy następującą wartość stopy zwrotu w terminie do wykupu:

$$r_{YTM} \approx 2 \frac{P_M \sum_{i=1}^{N} s_{i-1,i} \frac{\Delta t_{i-1}}{T-t_0} + \frac{P_M - P_{t_0T}}{T-t_0}}{P_M + P_{t_0T}} \tag{17}$$

Posiada ona te same mankamenty co stopa wyznaczona ze wzoru (16), ale ma ogólniejszą postać uwzględniającą zmienne stopy kuponowe i niejednakowe okresy odsetkowe i również daje dobre przybliżenie. Gdy rozważamy obligacje o stałym kuponie wzór (17) staje się poprzednim wzorem.

UWAGI KOŃCOWE

W podsumowaniu warto wspomnieć, że często stosowany w praktyce wzór przybliżony (16) określający stopę zwrotu w terminie do wykupu [Fabozzi, 2000] ma bardzo ograniczone zastosowanie. Przede wszystkim dlatego, że nie uwzględnia zmiennych okresów odsetkowych, istotnych z inwestycyjnego punktu widzenia. Ponadto, otrzymuje się go przy założeniu, które nie ma nic wspólnego z rzeczywistym asymptotycznym zachowaniem się wartości wewnętrznej: $P_{t_0T} \to -P_M$, gdy $r_{YTM} \to +\infty$. Zaproponowany przez autora wzór (9) nie ma tych mankamentów. Co więcej, uwzględnia zmienne okresy odsetkowe, ma własności asymptotyczne zgodne z wyceną obligacji, między innymi prowadzi do bieżącej stopy zwrotu (13), będącej ścisłym rozwiązaniem równania (5). Dodatkowo, niejako przy okazji, pojawiła się modyfikacja wyrażenia na stopę YTM uwzględniająca oszacowania zmiennych stóp kuponowych (11). Niewielka ilość miejsca nie pozwala przytoczyć przykładów wykorzystania podanych przez autora wzorów dla obligacji notowanych na rynku finansowym, ale otrzymane przybliżenia okazują się bardzo dobre. W przykładowych oszacowaniach, w zależności od terminu do wykupu, otrzymane wartości różnią się od rzeczywistych znacznie mniej niż jeden procent, do obliczeń przyjęto duży zakres zmienności kuponów i okresów wykupu obligacji. Warto również wspomnieć, że podobne wyrażenia do (9) można otrzymać przy szacowaniu wewnętrznej stopy zwrotu wykorzystywanej przy ocenie projektów inwestycyjnych oraz rzeczywistej rocznej stopy oprocentowania kredytów.

BIBLIOGRAFIA

Fabozzi F., J., Fong G. (2000) Zarządzanie portfelem inwestycji finansowych przynoszących stały dochód, PWN, Warszawa.

Fabozzi F., J. (2000) Rynki obligacji. Analiza i strategie, WIG – PRESS, Warszawa.

Karpio A. (2008) Some Aspects of Debt Securities Valuation In Descrete Time, Optimum. Studia Ekonomiczne, Nr 3 (39), str. 189 – 198.

Karpio A. (2008) Stopy terminowe przy różnych procesach akumulacji kapitału, Matematyczne Aspekty Ekonomii (red. W. Kulpa), Wydawnictwo Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego, Warszawa, str. 49 -60.

Karpio A. (2012) Anomalies in bond pricing, 73 Konferencja International Atlantic Economical Society, Istambuł, 28-31 marca 2012.

Luenberger D., G. (2003) Teoria inwestycji finansowych, PWN, Warszawa.

A FEW REMARKS ON YIELD TO MATURITY

Abstract: Yield to maturity is the fundamental and common used measure of investment effectiveness in debt securities. Almost always it is defined under non realistic assumptions, namely that coupon payments are constant and coupon periods are the same. In the presented work author concerns the general case. He gives the expressions for intrinsic value of bonds without simplifying assumptions. The implication of the resignation with simplifying assumption is deriving the formulas for yield to maturity in general case, taking into account various coupon periods.

Key words: bond, intrinsic value, yield curve, yield to maturity, current yield