METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XIII/3, 2012, str. 253 – 261

ESTYMACJA KRZYWEJ DOCHODOWOŚCI STÓP PROCENTOWYCH DLA POLSKI

Adam Waszkowski
Katedra Ekonomiki Rolnictwa i Międzynarodowych Stosunków Gospodarczych
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
e-mail: adam_waszkowski@sggw.pl

Streszczenie: W artykule podjęty został problem estymacji krzywej dochodowości dla Polski. Przedstawiono w nim dwie metody najczęściej stosowane przez banki centralne, które publikują takiego typu dane- metodę Nelsona- Siegela oraz Svenssona. Rozważono również możliwość stosowania tych metod w polskich warunkach a w dalszej konsekwencji przedstawiono wyniki estymacji struktury terminowej stóp procentowych. Porównano również oszacowania długookresowej oraz krótkookresowej stopy procentowej obiema metodami w latach 2001- 2012 w Polsce.

Słowa kluczowe: krzywa dochodowości, model Nelsona- Siegela, model Svenssona

WSTĘP

W artykule podjęto próbę oszacowania struktury terminowej (krzywej dochodowości, ang. yield curve) stóp procentowych dla Polski. W krajach o dojrzałym rynku kapitałowym struktura terminowa szacowana jest przez banki centralne. Jak dotąd jednak Narodowy Bank Polski nie publikuje takich projekcji. Artykuł ma być próbą sprawdzenia, czy estymacja krzywej dochodowości jest również możliwa w polskich warunkach.

Artykuł składa się z pięciu części. Część druga zawiera definicję krzywej dochodowości oraz zarys wybranych pozycji literatury dotyczących estymacji struktury stóp procentowych. W części trzeciej omówiono najpopularniejsze modele estymacji krzywej: model Nelsona- Siegla oraz metodę Svenssona. Część czwarta przedstawia wyniki estymacji dla Polski dla wybranych okresów oraz oszacowania krótko- i długookresowej stopy procentowej. W części ostatniej zawarto podsumowanie oraz wnioski płynące z przeprowadzonych badań.

STRUKTURA TERMINOWA STÓP PROCENTOWYCH

Krzywa dochodowości przedstawia [Kliber, 2009] zależność między terminem wykupu określonego instrumentu wolnego od ryzyka (np. bonów skarbowych czy obligacji rządowych) a stopą procentową. Opisuje ona stopy zwrotu wolne od ryzyka dla różnych terminów inwestycji. Rozważmy bieżącą cenę obligacji zerokuponowej w terminie wykupu t z wykorzystaniem dyskonta ciągłego. Jest ona równa:

$$P = Ce^{-tr(t)}, \tag{1}$$

gdzie:

C- kwota do wypłaty posiadaczowi obligacji w chwili t,

r(t)- stopa procentowa za okres od chwili obecnej do chwili t, liczona przy kapitalizacji ciągłej ($r(t) = \ln(1+i(t))$.

Wynika z tego, że:

$$r(t) = \frac{\ln C - \ln P}{t}. \tag{2}$$

Stopy otrzymane z powyższego wzoru to stopy rynku spot, zaś funkcja r(t) określa ich strukturę terminową. Z kolei stopę forward można wyznaczyć korzystając z kontraktów FRA (ang. Forward Rate Agreement). Niech f(s,t) oznacza stopę forward na okres 0 < s < t. Stopa forward jako stopa procentowa w kontrakcie FRA na pożyczkę od s do t wynosi zatem:

$$f(t) = \frac{tr(t) - sr(s)}{t-s}. \tag{3}$$

Chwilowa stopa forward określana jako stopa forward dla nieskończenie krótkiego okresu w przyszłości zaczynającego się w okresie t wynosi zatem:

$$f(t) = \lim_{s \to t} f(s,t) = r(t) + tr'(t). \tag{4}$$

Powyższa funkcja f(t) nazywana jest struktura terminową stóp forward. Z powyższego wzoru (4) wynika zależność między strukturą terminową cen spot i forward:

$$r(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(u)du. \tag{5}$$

Znajomość struktury terminowej stóp procentowych jest przydatna, ponieważ obserwowane ceny obligacji najczęściej różnią się od cen fundamentalnych („prawdziwych”) z powodu obecności szumu rynkowego, gdzie obserwowaną cenę obligacji P^{obs} można przedstawić jako:

$$P^{obs} = P + \zeta \tag{6}$$

gdzie: P - cena fundamentalna, ζ - zakłócenie losowe (szum). Szacując stopy procentowe dla różnych okresów próbie poddaje się eliminacje wpływu szumu. Ponadto w wielu modelach dla rynku kapitałowego zakładana jest znajomość funkcji struktury terminowej. Jest ona niezbędna m.in. do wyceny instrumentów pochodnych[1], prognozowania zmienności cen obligacji czy w modelach dynamiki stóp procentowych[2].

Problematyka szacowania krzywej dochodowości była podejmowana w kilku pracach. Metodologia jej estymacji została szeroko przedstawiona w opracowaniu Marciniaka [2006]. W badaniach empirycznych wykorzystane zostały funkcje sklejane oraz metoda Svenssona. Tematyka ta zawarta jest również w artykule Gurazdowskiego [2003]. Stamirowski [2003] przedstawił empiryczne wyniki szacowania krzywej dochodowości dla Polski, USA oraz strefy euro. Wykorzystał również w tym celu model Vasicka oraz Coxa-Ingersolla-Rossa.

MODELE KRZYWEJ DOCHODOWOŚCI

Krzywa dochodowości powinna posiadać pewne właściwości [Nelson i Siegel 1987]. Przede wszystkim funkcja f powinna być na tyle elastyczna, aby odzwierciedlać występujące w rzeczywistości różne kształty krzywych dochodowości. Warunkiem koniecznym aby otrzymać strukturę terminową stóp forward jest różniczkowalność struktury stóp spot. Dodatkowo funkcja f powinna mieć granice w nieskończoności a jej wartości powinny być dodatnie i ograniczone z góry.

Istnieje wiele metod estymacji struktury stóp procentowej. W niniejszym artykule uwaga jednak zostanie zwrócona tylko na dwie, stosowane powszechnie przez banki centralne.[3] Obie te metody mają swoje wady jak i zalety. Modele te bazują na podstawach teoretycznych, co powoduje naturalna interpretację oszacowań parametrów w kategoriach ekonomicznych. Dużym problemem jest jednak sama estymacja modeli. Najczęściej stosuje się nieliniową metodę najmniejszych kwadratów. W praktyce sprowadza się to do rozwiązania nieliniowego zadania minimalizacji. Używa się do tego metod numerycznych, ale ze względu na złożoność postaci funkcyjnej nie ma gwarancji znalezienia minimum globalnego.

Metoda Nelsona- Siegla

W modelu Nelsona- Siegela [1987] punktem wyjścia jest określenie równania stóp procentowych forward postaci:

---

[1] Przykładowo wycena instrumentów *floor* lub *cap.*

[2] Model Heatha- Jarrowa- Mortona (HJM).

[3] W praktyce banków centralnych wykorzystywana jest dodatkowo metoda funkcji sklejanych (ang. *splines*), ale nie jest to metoda estymacji lecz interpolacji.

$$f(t) = \beta_1 + \beta_2 \exp\left(\frac{-t}{\lambda}\right) + \beta_3 \frac{t}{\lambda} \exp(\frac{-t}{\lambda}), \tag{7}$$

gdzie: β_1, β_2, β_3, λ to parametry. Zgodnie zatem ze wzorem (5) struktura terminową stóp spot przedstawia relacja:

$$r(t) = \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3)\lambda \frac{1 - \exp(-t/\lambda)}{t} - \beta_3 \exp(\frac{-t}{\lambda}). \tag{8}$$

Każdy z elementów równania znajdujący się po prawej stronie ma swoją interpretacje. Stała β_1 odzwierciedla długookresowy poziom stopy procentowej[4]: $\lim_{t \to \infty} r(t) = \beta_1$. Parametr β_2 opisuje wpływ krótkookresowych czynników na stopę terminową: $\lim_{t \to 0} r(t) = \beta_1 + \beta_2$. Ostatni, trzeci składnik, odpowiedzialny jest za średniookresową zmienność stóp terminowych i pozwala uzyskać „zgarbioną" postać krzywej dochodowości- dla wartości dodatniej β_3 - jest to maksimum, dla ujemnej- minimum. Parametry modelu można uzyskać szacując je np. nieliniową MNK[5].

Metoda Svenssona

Svensson [1994] zaproponował rozbudowę modelu Nelsona- Siegla poprzez dodanie kolejnego składnika opisującego zmienność stopy terminowej. W ten sposób zwiększył elastyczność i poprawił dopasowanie funkcji struktury terminowej stóp forward, uzyskując w ten sposób równanie:

$$f(t) = \beta_1 + \beta_2 \exp\frac{-t}{\lambda_1} + \beta_3 \frac{1}{\lambda_1} \exp\frac{-t}{\lambda_1} + \beta_4 \frac{t}{\lambda_2} \exp\frac{-t}{\lambda_2}. \tag{9}$$

Podstawiając do równania (5) uzyskujemy strukturę terminową stóp spot:

$$r(t) = \beta_1 + \beta_2 \lambda_1 \frac{1 - \exp(-t/\lambda_1)}{t} + \beta_3 (\frac{(1 - \exp(-t/\lambda_1))\lambda_1}{t} - \exp(\frac{-t}{\lambda_1})) +$$

$$\beta_4 (\frac{(1 - \exp(-t/\lambda_2))\lambda_2}{t} - \exp(\frac{-t}{\beta_2})). \tag{10}$$

[4] Oprocentowanie obligacji konsolowej.

[5] Wadą takiego podejścia jest fakt, że funkcja celu (minimalizacja sumy kwadratów różnic między cenami teoretycznymi obligacji a cenami rynkowymi) jest funkcją silnie nieliniową i do rozwiązania zadania należy zastosować metody numeryczne poszukiwania minimum.

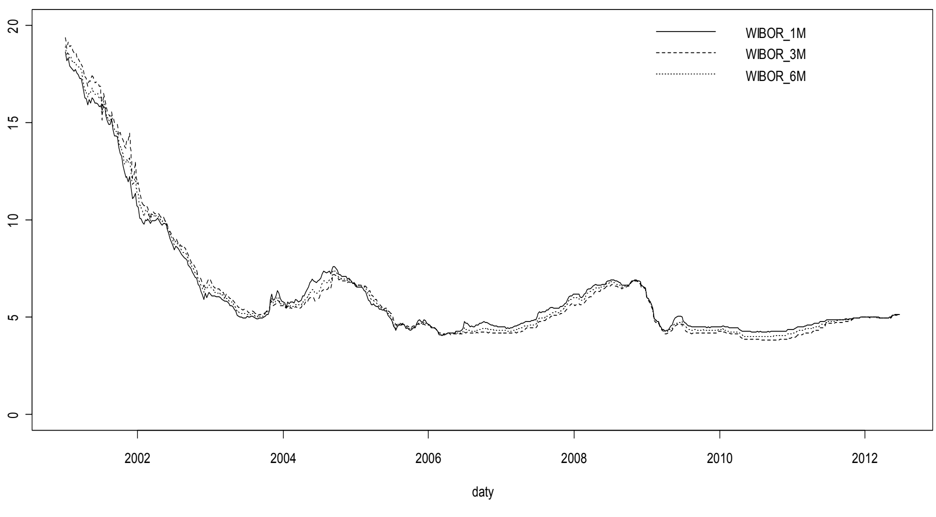
Wprowadzone przez Svenssona rozszerzenie powoduje, że w modelu tym jest możliwe do otrzymania dwóch „garbów". Parametry λ_1 i λ_2 odpowiedzialne są z kolei za ich rozmieszczenie.

WYNIKI ESTYMACJI

W tym punkcie przedstawione zostaną wyniki estymacji powyższych modeli krzywej dochodowości stóp procentowych dla polskiej gospodarki. W tym celu oszacowane zostały parametry modeli postaci (8) oraz (10) oraz szeregi dla stóp długookresowych oraz krótkookresowych. W analizie[6] wykorzystano dane tygodniowe dotyczące walorów WIBOR 1M, 3M, oraz 6M z okresu 5.01.2001 do 22.VI.2012 zaczerpnięte z portalu stooq.pl. Łącznie w obliczeniach wykorzystane zostały szeregi czasowe składające się z 599 obserwacji.

Wykres 1 pokazujący szeregi czasowe stopy WIBOR wskazuje, że w badanym okresie nastąpił istotny spadek oprocentowania w Polsce, z poziomu blisko 20% w roku 2001 do prawie 5% w roku bieżącym.

Rysunek 1. Stopy WIBOR



Źródło: obliczenia własne (wykres programu R)

Aby przedstawić różnicę między metodami estymacji struktury terminowej oszacowano parametry modeli dla pierwszego oraz ostatniego momentu analizowanego szeregu czasowego. Uzyskano następujące oszacowania:

[6] Analizę przeprowadzono korzystając z programu R.

Model Nelsona- Siegela

data	beta_1	beta_2	beta_3	lambda
05.01.2001	8.984	8.410	9.189	0.099
22.06.2012	9.534	7.291	9.617	0.098

Model Svenssona

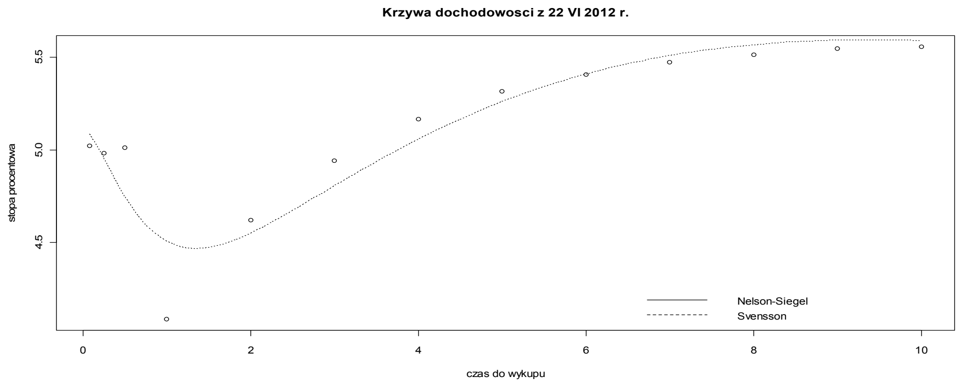
Data	beta_1	beta_2	beta_3	beta_4	lambda_1	lambda_2
05.01.2001	7.237	9.715	12.422	7.654	6.691	33.458
22.06.2012	2.393	2.732	1.974	10.237	3.624	66.916

Wyniki estymacji wskazują, że oszacowania parametrów β_1 oraz β_2 dla tych samych momentów są różne mimo jednakowej ich ekonomicznej interpretacji w przypadku obu modeli. Współczynniki te jednak nie prowadzą do innych kształtów krzywej dochodowości. Rysunki 2 i 3 wskazuje, że w obu przypadkach dopasowanie do danych jest poprawne.

Rysunek 2. Krzywe dochodowości dla 5.01.2001

Źródło: obliczenia własne (wykres programu R)

Rysunek 3. Krzywe dochodowości dla 22.06.2012



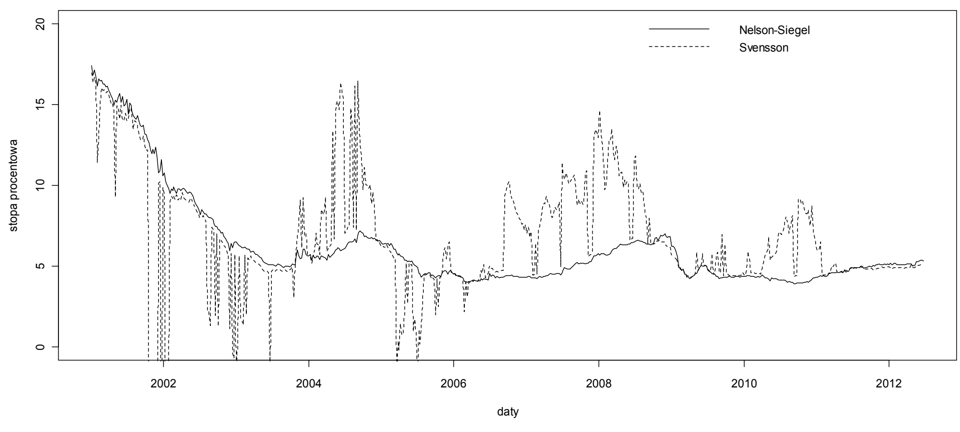
Źródło: obliczenia własne (wykres programu R)

Krzywa dochodowości ze stycznia 2001 roku (rysunek 2) wskazuje na ujemną zależność między stopą procentową a terminem zapadalności. Określa się ją w literaturze przedmiotu jako krzywą odwróconą (ang. inverted yield curve). Zgodnie z teorią oczekiwań[7] wskazuje ona na spadek w krótkim okresie stóp procentowych. Jest to zgodne z szeregiem czasowym stóp procentowych zaprezentowanym na rysunku 1. Z kolei zależność między zmiennymi dla krzywej z czerwca 2012 (rysunek 3) jest ujemna dla pierwszego okresu. Od drugiego okresu można mówić o normalnym kształcie krzywej dochodowości. W takim przypadku krzywa dochodowości z punktem przegięcia określana jest jako S - kształtna (ang. S- shaped).

W dalszej części analizie poddano kształtowanie się stóp procentowych w całym badanym okresie. Dla każdego momentu szeregu czasowego oszacowano parametry β_1 oraz β_2 dla modeli postaci (8) i (10) oraz stworzono szeregi czasowe stóp krótkookresowych (rysunek 4) oraz długookresowych (rysunek 5).

Wykres dla krótkookresowej stopy procentowej wskazuje na spadek z poziomu 18% w roku 2001 do blisko 5% w roku 2012. Dodatkowo krzywa oszacowana metodą Svenssona wykazuje duże wahania wokół tendencji spadkowej, która zarysowana jest równaniem krzywej Nelsona- Siegela. Od roku 2000 oszacowania metodą Svensona znajdują się regularnie powyżej wartości uzyskanych metodą Nelsona- Siegela.

Rysunek 4. Oszacowania wartości krótkookresowej stopy procentowej

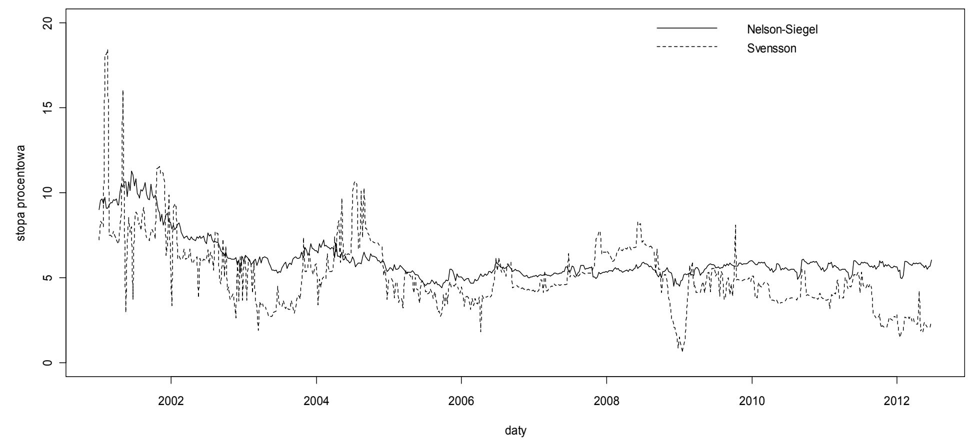


Źródło: obliczenia własne (wykres programu R)

[7] Teoria oczekiwań jest podstawową teorią opisującą kształt krzywej dochodowości. Wskazuje ona, że głównym determinantem kształtu krzywej są oczekiwania dotyczące przyszłego poziomu stóp procentowych.

W przypadku stopy długookresowej różnice w uzyskanych oszacowaniach obiema metodami nie są aż tak wyraźne jak w przypadku stopy krótkookresowej. Metoda Svenssona charakteryzuje się większymi wahaniami i mimo podobnego trendu spadkowego obie te metody estymacji dają istotnie różne oszacowania stopy długookresowej.

Rysunek 5. Oszacowania wartości długookresowej stopy procentowej



Źródło: obliczenia własne (wykres programu R)

PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W pracy podjęto próbę estymacji krzywej dochodowości dla gospodarki Polski. W tym celu wykorzystano metody zaproponowano przez Nelsona- Siegela oraz Svenssona. Z przedstawionych badań wynika, że estymacja struktury terminowej stóp procentowych dla Polski nie jest zadaniem łatwym. Co więcej, stosowane w praktyce banków centralnych metody dają różne oszacowania parametrów, które podlegają takim samym interpretacjom ekonomicznym. Mimo to kształty uzyskane obiema metodami są podobne. Problematycznym jest fakt, że oszacowania stóp długo- oraz krótkookresowych daje różne wyniki- metoda Svenssona charakteryzuje się większymi wahnięciami względem wspólnej tendencji. Utrudnione zatem staje się wnioskowanie na temat przyszłego poziomu stopy procentowej. Zarówno wycena kontraktów na przyszłą wartość stopy procentowej jak i konstrukcja przyszłej ścieżki stóp procentowych na podstawie otrzymanych wyników może prowadzić do znacznych błędów.

BIBLIOGRAFIA

Gurazdowski E. (2003) Wykorzystanie modelu zmiennej sztywności krzywej stóp terminowych do przybliżania krzywej rynku pieniężnego, Bank i Kredyt, nr 2, str. 87 - 92.

Kliber P. (2009) Estymacja struktury terminowej stóp procentowych w Polsce, Bank i Kredyt, nr 40(1), str. 109 - 126.

Marciniak M. (2006) Yield Curve Estimation at the National Bank of Poland, Bank i Kredyt, nr 10, str. 52 - 74.

Nelson C. R., Siegel A. E. (1987) Pasimonious Modeling of Yield Curves, Jurnal of Business, Nr 60, str. 473 - 489.

Stamirowski M. (2003) Jednoczynnikowe modele Vasicka oraz CIR- analiza empiryczna na podstawie danych z polskiego rynku obligacji skarbowych, Bank I Kredyt, nr 7, str. 35 - 46.

Svensson L. E. (1994) Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992 - 1994, Working Paper, Nr 4871 NBER, Cambridge, str. 3 - 50.

ESTIMATION OF THE YIELD CURVE OF INTEREST RATES IN POLAND

Abstract: Tha aim of this article is the estimation of the yield curve of interest rates in Poland. Two methods applied at central banks publishing this type of data have been presented- Nelson-Siegel method and Svensson method. The article reports the results of applying these methods for Poland subsequently.

Key words: yield curve, Nelson-Siegel model, Svensson