

ZASTOSOWANIE METRYKI MINKOWSKIEGO DO POMIARU ZMIAN KONCENTRACJI

Zbigniew Binderman

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Gorzowie Wielkopolskim
e-mail: zbigniew_binderman@sggw.pl

Bolesław Borkowski

Katedra Ekonometrii i Statystyki
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
e-mail: boleslaw_borkowski@sggw.pl

Wiesław Szczesny

Katedra Informatyki
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
e-mail: wieslaw_szczesny@sggw.pl

Streszczenie: Praca jest bezpośrednią kontynuacją badań autorów i A. Prokopenyi [Binderman, Borkowski, Szczesny 2012, 2013, Binderman, Borkowski, Prokopenya, Szczesny, 2013, 2013a], dotyczących budowy nowych wskaźników koncentracji i ich stabilności. W niniejszej pracy podano nowe współczynniki koncentracji i zgodnie z wymaganymi postulatami, zbadano ich wrażliwość. Współczynniki te wykorzystują metryki Minkowskiego ρ^p ($1 \leq p \leq \infty$).

Słowa kluczowe: współczynnik koncentracji, współczynnik Giniego, współczynnik Herfindahla–Hirschmana, metryka Minkowskiego

WSTĘP

W pracy [Binderman, Borkowski, Szczesny 2012], podano sposoby wykorzystania wykresów radarowych do budowy wskaźników, służących do pomiaru koncentracji rozkładu dobra. Sposób ten wykorzystuje szeroko rozumianą ideę współczynnika Giniego, opartego o krzywą Lorenza oraz metodę przedstawioną w pracy [Binderman, Borkowski, Szczesny 2008]. Przedstawiona

technika może również posłużyć do tworzenia przez analityka nowych wskaźników koncentracji wykorzystując miary podobieństwa i niepodobieństwa obiektów, tak aby spośród stworzonych wskaźników wybrać ten, który najlepiej będzie spełniał wymagane postulaty wrażliwości [Binderman, Borkowski Szczesny 2013, Szczesny, Binderman, Prokopenya 2013, 2013a].

Pomiar koncentracji jest jednym z kluczowych zagadnień w ekonomii. Pomiar ten dokonywany jest zarówno w obszarze badań podziału dochodów jak i w obszarze badań koncentracji na poszczególnych rynkach. Literatura z tego zakresu jest bardzo bogata. Jest mnóstwo propozycji różnych wskaźników do pomiaru, należy jednak zwrócić uwagę, że wykorzystywanie tylko jednego wskaźnika, nawet powszechnie uznanego może prowadzić do przejściowego braku zauważenia zachodzących zmian. Aby ten aspekt uwypuklić, rozważmy następujący przykład pokazujący zmiany na rynku złożonym z 10-ciu podmiotów. Tabela 1 pokazuje zmiany udziałów w rynku 10-ciu podmiotów w okresie kilku kolejnych lat.

Tabela 1. Przykładowe struktury udziału w rynku dla 10 podmiotów (dane fikcyjne).

obiekt	Egalitarny	Rok 1	Rok 2	Rok 3	Rok 4	Rok 5	Rok 6	Rok 7
o01	10%	1,10%	3,0170%	1,0004%	1,98445%	5,5%	3,0%	1,8996%
o02	10%	1,11%	3,0185%	2,0000%	1,98445%	5,5%	3,8%	1,8996%
o03	10%	1,12%	3,0200%	3,0000%	1,98445%	5,5%	4,6%	1,8996%
o04	10%	1,14%	3,0250%	4,0000%	1,98445%	5,5%	5,5%	1,8996%
o05	10%	1,15%	3,0500%	6,0000%	1,98445%	5,5%	7,0%	1,8996%
o06	10%	1,16%	3,0900%	7,0000%	5,50000%	5,5%	8,1%	18,1004%
o07	10%	1,40%	3,1600%	7,9000%	7,50000%	5,5%	9,0%	18,1004%
o08	10%	29,33%	5,0950%	8,6000%	10,00000%	5,5%	10,0%	18,1004%
o09	10%	30,99%	33,0000%	11,0010%	20,00000%	5,5%	11,0%	18,1004%
o10	10%	31,50%	40,5245%	49,4986%	47,07775%	50,5%	38,1%	18,1004%
HHI	1000	2822,5	2822,5	2822,5	2822,5	2822,5	1940,7	1656,2
HHI*	0	0,2025	0,2025	0,2025	0,2025	0,2025	0,1045	0,0729
Radar	0	0,7065	0,7229	0,7151	0,7455	0,6247	0,5740	0,4651
Gini*	0	0,6940	0,6203	0,6002	0,6579	0,4500	0,4500	0,4500

Źródło: opracowanie własne

Najpopularniejszym w literaturze narzędziem do badania koncentracji rynku jest wskaźnik Herfindahla–Hirschmana (**HHI**) (ang. *Herfindahl–Hirschman Index*), określany często, jako *wskaźnik Herfindahla* lub po prostu w skrócie **HHI** [Herfindahl 1955; Hirschman, 1964]. Krótko można stwierdzić iż określa on szacunkowy poziom koncentracji w danej branży oraz poziom konkurencji na danym rynku. Jest to koncepcja ekonomiczna szeroko stosowana w prawie antymonopolowym. Nazwa współczynnika pochodzi od nazwisk dwóch ekonomistów: Orrisa Herfindahla i Alberta Otto Hirschmana, którzy go wykorzystywali. Indeks ten przez pierwszego z nich został rozpowszechniony w 1950 roku, później okazało się, że przed nim zaproponował go w 1945 roku

Hirschman. Szerzej można o wskaźniku HHI przeczytać np. w pracach [Calkins, 1983, Kwoka 1977, 1985, Matsumoto, Merlone, Szidarovszky, Djolov, Lijesen 2004, Kerber, Kretschmer, Wangenheim 2012, Ávila, Flores, López-Gallo, Márquez 2013].

Innym powszechnie stosowanym wskaźnikiem koncentracji jest wskaźnik Giniego, który jest stosowany głównie w badaniach nierówności dochodów [Barnett 2005, Hoffmann and Bradley 2007]. Oba te wskaźniki w przypadku niedużej liczby obiektów są nieunormowane, czyli w przypadku pełnego monopolu nie przyjmują wartości równej 1. Jednakże łatwo je unormować i tę unormowaną postać będziemy oznaczać gwiazdką. W przypadku normowania indeksu Giniego, wystarczy wartość wskaźnika podzielić przez wyrażenie $(n-1)/n$, gdzie n oznacza liczbę podmiotów. Natomiast przyjęta formuła dla indeksu *HHI* ma następującą postać:

$$HHI^* = \frac{HHI - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \quad (1)$$

W powyższej Tabeli 1. pokazano, że przy analizach wielu rynków, ograniczając się tylko do jednego wskaźnika można nie zauważyć wielu istotnych, zachodzących zmian. Mianowicie, zmiany zachodzące w latach R1-R5 są niezauważalne przy wykorzystaniu wskaźnika *HHI**, a zmiany struktury udziałów pomiędzy latami R5, R6 i R7 są niezauważalne przy wykorzystaniu unormowanego wskaźnika Giniego. W Tabeli 1 podano również wartość innego wskaźnika koncentracji, współczynnika wykorzystującego interpretację graficzną w postaci wykresów radarowych. Jest to wskaźnik unormowany o konstrukcji podobnej do *HHI* w tym sensie, że również jemu można nadać postać relacji preferencji. Szerzej o tym wskaźniku można przeczytać w pracach [Binderman, Borkowski, Szczesny 2012, Binderman, Szczesny, Prokopenya 2013, Szczesny, Binderman, Prokopenya 2013].

Przykład zawarty w Tabeli 1 sugeruje, że w aktualnej sytuacji, gdy problemy obliczeniowe nie mają praktycznego znaczenia w badaniach powinno się wykorzystywać kilka różnych wskaźników. Dlatego w niniejszej pracy podjęto próbę konstrukcji rodziny wskaźników koncentracji w oparciu o standardowe metryki Minkowskiego [Dunford, Schwartz 1958].

WSKAŹNIK KONCENTRACJI OPARTY NA METRYCE MINKOWSKIEGO

Niech $X = \mathfrak{R}^n$ oznacza n -wymiarową przestrzeń Euklidesa, zdefiniujmy zbiory wektorów

$$\mathfrak{R}_+^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$$

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

W niniejszej pracy elementy zbioru Ω nazywać będziemy *wektorami strukturalnymi* albo krótko *strukturami*. Zbiór Ω jest częścią hiperpłaszczyzny w przestrzeni \mathfrak{R}_+^n , określonej przez równanie

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \quad x_i \in \mathfrak{R}_+; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Indeks Herfindahla–Hirschmana (HHI): $h : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}_+^n$, wyraża się następująco:

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i)^2. \quad (2)$$

Natomiast znormalizowany indeks Herfindahla–Hirschmana (HHI*) wzorem (1).

DEFINICJA 1. Niech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, zbiór $A := \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$, wektor $\mathbf{x}' := (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, nazywać będziemy *porządkiem wektora \mathbf{x}* , gdzie $x'_1 \leq x'_2 \leq \dots \leq x'_n$ jest permutacją zbioru A . Wektor

$$\mathbf{x}^\wedge := (x_1^\wedge, x_2^\wedge, \dots, x_n^\wedge), \quad x_i^\wedge := \sum_{j=1}^i x'_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

nazywać będziemy *kumulacją wektora \mathbf{x}* . Jeżeli wektor \mathbf{x} jest strukturą tj. $\mathbf{x} \in \Omega$ to również wektor $\mathbf{x}' \in \Omega$, lecz wektor $\mathbf{x}^\wedge \notin \Omega$. Korzystając z powyższej definicji wektorów \mathbf{x}' i \mathbf{x}^\wedge , okreśmy parę operatorów \mathbf{P} i \mathbf{C} .

DEFINICJA 2. Operator $\mathbf{P} : X \rightarrow X$ nazywać będziemy **operatorem porządku** w przestrzeni X (porządkującym X), jeżeli

$$\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{x}', \quad (3)$$

dla każdego $\mathbf{x} \in X$, gdzie wektor \mathbf{x}' jest określony w Definicji 1.

DEFINICJA 3. Operator $\mathbf{C} \in L_0(X)$ nazywać będziemy **operatorem kumulacji** w przestrzeni X (kumulującym X), jeżeli

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\wedge. \quad (4)$$

dla każdego $\mathbf{x} \in X$, gdzie wektor \mathbf{x}^\wedge jest określony w Definicji 1.

Zbiór wszystkich operatorów liniowych, których dziedziny są równe przestrzeni X (podzbioremi liniowymi X) i których wartości należą również do przestrzeni X oznaczmy przez $L_0(X)$ ($L(X)$) [Przeworska–Rolewicz 1977, Przeworska–Rolewicz, Rolewicz 1968].

Z definicji operatora \mathbf{P} wynika bezpośrednio następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 1. Operator $\mathbf{P} \in L_0(\Omega)$.

Operator $\mathbf{C} \notin L_0(\Omega)$, świadczy o tym następujący przykład.

PRZYKŁAD 1. Niech $\mathbf{x} = (0, 1; 0, 4; 0, 5)$, $\mathbf{y} = (0, 5; 0, 4; 0, 1)$. Wówczas

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (0, 6; 0, 8; 0, 6), \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{x}, \mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{x}.$$

Stąd,

$$\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{y} = 2\mathbf{x} = (0, 2; 0, 8; 1) \neq \mathbf{C}(\mathbf{x} + \mathbf{y}).$$

DEFINICJA 4. Niech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{X}$, operator

$$S_\varepsilon^{(j,i)} : \mathfrak{R}_+ \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}, \quad j \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad i : 1 \leq i \leq n-j, \varepsilon \geq 0,$$

określony za pomocą wzoru

$$S_\varepsilon^{(j,i)}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j - \varepsilon, x_{j+1}, \dots, x_{j+i-1}, x_{j+i} + \varepsilon, x_{j+i+1}, \dots, x_n), \quad (5)$$

nazywać będziemy *operatorem przesunięcia (shift operator)*.

Niech wektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{X}$. W przestrzeni Euklidesa, jako miary zróżnicowania wektorów, przeważnie wykorzystywane są miary odległości typu Minkowskiego:

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad \infty \geq p \geq 1, \quad (6)$$

Do tej grupy należą poniższe metryki.

- **Metryka miejska (Hamminga, Manhattan).** Ta odległość jest sumą różnic mierzonych wzdłuż wymiarów. W większości przypadków ta miara odległości daje podobne wyniki, jak zwykła odległość euklidesowa. Jednak w przypadku tej miary, wpływ pojedynczych dużych różnic (przypadków odstających) jest stłumiony, ponieważ nie podnosi się ich do kwadratu. Odległość miejską oblicza się następująco:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|. \quad (7)$$

- **Metryka Euklidesa.** Należy do jednej z najczęściej wybieranych typów odległości. Jest to odległość geometryczna w przestrzeni wielowymiarowej. Oblicza się ją następująco:

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}, \quad (8)$$

Odległości euklidesowe (oraz kwadraty odległości euklidesowych) są wyliczane w oparciu o surowe dane, a nie na podstawie danych standaryzowanych. Metoda ta ma pewne zalety (np. na odległość pomiędzy dwoma dowolnymi obiektami nie ma wpływu dodanie do analizy nowych obiektów, które mogą być obiektami odstającymi). Jednakże na odległości duży wpływ mają różnice jednostek między wymiarami, na podstawie których są wyliczane odległości. Może to spowodować otrzymanie zupełnie innych wyników.

- **Odległość Czebyszewa.** Taka miara odległości jest stosowna w tych przypadkach, w których chcemy zdefiniować dwa obiekty jako "inne" wtedy, gdy różnią się one w jednym dowolnym wymiarze.

$$d_{\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|, \quad (9)$$

DEFINICJA 5. Niech wektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \in \Omega$,

$\mathbf{s} = (0, \dots, 0, 1) \in \Omega$, d_p będzie metryką Minkowskiego określoną przez wzór (5), operatory \mathbf{P} , \mathbf{C} są określone przez definicje 2, 3, odpowiednio. Funkcje $m, M: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}_+$, określoną za pomocą wzoru:

$$m_p(\mathbf{x}) = \alpha_p d_p\left(\mathbf{C}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right), \mathbf{CP}\mathbf{x}\right), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (10)$$

$$M_p(\mathbf{x}) = d_p\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}, \mathbf{P}\mathbf{x}\right) / d_p\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}, \mathbf{s}\right), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (10a)$$

gdzie

$$\alpha_p = n \left[\sum_{j=1}^{n-1} j^p \right]^{-\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \alpha_{\infty} = \frac{n}{n-1}, \quad (11)$$

nazywać będziemy *miarami koncentracji* wektora \mathbf{x} .

UWAGA 1. Można pokazać, że

$$\alpha_1 = \frac{2}{n-1}, \alpha_2 = \sqrt{\frac{6n}{(n-1)(2n-1)}}, \alpha_3 = \sqrt[3]{\frac{4n}{(n-1)^2}}, \alpha_4 = \sqrt[4]{\frac{30n^3}{(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}}.$$

W pracy [Binderman, Borkowski, Szczesny 2012] udowodniono następujący lemat.

LEMAT 1. Jeżeli wektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ to $\mathbf{C}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right) \geq \mathbf{CP}\mathbf{x}$.

Łatwo sprawdzić, że zdefiniowany wyżej miernik ma własności.

WŁASNOŚĆ 1. Miernik koncentracji m wektorów strukturalnych (należących do Ω) ma następujące własności:

- (i) $0 \leq m(\mathbf{x}) \leq 1$, $\mathbf{x} \in \Omega$, (ii) $m\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right) = 0$, (iii) $m(\mathbf{x}) = 1$ dla wektorów osobliwych,

gdzie przez wektor *osobliwy* rozumiemy wektor należący do Ω , którego jedna ze współrzędnych jest równa 1.

LEMAT 2. Niech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, $\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, $\varepsilon > 0$.

Jeżeli $\mathbf{x}_\varepsilon = \mathbf{S}_\varepsilon^{(j,1)}(\mathbf{P}\mathbf{x})$ to

$$m(\mathbf{x}_\varepsilon) \geq m(\mathbf{x}). \quad (12)$$

DOWÓD. Z definicji mamy

$\mathbf{S}_\varepsilon^{(j,1)}(\mathbf{P}\mathbf{x}) = \mathbf{S}_\varepsilon^{(j,1)}(\mathbf{x}') = (x'_1, x'_2, \dots, x'_{j-1}, x'_j - \varepsilon, x'_{j+1} + \varepsilon, x'_{j+2}, \dots, x'_n)$ oraz

$$\mathbf{C}\mathbf{x}_\varepsilon = \mathbf{x}^\wedge = (x_1^\wedge, x_2^\wedge, \dots, x_{j-1}^\wedge, x_j^\wedge - \varepsilon, x_{j+1}^\wedge, x_{j+2}^\wedge, \dots, 1)$$

$$\mathbf{x}^\wedge = \mathbf{C}\mathbf{x}' = (x_1^\wedge, x_2^\wedge, \dots, x_{n-1}^\wedge, 1); \frac{\mathbf{1}^\wedge}{\mathbf{n}} = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right), \quad (13)$$

$$\mathbf{x}_\varepsilon^\wedge = \mathbf{C}\mathbf{x}'_\varepsilon = (x_1^\wedge, x_2^\wedge, \dots, x_{j-1}^\wedge, x_j^\wedge - \varepsilon, x_{j+1}^\wedge, \dots, x_{n-1}^\wedge, 1). \quad (14)$$

Stąd,

$$\begin{aligned} m_p(\mathbf{x}) &= \alpha_p d_p \left(\mathbf{C} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} \right), \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{x} \right) = \alpha_p d_p \left(\frac{\mathbf{1}^\wedge}{\mathbf{n}}, \mathbf{x}^\wedge \right) = \alpha_p \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - x_i^\wedge \right)^p \right]^{1/p} = \\ &= \alpha_p \left[\sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{i}{n} - x_i^\wedge \right)^p + \left(\frac{j}{n} - x_j^\wedge \right)^p + \sum_{i=j+1}^n \left(\frac{i}{n} - x_i^\wedge \right)^p \right]^{1/p}, \\ m_p(\mathbf{x}_\varepsilon) &= \alpha_p d_p \left(\frac{\mathbf{1}^\wedge}{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_\varepsilon^\wedge \right) = \alpha_p \left[\sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{i}{n} - x_i^\wedge \right)^p + \left(\frac{j}{n} + \varepsilon - x_j^\wedge \right)^p + \sum_{i=j+1}^n \left(\frac{i}{n} - x_i^\wedge \right)^p \right]^{1/p} \end{aligned}$$

Na podstawie dwóch powyższych równości wnioskujemy, że

$$m(\mathbf{x}_\varepsilon) - m(\mathbf{x}) \geq 0.$$

UWAGA 2. Można pokazać że jeżeli $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \Omega$ to

$$\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z} \geq \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{y} \Rightarrow m(\mathbf{y}) \geq m(\mathbf{z}). \quad (15)$$

UWAGA 3. Łatwo zauważyć, że dla wektorów $\mathbf{x}^\wedge, \mathbf{x}_\varepsilon^\wedge$ słuszna jest nierówność

$$\mathbf{x}^\wedge \geq \mathbf{x}_\varepsilon^\wedge,$$

gdzie wektory $\mathbf{x}^\wedge, \mathbf{x}_\varepsilon^\wedge$ są określone za pomocą operacji (4), (5), odpowiednio.

Stąd na podstawie Uwagi 2. można otrzymać tezę Lematu 2.

Korzystając z Lematu 2 lub Uwag 2,3 w podobny sposób, jak w pracy [Binderman, Szczesny, Prokopenya 2013a –dowód Wniosku 2] można udowodnić twierdzenie dotyczące wartości operatora $\mathbf{S}_\varepsilon^{(j,i)}(\mathbf{P}\mathbf{x})$.

TWIERDZENIE 2. Jeżeli wektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, wektor $\mathbf{x}_\varepsilon = \mathbf{S}_\varepsilon^{(j,i)}(\mathbf{P}\mathbf{x}) \in \Omega$, liczba $\varepsilon > 0$, to

$$m(\mathbf{x}_\varepsilon) \geq m(\mathbf{x}).$$

TWIERDZENIE 3. Dla dowolnego $p: 1 \leq p \leq \infty$, $\mathbf{x} \in \Omega$ współczynnik koncentracji indukowany przez metryki typu Minkowskiego

$$m_p(\mathbf{x}) = \alpha_p d_p \left(\mathbf{C} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} \right), \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{x} \right),$$

gdzie d_p jest metryką określoną przez wzór (4), α_p jest określone przez wzór (11),

wektor $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) \in \Omega$, operatory \mathbf{P}, \mathbf{C} są określone przez definicje 2, 3,

odpowiednio, spełnia wszystkie (cztery) podstawowe postulaty stawiane miarom koncentracji w badaniu nierówności [Binderman, Borkowski, Prokopenya, Szczesny 2013, 2013a].

PRZYKŁAD 2. Dla wektora $\mathbf{x}_\varepsilon = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}_\varepsilon} = \left(\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} + \varepsilon \right), 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{n}$

otrzymujemy:

$$m_p(\mathbf{x}_\varepsilon) = \alpha_p \left[\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon^p \right]^{1/p} = \alpha_p (n-1)^{1/p} \varepsilon.$$

UWAGA 4. W sposób podobny do powyższego można udowodnić analogony Twierdzeń 2,3 dla współczynnika koncentracji M_2 , określonego w Definicji 5.

UWAGA 5. Podany we wzorze (2) znormalizowany indeks Herfindahla-Hirschmana można określić za pomocą metryki Euklidesa ($p=2$)

$$h^*(\mathbf{x}) = \frac{d_2^2\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}, \mathbf{x}\right)}{d_2^2\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}, \mathbf{s}\right)} = M_2^2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega,$$

gdzie \mathbf{s} jest dowolnym wektorem osobliwym, metryka d_2 – jest określona za pomocą wzoru (8), miernik koncentracji M jest określony za pomocą wzoru (10a).

Istotnie, niech wektory

$\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{s} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$ będą dowolnie ustalone, mamy wówczas

$$\begin{aligned} \frac{d_2^2\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}, \mathbf{x}\right)}{d_2^2\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}, \mathbf{s}\right)} &= \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - 2\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n^2}\right) + 1 - \frac{2}{n}} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = h^*(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

W pracach wielu analityków podawane są wartości koncentracji określonego dobra, będącego elementem rozważanych obiektów, w porównywanych populacjach. Najczęściej do takich porównań używa się współczynnika koncentracji Giniego. Niech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}\mathbf{x} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \quad \mathbf{x}^\wedge = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{x} = (x^\wedge_1, x^\wedge_2, \dots, x^\wedge_n),$$

gdzie operatory \mathbf{P} i \mathbf{C} są określone za pomocą wzorów (3), (4), odpowiednio. Unormowany współczynnik Giniego można również obliczyć za pomocą wzoru:

$$G^*(\mathbf{x}) = 1 - \frac{2}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^\wedge. \quad (16)$$

UWAGA 6. Podany we wzorze (16) współczynnik Giniego można wyrazić za pomocą metryki miejskiej ($p=1$)

$$G^*(\mathbf{x}) = \frac{d_1\left(\frac{\mathbf{1}^\wedge}{\mathbf{n}}, \mathbf{x}^\wedge\right)}{d_1\left(\frac{\mathbf{1}^\wedge}{\mathbf{n}}, \mathbf{s}^\wedge\right)}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega,$$

gdzie \mathbf{s} jest dowolnym wektorem osobliwym, metryka d_1 – jest określona za pomocą wzoru (7).

Istotnie, niech wektory

$\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{s} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$ będą dowolnie ustalone, korzystając z nierówności [Binderman, Borkowski, Szczesny 2012]

$$x_k^{\wedge} \leq \frac{k}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

mamy wówczas

$$\frac{d_1\left(\frac{\mathbf{1}^{\wedge}}{\mathbf{n}}, \mathbf{x}^{\wedge}\right)}{d_1\left(\frac{\mathbf{1}^{\wedge}}{\mathbf{n}}, \mathbf{s}^{\wedge}\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n} - x_i^{\wedge}\right)}{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n}} = \frac{\frac{(n-1)n}{2n} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{\wedge}}{\frac{(n-1)n}{2n}} = 1 - \frac{2}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{\wedge} = G^*(\mathbf{x}).$$

PODSUMOWANIE

W poprzednim podrozdziale pokazano, że dwa popularne wskaźniki w wersji unormowanej (Gini* oraz HHI*) można uzyskać przy wykorzystaniu metryki Minkowskiego. Reagują one w różny sposób na zmianę wielkości odstępstwa od rozkładu egalitarnego. Dlatego wykorzystywane są one na ogół do różnych zastosowań, a mianowicie Gini* jest wykorzystywany do badania nierówności w dostępie do określonego dobra, a HHI* do oceny koncentracji na rynku. Wykorzystując zaprezentowane w tej pracy idee konstrukcji wskaźników, przy wykorzystaniu metryki Minkowskiego możemy dobrać wskaźnik w ten sposób, aby mocno reagował na konkretne zmiany koncentracji (odstępstwa od rozkładu egalitarnego). Zauważmy ponadto, że jeśli W jest unormowanym wskaźnikiem koncentracji o wartościach z przedziału $[0;1]$, to W^a , $a > 0$ też może służyć do pomiaru koncentracji. Zatem, stosując tylko ten dodatkowy mechanizm mamy duże możliwości w zakresie konstrukcji nowych mierników koncentracji.

Popularnym sposobem przedstawienia koncentracji jest krzywa Lorenza. Rozważmy pewną rodzinę krzywych, która daje się przedstawić za pomocą poniższego wzoru (17). Rozpatrzmy ją, jako model odniesienia dla zilustrowania zmian wartości wskaźników w zależności od zmian koncentracji:

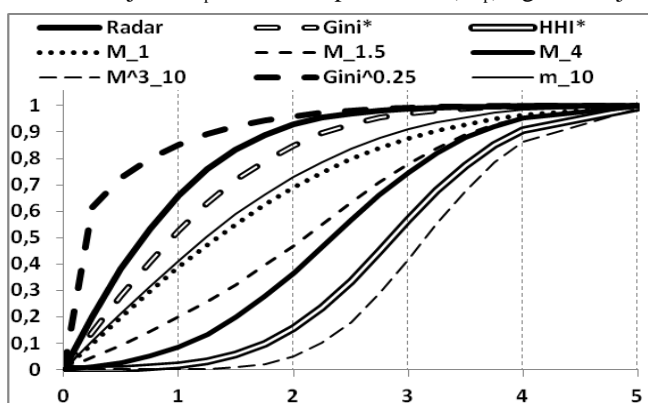
$$L(t) = F_{\mu}(F_0^{-1}(t)), \quad (17)$$

gdzie F_{μ} oznacza pewną dystrybuantę rozkładu normalnego ze średnią μ i odchyleniem standardowym 1.

Na podanym niżej Rys. 1 zilustrowano wykresy wartości wybranych wskaźników w zależności od stopnia koncentracji w wybranej rodzinie rozkładów w przedziale $[0;1]$, ilustrując one koncentrację, wyrażoną przez rodzinę krzywych,

określoną wzorem (17). Zwróćmy uwagę na zupełnie inne reakcje na zmianę koncentracji w zakresie małych i dużych poziomów koncentracji dla wskaźników pomiaru koncentracji GINI* oraz HHI*. Z omawianego rysunku widać także, że wykorzystując te idee budowy, można uzyskać wskaźniki o różnych wrażliwościach na zmiany poziomu koncentracji. Oczywiście, badacz przy wyborze wskaźnika powinien rozpatrzyć także inne parametryczne rodziny, ilustrujące zmiany koncentracji i prześledzić wrażliwość wybieranego narzędzia do pomiaru. Powinien to być model lub modele, które najlepiej pasują do zjawiska, które mogą śledzić konstruowany wskaźnik. Wtedy z całej palety możliwości można wybrać taki wskaźnik lub lepiej dwa różne wskaźniki, które mocno reagują na poziomie koncentracji, postulowanym przez użytkownika.

Rysunek 1. Wykresy wartości wybranych wskaźników koncentracji w zależności od wartości parametru μ indeksującego zmianę koncentracji według modelu (17), (na rysunku przyjęto następujące oznaczenia techniczne: M_p jako M_p , m_{10} jako m_p oraz W^a_p zamiast $(W_p)^a$, gdzie W jest nazwą wskaźnika.



Źródło: opracowanie własne

BIBLIOGRAFIA

- Ávila F., Flores E., López-Gallo F., Márquez J. (2013) Concentration indicators: Assessing the gap between aggregate and detailed data. IFC Bulletin No 36, Statistical issues and activities in a changing environment, 542-559.
- Barnett R. A. et al. (2005) College Mathematics for Business, Economics, Life Sciences, and Social Sciences, 10th ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River.
- Binderman A. (2006) Klasyfikacja danych na podstawie dwóch wzorców, *Ekonomika i Organizacja Gospodarki Żywnościowej*, SGGW, Warszawa, z. 60, s.25-34.
- Binderman A. (2011) Wielokryterialne metody analizy zróżnicowania polskiego rolnictwa w 2009 roku, *Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych*, XII/2, s. 58-68.
- Binderman Z., Borkowski B., Szczesny W. (2012) Radar coefficient of concentration, *Quantitative methods in economics Vol. XIII*, nr 2, 7-21.

- Binderman Z., Borkowski B., Szczesny W. (2008) O pewnej metodzie porządkowania obiektów na przykładzie regionalnego zróżnicowania rolnictwa, *Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych*, IX, 39-48, wyd. SGGW.
- Binderman Z., Szczesny W. (2009) Arrange methods of tradesmen of software with a help of graphic representations Computer algebra systems in teaching and research, Siedlce, wyd. WSFiZ, 117-131.
- Binderman Z., Borkowski B., Prokopenya A., Szczesny W. (2013) Mechanisms of Construction of the Radar Coefficients of Concentration, *Computer Algebra Systems in Teaching and Research*, Siedlce, ed. Collegium Mazovia, 7-15.
- Binderman Z., Borkowski B., Prokopenya A., Szczesny W. (2013a) Radar Coefficients of Concentration, Verifications of Properties, *Computer Algebra Systems in Teaching and Research*, Siedlce, ed. Collegium Mazovia, 16-28.
- Binderman Z. (2011) Matematyczne aspekty metod radarowych, *Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych*, XII, nr 2, 69-79.
- Calkins, S. (1983) The New Merger Guidelines and the Herfindahl-Hirschman Index, *California Law Review* 71 (2), 402-429.
- Djolov G.: The Herfindahl-Hirschman: Index as a decision tool to business concentration in the banking sector: a general perspective, https://umsbe.wufoo.com/cabinet/276/298/53/p171_update3.docx.
- Dunford N., Schwartz J. T. (1958) *Linear operators*, Yale University, Interscience Publishers, New York, London.
- Gelfand I., M. (1961) *Lectures on linear algebra*, Interscience, New York.
- Herfindahl, O.C. (1955) Comment on Rosenbluth's measures of concentration, *Business concentration and price policy*, ed. G. Stigler, Princeton University Press, USA.
- Hirschman, A.O. (1964) The paternity of an index", *American Economic Review*, vol. 54, no. 5, pp. 761-762.
- Hoffmann . L. D. and Bradley G. L. (2007) *Calculus for Business, Economics, and the Social and Life Sciences*, 9th ed., McGraw Hill, New York.
- Kerber W., Kretschmer J-P, Wangenheim G. (2009) Market share thresholds and Herfindahl-Hirschman-Index (HHI) as screening instruments in competition law: A theoretical analysis. discussion paper.
- Hwang C., L., Yoon K. (1981) *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, Springer Verlag, New York.
- Kwoka, J. E. (1977) Large firm dominance and price-cost margins in manufacturing industries." *Southern Econ J.* vol. 44, pp. 183-189.
- Kwoka, J. E. (1985) The Herfindahl index in theory and practice, *Antitrust Bulletin* 30, 915-947.
- Lijesen M. G. (2004) Adjusting the Herfindahl index for close substitutes: an application to pricing in civil aviation *Transportation Research Part E* 40 123-134.
- Matsumoto A., Merlone U, Szidarovszky F. (2012) Some notes on applying the Herfindahl - Hirschman index *Applied Economics Letters*, Taylor and Francis Journals, vol. 19(2), 181-184.
- Przeworska-Rolewicz D. (1977) *Przestrzenie liniowe i operatory liniowe*. WNT Warszawa.
- Przeworska-Rolewicz D., Rolewicz S. (1968) *Equations in linear spaces*, *Monografie Matematyczne* 47, PWN Warszawa.