

MIARA ZANURZANIA W MONITOROWANIU PROCESÓW O WIELU WŁAŚCIWOŚCIACH

Małgorzata Kobylińska
Katedra Metod Ilościowych
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
e-mail: angosiak@poczta.onet.pl

Streszczenie: Jednym z podstawowych narzędzi statystycznej kontroli jakości są karty kontrolne. Umożliwiają one stały nadzór nad procesem produkcyjnym poprzez dostarczanie informacji o tym czy proces jest stabilny oraz sygnalizują możliwość utraty jego stabilności w przyszłości. Karty kontrolne Shewharta mogą być wykorzystywane do monitorowania pojedynczych właściwości. W rzeczywistości niejednokrotnie mamy do czynienia z procesami, które charakteryzowane są przez wiele cech. Istnieją różne metody wykrywania, czy tego typu proces produkcyjny przebiega w sposób ustabilizowany, wśród nich karta T^2 Hotellinga. W pracy przedstawiono karty kontrolne oparte na zanurzeniu obserwacji w próbie, które mogą być wykorzystywane w celu monitorowania procesów produkcyjnych o wielu właściwościach.

Słowa kluczowe karty kontrolne, miara zanurzenia obserwacji w próbie

WPROWADZNI

Karty kontrolne są jednym z narzędzi sterowania jakością procesu produkcyjnego. Zostały one wprowadzone przez Waltera A. Shewhart'a w 1924 roku. Wykorzystywane są w celu wykrycia nielosowych odchyleń od zadanej normy, które zachodzą w monitorowanym procesie. Są wykorzystywane w praktyce do kontroli trzech wielkości procesu: parametru położenia (najczęściej średniej), parametru rozproszenia oraz wadliwości.

Niejednokrotnie w praktyce produkcyjnej napotykamy na procesy opisane za pomocą wielu parametrów. Zachodzi wówczas konieczność bezpośredniego monitorowania kilku wzajemnie powiązanych statystyk jakości. W związku z powiązaniem pomiędzy tymi charakterystykami nie powinno się analizować

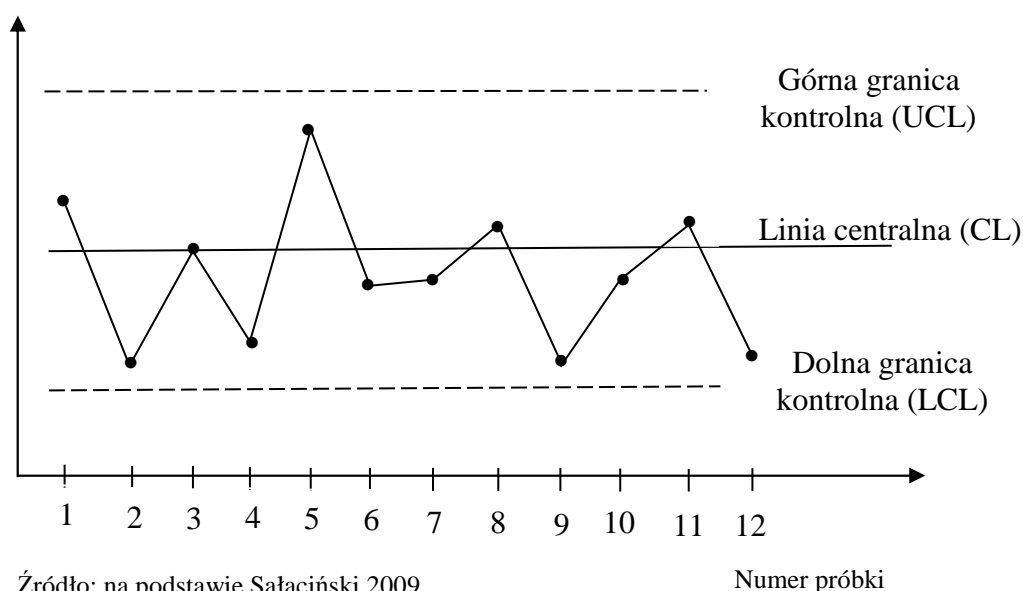
procesu produkcyjnego ze względu na każdą charakterystykę oddzielnie, wykorzystując jednowymiarowe karty kontrolne. Pożądane jest zatem zastosowanie wielowymiarowych kart kontrolnych. Klasycznym przykładem takiej karty jest karta T^2 Hotellinga. Jednym z głównych założeń w tym przypadku jest zgodność pomiarów z rozkładem normalnym [Koronacki 1999].

Celem pracy jest przedstawienie propozycji wykorzystania zanurzenia obserwacji w próbie do monitorowania procesów produkcyjnych o wielu właściwościach. Omówione w niej zostały zasady konstrukcji kart kontrolnych opartych na mierze zanurzenia obserwacji w próbie, a następnie zilustrowane przykładami liczbowymi dla prób dwuwymiarowych.

KARTY KONTROLNE JEDNOWYMIAROWE

Karty kontrolne wykorzystywane są do analizy zbieranych systematycznie z procesu produkcji wyników pomiarów produkowanych wyrobów. Są one konstruowane w formie wykresu, gdzie oś pozioma jest osią czasu, na której odkładane są numery prób pobrane do badania. Na osi pionowej zaznaczana jest obserwowana charakterystyka próbki, którą może być na przykład: średnia arytmetyczna lub odchylenie standardowe z próbki, frakcja lub liczba sztuk wadliwych w próbce. Wykres karty kontrolnej przedstawiono na rysunku 1. Zaznaczona została linia centralna CL oraz dwustronny obszar kontrolny określony przez dolną (LCL) i górną (UCL) linię kontrolną. W zależności od potrzeb konstruuje się dwustronne lub jednostronne obszary kontrolne na przykład, gdy monitorowana jest frakcja wadliwych wyrobów.

Rysunek 1. Budowa karty kontrolnej



Źródło: na podstawie Sałaciński 2009

Numer próbki

Aktualnie w literaturze przedmiotu spotkać można podział kart kontrolnych na karty wykorzystywane w ocenie alternatywnej (karty frakcji lub liczby wyrobów niezgodnych, karty liczby niezgodności w kontrolowanej jednostce wyrobu) lub liczbowej (karty wartości średniej i rozstępu lub odchylenia standardowego, karty pojedynczych obserwacji i ruchomego rozstępu, karty sum skumulowanych) [Greber 2000].

Na potrzeby pracy omówione zostały trzy rodzaje kart kontrolnych jednowymiarowych: karta kontrolna średnich obserwacji i odchylenia standardowego ($\bar{X} - s$), karta kontrolna średnich obserwacji i rozstępu ($\bar{X} - R$) oraz karta kontrolna pojedynczych obserwacji i ruchomego rozstępu ($IX - MR$). Szczegółowo konstrukcja tych kart zostanie omówiona poniżej.

Najczęściej stosowanymi kartami kontrolnymi są karta $\bar{X} - s$ oraz karta $\bar{X} - R$. Są one wykorzystywane w przypadku, gdy można sobie pozwolić na badanie określonej liczby próbek, każda o stałej liczności. Linia centralna w tych kartach wyznaczona jest zgodnie z wzorem

$$CL = \bar{\bar{x}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{x}_i$$

Granice kontrolne wyznaczone są na podstawie wzorów:

- dla karty $\bar{X} - s$:

$$UCL = \bar{\bar{x}} + A_3 \cdot \bar{s}, \quad LCL = \bar{\bar{x}} - A_3 \cdot \bar{s},$$

- dla karty $\bar{X} - R$

$$UCL = \bar{\bar{x}} + A_2 \cdot R, \quad LCL = \bar{\bar{x}} - A_2 \cdot R.$$

Poszczególne oznaczenia to:

$$\bar{x}_i - \text{średnia wartość cechy w próbce } \bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$\bar{\bar{x}}$ - średnia wartość z wartości średnich w poszczególnych próbkach,

n - liczebność próbki,

k - liczba próbek,

s_i - odchylenie standardowe w próbce,

\bar{s} - średnia wartość z odchyżeń standardowych w poszczególnych próbkach,

A_2, A_3 - współczynniki statystyczne [Bartkowiak 2011].

Karty te można stosować wtedy, gdy analizowane pomiary mają rozkład normalny. W związku z tym, że wartość odchylenia standardowego charakteryzuje

precyzję procesu produkcyjnego, zakłada się, że nie zmienia się ona w czasie (Iwasiewicz 2005). Proces uważa się za stabilny, jeżeli wartości średnich arytmetycznych obliczonych na podstawie n -elementowych próbek losowych układają się wokół linii centralnej i nie wychodzą poza wyznaczone linie kontrolne.

Dopuszczalne są „niewielkie” odstępstwa dotyczące założenia zgodności z rozkładem normalnym, w przypadku kart kontrolnych wykorzystywanych do kontroli wartości średniej. Bardzo wrażliwe na założenia dotyczące normalności rozkładu badanej cechy są karty odchylenia standardowego.

Karta kontrolna pojedynczych obserwacji i ruchomych rozstępów ($IX - MR$) wykorzystywana jest w przypadku, gdy kontroli poddawane są pojedyncze pomiary, a nie próbki złożone z wielu obserwacji. Stosuje się ją, gdy nie ma możliwości uzyskania dużej liczby danych ze względu na znaczną czasochłonność lub wysokie koszty badania (np. badania niszczące). Obszarem ich zastosowań jest produkcja nierytmiczna, czyli brak regularnej powtarzalności wielkości produkowanych wyrobów z powodu na przykład produkcji okresowej lub produkcji małoseryjnej [Sęp i in. 2010].

Karta $IX - MR$ bazuje na dwóch wykresach: pojedynczych obserwacji z próby oraz ruchomego rozstępu. Linia centralna oraz granice kontrolne wyznaczone są według następujących wzorów:

- dla pojedynczych obserwacji

$$CL = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$LCL = \bar{x} - 2,66 \cdot \overline{MR}, \quad UCL = \bar{x} + 2,66 \cdot \overline{MR},$$

- dla ruchomego rozstępu

$$CL = \overline{MR} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n MR_i$$

$$LCL = 0, \quad UCL = 3,27 \cdot \overline{MR}$$

$$MR_i = |x_i - x_{i-1}|_{i=2}^n,$$

gdzie

x_i - pojedynczy pomiar,

\bar{x} - wartość średnia próby,

n - liczebność próby,

\overline{MR} - średnia wartość ruchomego rozstępu.

Omówione karty wykorzystuje się w zależności od wielkości próbek. W przypadku kart $IX - MR$ liczebność próby wynosi 1, stosowanie karty $\bar{X} - R$

wymaga liczebności od 2 do 9, natomiast karty $\bar{X} - s$ liczebności powyżej 9. Zanim wykona się wykres karty kontrolnej należy zmierzyć co najmniej 20 próbek. [Greber 2000].

MONITOROWANIE PROCESÓW O KILKU CHARAKTERYSTYKACH JAKOŚCI

Nadzorowanie zdolności procesu produkcyjnego wymaga często oceny kilku wzajemnie powiązanych charakterystyk jakości procesu. W tym celu wykorzystać można karty kontrolne T^2 Hotellinga. Na karcie kontrolnej dla każdej próbki nanoszone są odległości T^2 Hotellinga wyznaczone według następującego wzoru:

$$T^2(p) = n[(\bar{x}(p) - \bar{\bar{x}})^T s^{-1} (\bar{x}(p) - \bar{\bar{x}})] \quad (1)$$

gdzie

n - liczba jednostek w próbce,

$\bar{x}(p)$ - wektor średnich w próbce,

$\bar{\bar{x}}$ - wektor średnich uregulowanego procesu,

s^{-1} - macierz odwrotna do macierzy kowariancji s [patrz np. Płaska 2000].

W przypadku wykorzystania tych kart i zaobserwowania sygnału o rozregulowaniu procesu problemem może być ustalenie, która z charakterystyk osiągnęła niewłaściwą wartość. Obliczenia wykorzystane do konstrukcji tych kart są dość skomplikowane, dlatego wymagane jest odpowiednie oprogramowanie komputerowe.

W pracy Liu przedstawione zostało wykorzystanie zanurzania obserwacji w próbie do konstrukcji kart kontrolnych [Liu 1995]. Pojęcie to zostało wprowadzone przez Tukey'a w 1975 roku. W literaturze przedmiotu znaleźć można liczne rozważania dotyczące wykorzystania zanurzania obserwacji w próbie w statystycznej analizie danych m. in. w: wykrywaniu i eliminacji obserwacji nietypowych, w konstrukcji estymatorów odpornych, jak również w monitorowaniu wielowymiarowych procesów produkcyjnych [Donoho i Gasko 1992, Rousseu i Verboven 2002].

W niniejszej pracy omówione zostały karty kontrolne oparte na miarach zanurzania obserwacji w próbie. Ideą tych kart jest możliwość zredukowania wielowymiarowych pomiarów do jednowymiarowych wartości statystyki rangowej, dla których sporządzany jest wykres karty kontrolnej. W tym celu wykorzystana została miara zanurzania obserwacji w próbie, która jest określona według następującej definicji.

Definicja 1. Miarą zanurzania Mahalanobisa ($Mzan_p$) punktu θ w próbie P_n^p nazywamy funkcję

$$Mzan_p(\theta; P_n^p) = [1 + Q(\theta, P_n^p)]^{-1}, \quad (2)$$

gdzie $Q(\theta, P_n^p) = (\theta - \bar{x})^T S^{-1} (\theta - \bar{x})$ jest odległością Mahalanobisa wektora

$$\theta \text{ od wektora średnich } \bar{x}, \text{ przy czym } \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dots \\ \theta_p \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \dots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j,$$

S jest macierzą kowariancji między rozważanymi p wektorami, natomiast S^{-1} jest jej macierzą odwrotną, \bar{x} - wektorem wartości średnich.

W definicji P_n^p jest próbą p -wymiarową o liczebności n , pochodzącą z pewnego p -wymiarowego rozkładu określonego dystrybuantą F_p . Miara zanurzania została obliczona dla pewnego p -wymiarowego punktu θ , który może być elementem próby P_n^p , lub może należeć do przestrzeni punktów R^p . Wykorzystując zanurzenie obserwacji w próbie można ocenić położenie punktów względem oddalenia od centralnego skupienia. Wyższe wartości tej miary odpowiadają punktom położonym bardziej centralnie w próbie.

W pracy omówiona została konstrukcja dwóch rodzajów kart kontrolnych opartych na mierze zanurzania obserwacji w próbie (karty r i karty \bar{X}_r), które mogą być odpowiednikami jednowymiarowych kart kontrolnych odpowiednio karty $IX - MR$ oraz kart $\bar{X} - R$ i $\bar{X} - s$. Do sporządzenia wykresów tych kart wykorzystane zostały wartości statystyki rangowej $r_{G_m}(x_i)$ wyznaczone według wzoru:

$$r_{G_m}(x_i) = \# \{y_j / Mzan_G(y_j) \leq Mzan_G(x_i), i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\} / m, \quad (3)$$

gdzie $\#\{\cdot\}$ oznacza liczebność rozważanego zbioru, $Mzan_G(\cdot)$ jest wartością miary zanurzania Mahalanobisa obserwacji w próbie wyznaczoną zgodnie z wzorem 2. Natomiast G jest teoretycznym rozkładem odniesienia monitorowanego procesu produkcyjnego, określonym dystrybuantą G_n , y_i (dla $i = 1, 2, \dots, m$) są p -wymiarowymi wektorami pochodzącymi z rozkładu G , x_i (dla $i = 1, 2, \dots, n$) - p -wymiarowymi wektorami pochodzącymi z pewnego rozkładu F , określonego dystrybuantą F_n .

Na wykresie karty kontrolnej r , będącej odpowiednikiem karty $IX - MR$, nanoszone są wartości statystyki rangowej $r_{G_m}(x_i)$ w czasie. Górna linia kontrolna nie występuje. Linia centralna $CL = 0,5$, dolna linia kontrolna $LCL = \alpha$. Położenie linii centralnej wynika z własności, że statystyka $r_{G_m}(x_i)$ ma rozkład jednostajny określony na przedziale $\langle 0;1 \rangle$. Wartość oczekiwana w tym przypadku wynosi 0,5 [Liu 1995].

Koncepcja kart kontrolnych \bar{X}_r jest zbliżona do kart kontrolnych jednowymiarowych $\bar{X} - s$ i $\bar{X} - R$. Na wykresie przedstawione są wartości średnich arytmetycznych podzbiorów $r_{G_m}(x_i)$ o liczebności n wyznaczone według wzoru

$$\bar{X}_r(G, F_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{G_m}(x_i). \quad (4)$$

Można zapisać, że karta \bar{X}_r jest wykresem wartości

$$\{X_{G_m}(G, F_n^1), X_{G_m}(G, F_n^2), \dots, X_{G_m}(G, F_n^k)\},$$

gdzie:

n - liczebność podzbiorów,

k - liczba podzbiorów.

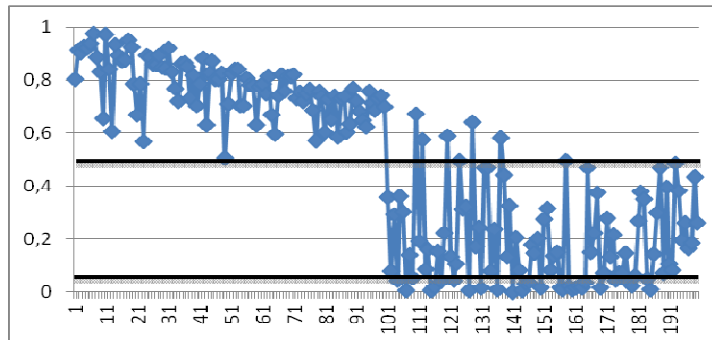
Określenie linii centralnej i linii kontrolnej w tej karcie zależy od liczebności podzbiorów n . W pracy omówiona zostanie konstrukcja kart kontrolnych \bar{X}_r dla liczebności $n \geq 5$. Jeżeli liczebność próbek wynosi co najmniej 5, linia centralna $CL = 0,5$, natomiast dolna granica kontrolna wyznaczona jest na podstawie wzoru:

$$LCL = 0,5 - u_\alpha \sqrt{\frac{1}{12} \left[\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \right]}. \quad (5)$$

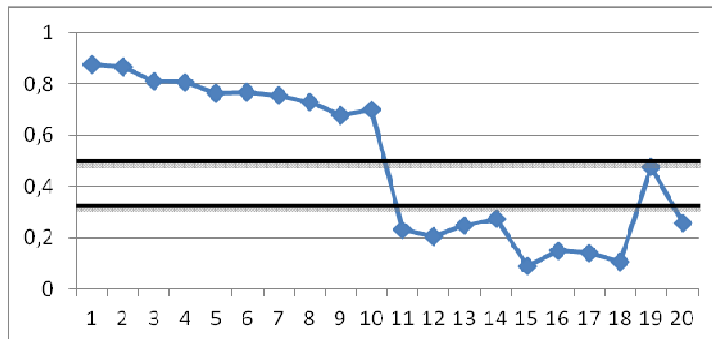
Rozważania dotyczące wyznaczania linii centralnych oraz kontrolnych dotyczące omawianej karty zamieszczone są w pracy Liu i Singh [Liu i Singh 1993].

Konstrukcja kart kontrolnych została przedstawiona na danych liczbowych prób dwuwymiarowych. Jako teoretyczny rozkład odniesienia G przyjęto próbę o liczebności 400, pochodzącą ze standaryzowanego dwuwymiarowego rozkładu normalnego. W celu zilustrowania użyteczności kart kontrolnych opartych na miarach zanurzania obserwacji w próbie do badania rozregulowania procesu wykorzystano próby dwuwymiarowe, każda o liczebności 200, w których pierwszych 100 obserwacji pochodzi ze standaryzowanego dwuwymiarowego rozkładu normalnego. Kolejnych 100 obserwacji pochodzi z dwuwymiarowego rozkładu normalnego z zerowym wektorem wartości średnich

i macierzą kowariancji $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (próba PD1), natomiast w przypadku próby PD2, wektor średnich wynosi $\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$, a macierz kowariancji jest równa $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rysunek 2. Karta kontrolna r dla PD1

Źródło: opracowanie własne

Rysunek 3. Karta kontrolna \bar{X}_r dla PD1

Źródło: opracowanie własne

Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono wykresy kart kontrolnych r oraz \bar{X}_r . Zaznaczone zostały linie centralne $CL=0,5$ oraz dolne granice kontrolne $LCL=0,05$ (dla karty r) i wyznaczona zgodnie z wzorem 5, $LCL=0,319$ (dla karty \bar{X}_r). Wartości statystyki rangowej $r_{G_m}(x_i)$, która jest wykorzystywana do

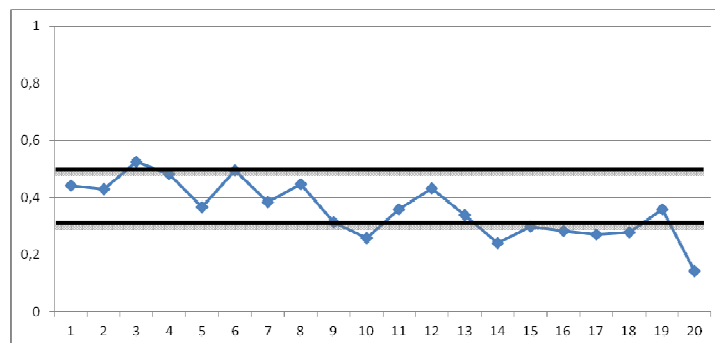
konstrukcji tych kart, określają ilu obserwacjom rozkładu hipotetycznego G odpowiada wartość miary zanurzenia mniejsza lub równa od zadanej wartości x_i .

Z powyższych rysunków wynika, że procesy nie są stabilne w czasie. Występują punkty poza granicami kontrolnymi, co wskazuje na rozregulowanie procesu. Na rysunkach przedstawiono proces ustabilizowany do 100. próbki (rys.2) i 10. próbki (rys.3) z wprowadzonym wzrostem rozproszenia.

W przypadku niestabilności zmienności procesu występują dwa obszary przedstawiające różne konfiguracje punktów na wykresach kart kontrolnych. Jeżeli od 100. obserwacji $r_{G_m}(x_i)$ przyjmuje bardzo małe wartości oznacza to, że bardzo mała liczba obserwacji zbioru hipotetycznego osiąga wartości miary zanurzenia mniejsze od wartości miary zanurzenia dla danego punktu x_i . Proces przedstawiony na rysunkach 2 i 3 charakteryzuje się większym rozproszeniem obserwacji wokół wektora wartości średnich w porównaniu z procesem hipotetycznym.

Na rysunku 4 przedstawiono proces uregulowany do 10. próbki z wprowadzonym przesunięciem procesu. Wykres tej karty kontrolnej sygnalizuje rozregulowanie od 10. obserwacji.

Rysunek 4. Karta kontrolna \bar{X}_r dla PD2



Źródło: opracowanie własne

POSUMOWANIE

W artykule przedstawiono koncepcję zanurzenia obserwacji w próbie do konstrukcji kart kontrolnych. Wykorzystanie miary zanurzenia daje możliwość redukcji wielowymiarowych pomiarów pochodzących z procesu produkcyjnego do jednowymiarowego wskaźnika statystyki rangowej. Dla tych wartości sporządzane są dwuwymiarowe wykresy kart kontrolnych, za pomocą których można wykryć zdeterminowane przesunięcie procesu o stałą wartość jak i zmianę rozproszenia

procesu. Zauważyć można, że w przypadku wzrostu rozproszenia linie na wykresach kart kontrolnych (rys. 2 i 3) „gwałtownie” opadają. W przypadku zmiany wektora położenia procesu „spadek” linii na wykresie jest łagodny (rys.4).

Omówione karty kontrolne nie wymagają spełnienia założeń dotyczących zgodności z rozkładem normalnym oraz nie wymagają, żeby zależność pomiędzy właściwościami procesu była liniowa, co jest wymagane w przypadku stosowania kart T^2 Hotellinga.

Przedstawione rozważania wskazują, że miara zanurzania obserwacji w próbie może znaleźć zastosowanie w sterowaniu procesem produkcyjnym o wielu właściwościach. Obszar tych rozważań jest obszerny w związku z tym trudno było przedstawić w pracy inne rozważania dotyczące tego zagadnienia.

BIBLIOGRAFIA

- Bartkowiak M., (2011) Karty kontrolne obrazem zmienności procesu, *Kwartalnik Nauk o Przedsiębiorstwie*, 3/2011(20), 63-71.
- Donoho D.L., Gasko M., (1992), Breakdown Properties of Location Estimates Based on Halfspace Depth and Projected Outlyingness, *The Annals of Statistics*, 20, 1803-1827.
- Greber T. (2000) Statystyczne sterowanie procesami- doskonalenie jakości z pakietem STATISTICA, StatSoft Polska.
- Iwasiewicz A. (2005) Zarządzanie jakością w przykładach i zadaniach, Śląskie Wydawnictwa Naukowe, Wyższa Szkoła Zarządzania i Nauk Społecznych w Tychach.
- Koronacki J.(1999) Metody statystycznego sterowania jakością, StatSoft Polska, http://www.statsoft.pl/Portals/0/Downloads/Metody_sterow_jakosc_Koronacki.pdf
- Liu R. (1995), Control Chart for Multivariate Processes, *Journal of the American Statistical Association* December, Vol. 90, No. 432.
- Liu R. Y., Sing K., (1993), *A Quality Index Based on Data Depth and Multivariate Rank Tests*, *Journal of the American Statistical Association*, 88, 257-260.
- Płaska S. (2000) Wprowadzenie do statystycznego sterowania procesami technologicznymi, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, Lublin.
- Rousseeuw P. J., Verboven S., (2002), Robust Estimation in Very Small Sample, Universitaire Instelling Anwerpen, Belgium.
- Sałaciński T. (2009) SPC-statystyczne sterowanie procesami produkcji, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
- Sęp J., Perłowski R., Pacana A. (2010) Techniki wspomaganie zarządzania jakością, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów.

DEPTH MEASURE IN THE MONITORING OF MULTI-PROPERTY PROCESSES

Abstract: Control cards are one of the basic tools for statistical quality control. They enable continuous supervision of a production process and provide information on the process stability and signal any possible loss of future stability. Shewhart's control cards may be used for monitoring single properties. In reality, we frequently deal with processes characterised by multiple properties. There are a variety of methods to detect whether the course of this type of production process is stable, including T^2 Hotellinga cards. This paper presents control cards based on observation depth measure in a sample, which can be used to monitor multi-property production processes.

Keywords: observation depth measure in a sample, control cards