METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XV/3, 2014, str. 199 – 207

# ZASTOSOWANIE PROGRAMOWANIA MATEMATYCZNEGO DO WYBORU TRAS DOSTAW W SIECI DYSTRYBUCJI

**Mirosław Liana, Tomasz Pisula**
Katedra Metod Ilościowych
Politechnika Rzeszowska
e-mail: mliana@prz.edu.pl, tpisula@prz.edu.pl

**Streszczenie:** Tematyka artykułu mieści się w zakresie logistyki dystrybucji i dotyczy planowania przewozów. Dla danej sieci dystrybucji można wyznaczyć zbiór opłacalnych tras dostaw. Problem decyzyjny sprowadza się do takiego wyboru tras z tego zbioru, żeby zminimalizować koszty transportu, załadunku i rozładunku. Do znalezienia optymalnego rozwiązania problemu zaproponowano programowanie matematyczne. W pracy przedstawiono liniowy model matematyczny zagadnienia. Model zawiera zarówno zmienne rzeczywiste, jak i zmienne binarne.

**Słowa kluczowe:** sieć dystrybucji, planowanie przewozów, optymalizacja, programowanie liniowe

## WPROWADZENIE

Zarządzanie łańcuchem dostaw stanowi jeden z ważniejszych obszarów zastosowań badań operacyjnych w logistyce. Z licznej literatury dotyczącej wspomnianej problematyki, wymieńmy [Griffis i in. 2012, Xing i in. 2013]. Spośród wielu licznych problemów i zagadnień optymalizacji łańcucha dostaw bardzo ważną klasę zagadnień stanowią problemy związane z wyznaczaniem:

- optymalnej marszrutyzacji środków transportu dla potencjalnych tras zaopatrzeń (Vehicle Routing problems);
- optymalnego planu czasowego realizacji dostaw (Vehicle Scheduling problems);
- optymalnej lokalizacji magazynów, punktów produkcyjnych lub punktów dystrybucji, zaprojektowaniem sieci dystrybucyjnych (Facility Location, Transportation Network Design problems);

- optymalnej (minimalnej) wielkości floty pojazdów (środków transportu), niezbędnej dla realizacji dostaw (Vehicle Fleet Sizing problems).

Umiejętność efektywnego rozwiązywania tego typu problemów jest bardzo ważna z punktu widzenia praktycznych zastosowań w logistyce, gdyż umożliwia podejmowanie optymalnych decyzji dotyczących takich kluczowych aspektów zarządzania łańcuchem dostaw, jak: długoterminowego planowania marszrutyzacji dostaw, planowania i projektowania nowych punktów produkcyjnych, centrów dystrybucyjno-magazynowych oraz intermodalnych sieci transportowych, planowania wielkości floty transportowej, zasobów ludzkich (kierowców, załóg obsługi) dla sieci zaopatrzeń.

Tematyka niniejszej publikacji mieści się w zakresie problematyki marszrutyzacji środków transportu w planowaniu tras dostaw towarów. Zagadnienia planowania marszrutyzacji środków transportu w łańcuchach dostaw, z racji swojej, niekiedy bardzo skomplikowanej praktycznej realizacji oraz licznych uwarunkowań koniecznych do rozważenia, mają bardzo wiele różnych wariantów (szerzej opisanych np. w [Goetschalckx 2011]). Najważniejsze z nich to:

- zagadnienie komiwojażera (Travelling Salesman Problem);
- klasyczny problem marszrutyzacji pojazdów na trasach zaopatrzeń (Vehicle Routing Problem – VRP).

Zagadnienie komiwojażera to najprostszy wariant planowania marszrutyzacji dostaw dla pojedynczego środka transportu, bez dodatkowych ograniczeń dotyczących jego ładowności. Polega na wyznaczeniu optymalnej zamkniętej trasy dostaw, łączącej wyróżniony punkt dostaw (baza) z n kolejnymi punktami zaopatrzeń (odbiorcami) o znanej lokalizacji.

Klasyczny problem marszrutyzacji pojazdów (VRP) polega na wyznaczeniu optymalnych tras zaopatrzeń do kilku odbiorców, dla których znane jest ich zapotrzebowanie i lokalizacja. Flota środków transportu posiada jednakową ładowność, a pojazdy wyruszają od jednego dostawcy. Celem jest zoptymalizowanie łącznej długości wszystkich tras dostaw do odbiorców.

Spotykane są liczne odmiany klasycznego zagadnienia marszrutyzacji, np.: Vehicle Routing Problem with Backhauling, Mixed Pickup and Delivery Problem, Periodic Vehicle Routing Problem, Vehicle Routing with Time Windows, Inventory Vehicle Routing.

Vehicle Routing Problem with Backhauling (VRPB) jest odmianą klasycznego problemu marszrutyzacji, w której oprócz jednego centrum dystrybucji rozpatrywane są dwa typy lokalizacji: pierwszy – to odbiorcy dóbr, których zaopatruje centrum, zaś drugi – to dostawcy dóbr (np. producenci), którzy z kolei zaopatrują centrum dystrybucji. Oprócz klasycznych ograniczeń dotyczących np. liczby i pojemności środków transportu wymaga się także, żeby w trakcie kursu załadunek u dostawców był możliwy dopiero po pełnym wyładunku dóbr u odbiorców. Może pojawiać się w tych zagadnieniach problem zarządzania pustymi przebiegami środków transportu. Wyczerpującą analizę tego typu zagadnień można znaleźć na przykład w publikacji [Cuervo i in. 2014].

Mixed Pickup and Delivery Problem (MPDP) jest modyfikacją zagadnienia marszrutyzacji dostaw typu VRPB, w której dopuszcza się na poszczególnych trasach możliwość mieszanego (naprzemiennego) załadunku towarów u dostawców i wyładunku u odbiorców. Więcej informacji na temat tego typu zagadnień można znaleźć na przykład w pracy [Rais i in. 2014].

Periodic Vehicle Routing Problem (PVRP) jest zagadnieniem planowania dostaw towarów do klientów w wielu okresach. W zadaniu okresowej marszrutyzacji dostaw ustala się, którzy klienci w danym dniu zostaną obsłużeni i którymi trasami. Celem jest wyznaczenie dla całego okresu planowania takich marszrut do klientów, których suma długości będzie minimalna. Dokładny opis oraz przegląd literatury dotyczący tego typu zagadnień można znaleźć w pracy [Campbell i Wilson 2014].

Vehicle Routing with Time Windows (VRPTW – zob. np. praca [Letchford i in. 2014]) jest odmianą klasycznego zagadnienia marszrutyzacji, w której uwzględnia się dodatkowe warunki dotyczące tzw. okien czasowych rozpoczęcia pracy u każdego odbiorcy. Dopuszcza się przypadek, gdy środki transportu mogą przybywać do odbiorców wcześniej niż czas rozpoczęcia ich pracy (muszą wtedy czekać na rozładunek lub załadunek). Istnieje także możliwość naruszenia czasu rozpoczęcia obsługi u odbiorców i wcześniejszego obsłużenia pojazdów, wiąże się to jednak z pewnymi karami.

Inventory Vehicle Routing Problem (IRP) jest wariantem problemu marszrutyzacji, w którym minimalizuje się sumaryczne koszty wykorzystania środków transportu oraz koszty magazynowania zapasów dóbr w magazynach. Istnieje duża różnorodność tego typu problemów, a ich bardziej szczegółowy opis można znaleźć na przykład w pracy [Guerrero i in. 2013].

## PROBLEM DECYZYJNY

Problem decyzyjny, któremu poświęcono ten artykuł, można umiejscowić pośród zagadnień rozpatrywanych w ramach klasycznego problemu marszrutyzacji pojazdów na trasach zaopatrzeń (Vehicle Routing Problem – VRP).

Niech przedsiębiorstwo posiada jednostopniowy system dystrybucji złożony z jednego dostawcy dóbr, którym może być na przykład magazyn centralny przedsiębiorstwa, oraz z wielu odbiorców dóbr, na przykład pawilonów handlowych. Dostawca, poprzez cykliczne transporty dóbr, uzupełnia zapasy u odbiorców, pokrywając zgłaszane przez nich zapotrzebowania.

Transporty dóbr realizowane są przy pomocy jednorodnych środków transportu. Będziemy przez to rozumieć, że środki te posiadają jednakową ładowność i generują takie same koszty na danej trasie. Również transportowane dobra są jednorodne, co będzie oznaczało, że mogą być łącznie przewożone i są sformowane w postaci podobnych jednostek ładunkowych np. palet EUR1. Ma to takie znaczenie, że ładowność środka transportu może być ograniczona przez objętość lub powierzchnię skrzyni ładunkowej pojazdu oraz przez masę ładunku. Przy przyjętym założeniu dotyczącym jednorodności przewożonych dóbr, jedno z tych ograniczeń będzie dominujące i będzie jednoznacznie określało ładowność pojazdów. Całkowita ładowność dostępnej floty pojazdów pozwala dostarczyć odbiorcom wymagane przez nich ilości dóbr.

Znane są lokalizacje dostawcy i odbiorców oraz siatka połączeń drogowych między nimi. Znane są więc odległości i czasy potrzebne na przejazdy pomiędzy poszczególnymi punktami. Pozwala to wyznaczyć zbiór potencjalnych tras dostaw, które będą się charakteryzowały ograniczoną długością lub czasem przejazdu. Każda taka trasa zaczyna się i kończy u dostawcy, na trasie może znajdować się wielu odbiorców. Przebycie całej trasy dostępnym środkiem transportu będzie generowało pewien koszt, określany dalej kosztem transportu. Zakłada się, że po każdej trasie realizowany jest co najwyżej jeden kurs.

Oprócz kosztów transportu brane są pod uwagę również koszty załadunku i rozładunku dóbr. Części zmienne tych kosztów, zależne od wielkości ładunku, który z kolei zależy od zgłoszonego przez odbiorców zapotrzebowania, są pomijane. Natomiast uwzględnia się część stałą tych kosztów, niezależną od wielkości ładunku a związaną z samym faktem wystąpienia załadunku lub rozładunku. Z każdym kursem będzie związany jeden załadunek u dostawcy, więc koszty stałe załadunku można dodać do kosztów transportu. Przyjmuje się, że koszty stałe rozładunku mogą być różne u każdego odbiorcy.

Problem decyzyjny sprowadza się do takiego wyboru tras (ze zbioru potencjalnych tras), żeby można było nimi dostarczyć żądane ilości dóbr odbiorcom przy minimalnych łącznych kosztach transportu, załadunku i rozładunku.

## MODEL MATEMATYCZNY PROBLEMU DECYZYJNEGO

Wprowadzono następujące oznaczenia:

$I$ – liczba tras;

$i$ – numer trasy, $i = 1, 2, .., I$;

$J$ – liczba odbiorców;

$j$ – numer odbiorcy, $j = 1, 2, .., J$.

Parametrami w modelu matematycznym są:

$d_j$ – zapotrzebowanie odbiorcy $O_j$ ($d_j \geq 0$);

$S$ – ładowność środka transportu ($S > 0$);

$C_i$ – koszt przejazdu po trasie $T_i$ powiększony o koszt stały załadunku ($C_i > 0$);

$c_j$ – stały koszt rozładunku u odbiorcy $O_j$ ($c_j > 0$);

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy odbiorca } O_j \text{ położony jest na trasie } T_i, \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym.} \end{cases}$$

Zmiennymi decyzyjnymi w modelu są:

$x_{ij}$ – wielkość ładunku przewożonego po trasie $T_i$ do odbiorcy $O_j$;

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy realizowany jest kurs po trasie } T_i, \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym,} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy w trakcie kursu po trasie } T_i \text{ realizowany jest rozładunek u odb. } O_j, \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym,} \end{cases}$$

Przyjęte oznaczenia pozwoliły zapisać model matematyczny sformułowanego problemu decyzyjnego następująco:

$$\text{(min) } FC(y_i, z_{ij}) = \sum_{i=1}^{I} C_i * y_i + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} c_j * z_{ij} \tag{1}$$

przy warunkach ograniczających:

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ij} = d_j \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, J; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ij} \le S * y_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, I; \tag{3}$$

$$x_{ij} \le S * z_{ij} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, I; \; j = 1, 2, \ldots, J; \tag{4}$$

$$z_{ij} \le a_{ij} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, I; \; j = 1, 2, \ldots, J; \tag{5}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, I; \; j = 1, 2, \ldots, J; \tag{6}$$

$$y_i - \text{binarne} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, I; \tag{7}$$

$$z_{ij} - \text{binarne} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, I; \; j = 1, 2, \ldots, J. \tag{8}$$

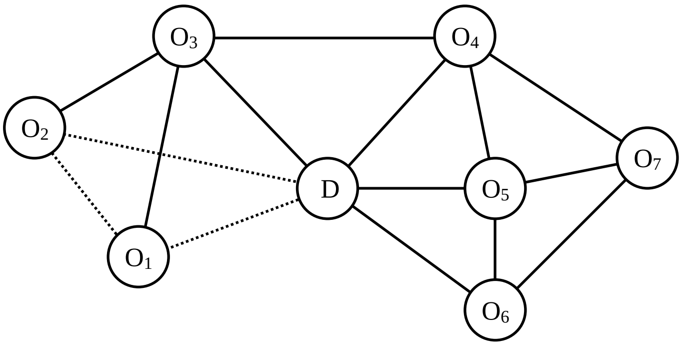
W modelu tym funkcja celu (1) obejmuje łączne koszty transportu oraz koszty stałe załadunku u dostawcy i rozładunków u odbiorców. Warunki (2) można nazwać warunkami bilansowymi odbiorców. Oznaczają one, że wielkość ładunków przewiezionych do każdego odbiorcy będzie równa zgłoszonemu przez nich zapotrzebowaniu. Dzięki warunkom (3) spełnione są jednocześnie dwa postulaty. Po pierwsze, przewóz ładunku będzie możliwy tylko w wyniku realizacji kursu (wzajemne powiązanie zmiennych $x_{ij}$ i $y_i$). A po drugie, wielkość ładunku nie będzie mogła przekroczyć ładowności użytego do przewozu środka transportu. Z kolei warunki (4) łączą zmienne $x_{ij}$ i $z_{ij}$ i zapewniają, że przewiezienie ładunku będzie powodowało wystąpienie rozładunku u odbiorcy. Ograniczenia (5) sprawiają, że rozładunek będzie mógł wystąpić tylko u tych odbiorców, którzy są zlokalizowani na danej trasie.

## PRZYKŁAD

Niech w sieci dystrybucji dostawca D obsługuje 7 odbiorców: $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$, $O_5$, $O_6$ i $O_7$. Sieć wzajemnych połączeń przedstawiono na rys. 1, przy czym odcinki oznaczają drogi, którymi będzie można rozwozić towar. Zapotrzebowanie odbiorców $d_j$ wynosi odpowiednio: 23, 17, 19, 17, 14, 18 i 15 jednostek ładunkowych. Z kolei ładowność dostępnych środków transportu S wynosi 33 jednostki ładunkowe.

Wyznaczono 17 potencjalnych tras dostaw, które, ze względu na swą długość, pozwalają zrealizować kurs w określonym (ograniczonym) czasie. Taka przykładowa trasa D-$O_1$-$O_2$-D została zaznaczona na rys. 1. linią kropkowaną, a w dalszej części będzie nazywana $T_3$.

Rysunek 1. Przykładowa sieć dystrybucji




Źródło: opracowanie własne

W tabeli 1 podano wartości parametrów $a_{ij}$ (pola szare) oraz koszty $C_i$ związane z załadunkiem i realizacją kursu po trasie $T_i$. Przyjęto, że stały koszt rozładunku $c_j$ będzie u wszystkich odbiorców równy 10 jednostek pieniężnych (j.p.).

Tabela 1. Wybrane dane do przykładu

| Koszt $C_i$ | Trasa | $T_i$ | Tabela połączeń $a_{ij}$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $O_4$ | $O_5$ | $O_6$ | $O_7$ |
| 750 | D-$O_1$-D | $T_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 798 | D-$O_2$-D | $T_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 838 | D-$O_1$-$O_2$-D | $T_3$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 734 | D-$O_3$-D | $T_4$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 850 | D-$O_1$-$O_3$-D | $T_5$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 838 | D-$O_2$-$O_3$-D | $T_6$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 878 | D-$O_1$-$O_2$-$O_3$-D | $T_7$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 858 | D-$O_3$-$O_4$-D | $T_8$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 702 | D-$O_4$-D | $T_9$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 686 | D-$O_5$-D | $T_{10}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 778 | D-$O_4$-$O_5$-D | $T_{11}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 710 | D-$O_6$-D | $T_{12}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 758 | D-$O_5$-$O_6$-D | $T_{13}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 850 | D-$O_4$-$O_5$-$O_6$-D | $T_{14}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 814 | D-$O_5$-$O_7$-D | $T_{15}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 866 | D-$O_4$-$O_7$-$O_5$-D | $T_{16}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 870 | D-$O_5$-$O_7$-$O_6$-D | $T_{17}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Źródło: opracowanie własne

Do wybrania najlepszych tras dostaw w oparciu o podany wcześniej model matematyczny wykorzystano dodatek Solver do programu Microsoft Office Excel. Wartości zmiennych decyzyjnych $x_{ij}$ dla uzyskanego rozwiązania optymalnego podano w tabeli 2. Łatwo z niej odczytać, że towar można rozwieźć czterema pojazdami, realizując kursy po trasach D-$O_1$-$O_2$-D, D-$O_2$-$O_3$-D, D-$O_5$-$O_6$-D i D-$O_4$-$O_7$-$O_5$-D. Można też wywnioskować, że, spośród zmiennych binarnych w modelu, wartość 1 przyjęły tylko:

- wskazujące trasy: $y_3$, $y_6$, $y_{13}$, $y_{16}$ oraz
- wskazujące rozładunki: $z_{3,1}$, $z_{3,2}$, $z_{6,2}$, $z_{6,3}$, $z_{13,5}$, $z_{13,6}$, $z_{16,4}$ i $z_{16,7}$.

Tabela 2. Wartości zmiennych $x_{ij}$ w rozwiązaniu optymalnym

| Trasa | $T_i$ | Tabela przewozów $x_{ij}$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $O_4$ | $O_5$ | $O_6$ | $O_7$ |
| D-$O_1$-D | $T_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D-$O_2$-D | $T_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D-$O_1$-$O_2$-D | $T_3$ | 23 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D-$O_3$-D | $T_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D-$O_1$-$O_3$-D | $T_5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D-$O_2$-$O_3$-D | $T_6$ | 0 | 7 | 19 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D-$O_1$-$O_2$-$O_3$-D | $T_7$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D-$O_3$-$O_4$-D | $T_8$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D-$O_4$-D | $T_9$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D-$O_5$-D | $T_{10}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D-$O_4$-$O_5$-D | $T_{11}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D-$O_6$-D | $T_{12}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D-$O_5$-$O_6$-D | $T_{13}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 14 | 18 | 0 |
| D-$O_4$-$O_5$-$O_6$-D | $T_{14}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D-$O_5$-$O_7$-D | $T_{15}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D-$O_4$-$O_7$-$O_5$-D | $T_{16}$ | 0 | 0 | 0 | 17 | 0 | 0 | 15 |
| D-$O_5$-$O_7$-$O_6$-D | $T_{17}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Źródło: opracowanie własne

Odbiorca $O_2$ otrzyma zamówiony towar w dwóch dostawach. Niewykorzystana ładowność pojazdu realizującego kurs po trasie $T_6$ pozwala przełożyć do 7 palet dla odbiorcy $O_2$ z trasy $T_3$ na $T_6$. Taka zmiana rozłożenia ładunku nie spowoduje wzrostu wartości funkcji celu.

Koszt realizacji kursów po wskazanych trasach z uwzględnieniem kosztów stałych załadunku wyniesie 3300 j.p., łączne koszty stałe rozładunków – 80 j.p., a więc funkcja celu w modelu przyjmie wartość 3380.

Dla porównania:

- najwyższy koszt rozwiezienia towaru czterema trasami ($T_5$, $T_6$, $T_{14}$, $T_{17}$) wyniesie 3498 j.p., czyli o 3,5% więcej od minimum;

- najniższy koszt rozwiezienia towaru pięcioma trasami ($T_1$,$T_2$, $T_4$, $T_{13}$, $T_{16}$) wyniesie 3976 j.p., czyli około 17,6% więcej;
- gdyby do każdego odbiorcy wykonano oddzielny kurs (po trasach $T_1$, $T_2$, $T_4$, $T_9$, $T_{10}$, $T_{12}$ i $T_{15}$), to suma rozważanych kosztów wyniosła by 5264 j.p., czyli ponad 55% więcej.

Porównanie to wyraźnie wskazuje, że możliwość realizacji łącznych dostaw do wielu odbiorców i w konsekwencji ograniczenie liczby kursów, pozwala, nawet znacznie, obniżać koszty. Warto nadmienić, że różnych wariantów rozwiezienia towaru czterema trasami przy minimalnej liczbie rozładunków jest w przykładzie 12. W niektórych z tych wariantów liczba rozładunków wynosi 8, a w innych 9.

O tym, że w rozwiązaniu optymalnym występuje minimalna liczba kursów decydują koszty transportu, które są dominującym składnikiem funkcji celu. Koszty stałe rozładunku są wielokrotnie mniejsze i pozwalają „doprecyzować” rozwiązanie.

W kolejnych cyklach transportowych może się zmieniać wielkość popytu zgłaszanego przez odbiorców, a to może powodować zmianę rozwiązania optymalnego, czyli inny wybór tras dostaw.

## PODSUMOWANIE

Przedstawiono w pracy pewien problem decyzyjny dotyczący wyboru tras dostaw oraz model matematyczny, który pozwala znajdować rozwiązania optymalne tego problemu. Model należy do klasy zadań programowania mieszanego liniowego (PML), gdyż występują w nim zmienne ciągłe i zmienne binarne, natomiast wszystkie relacje pomiędzy nimi są liniowe (zobacz np. [Ignasiak E. i in. 1996, s. 92-111]).

Uniwersalną metodą rozwiązywania takich zadań jest metoda podziału i ograniczeń i pomocniczo algorytm simpleks. Uzyskanie optymalnego rozwiązania tą drogą, przy dużej liczbie odbiorców i potencjalnych tras dostaw, może być uciążliwe. Jeżeli będzie I tras oraz J odbiorców, to w modelu będzie I*J zmiennych ciągłych, I*(J+1) zmiennych binarnych oraz (2*I*J+I+J) warunków ograniczających (2)-(5).

Jeżeli zbiór odbiorców można podzielić na rozłączne części z wytyczonymi innymi trasami dostaw, to całe zadanie będzie można rozłożyć na kilka mniejszych niezależnych zadań, które łatwiej rozwiązać. W przedstawionym przykładzie, usunięcie odcinka bezpośrednio łączącego odbiorców $O_3$ i $O_4$ spowoduje likwidację trasy $T_8$ (D-$O_3$-$O_4$-D) i powstanie dwóch mniejszych zadań:

- rozwieźć towar do odbiorców $O_1$-$O_3$ z wykorzystaniem tras $T_1$-$T_7$,
- rozwieźć towar do odbiorców $O_4$-$O_7$ z wykorzystaniem tras $T_9$-$T_{17}$.

Przedstawiony problem decyzyjny zawierał wiele założeń. Tworzenie modeli dla problemów ogólniejszych, w których pomija się niektóre z tych założeń, stanowi przedmiot dalszych badań.

## BIBLIOGRAFIA

Campbell A. M., Wilson J. H. (2014) Forty Years of Periodic Vehicle Routing, Networks, Vol. 63(1), s. 2-15.

Cuervo D. P., Goos P., Sörensen K., Arráiz E. (2014) An Iterated Local Search Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Backhauls, European Journal of Operational Research, Vol. 237, s. 454-464.

Goetschalckx M. (2011) Supply Chain Engineering, International Series in Operations Research & Management Science, Vol. 161, Springer New York.

Griffis S. E., Bell J. E., Closs D. J. (2012) Metaheuristics in Logistics and Supply Chain Management, Journal of Business Logistics, Vol. 33(2), s. 90-106.

Guerrero W. J., Prodhon C., Velasco N., Amaya C. A. (2013) Hybrid Heuristic for the Inventory Location-Routing Problem with Deterministic Demand, International Journal of Production Economics, Vol. 146, s. 359-370.

Ignasiak E., Borucki W., Marcinkowski J., Sikora W. (1996) Badania operacyjne, PWE, Warszawa.

Letchford A. N., Nasiri S. D., Oukil A. (2014) Pricing Routines for Vehicle Routing with Time Windows on Road Networks, Computers & Operations Research, Vol. 51, s. 331-337.

Rais A., Alvelos F., Carvalho M. S. (2014) New Mixed Integer-Programming Model for the Pickup-and-Delivery Problem with Transshipment, European Journal of Operational Research, Vol. 235, s. 530-539.

Xing Y., Li L., Bi Z., Wilamowska-Korsak M., Zhang L. (2013) Operations Research (OR) in Service Industries: A Comprehensive Review, Systems Research and Behavioral Science, Vol. 30, s. 300-353.

## APPLICATION OF MATHEMATICAL PROGRAMMING TO THE CHOICE OF DELIVERY ROUTES IN THE DISTRIBUTION NETWORK

**Abstract:** The subject of article is within the scope of the distribution logistics and relates to transportation planning. For the given distribution network it is possible to appoint the set of cost-effective delivery routes. The decision problem comes down to such a choice of routes from this set to minimize transport, loading and unloading costs. The mathematical programming is proposed for finding an optimal solution of the problem. In the paper a linear mathematical model of the problem is presented. The model includes both real variables and binary variables.

**Keywords**: distribution network, transport planning, optimization, linear programming