

## ESTYMACJA MIARY MARTYNGAŁOWEJ NA PODSTAWIE CEN OPCJI Z GIEŁDY PAPIERÓW WARTOŚCIOWYCH W WARSZAWIE

**Paweł Kliber**

Katedra Ekonomii Matematycznej, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu  
e-mail: p.kliber@ue.poznan.pl

**Streszczenie:** W artykule prezentujemy zastosowanie szacowania miary martyngałowej dla indeksu WIG20 z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Miarę martyngałową szacujemy na podstawie cen opcji na ten indeks. Przyjmujemy, że miara martyngałowa jest mieszaniną rozkładów logarytmiczno-normalnych, a parametry rozkładu szacujemy minimalizując sumę kwadratów błędów wyceny. Otrzymane wyniki porównujemy z modelem zakładającym rozkład logarytmiczno-normalny. Jak przykład rozważamy zmiany miary martyngałowej na początku marca 2014 r., po rozpoczęciu kryzysu na Krymie.

**Słowa kluczowe:** wycena martyngałowa, rozkład prawdopodobieństwa implikowany przez ceny opcji, awersja do ryzyka, realna miara probabilistyczna, wykrywanie wydarzeń

### WPROWADZENIE

Jedną z podstawowych reguł nowoczesnej teorii finansów jest zasada wyceny martyngałowej<sup>1</sup>. Zgodnie z tą zasadą cena dowolnego instrumentu finansowego jest równa wartości oczekiwanej zdyskontowanych przepływów związanych z tym instrumentem, przy czym wartość oczekiwana jest wyznaczana nie na podstawie rzeczywistych prawdopodobieństw, ale przy przyjęciu pewnej sztucznie wprowadzonej miary probabilistycznej, nazywanej miarą martyngałową. Miara ta to rozkład prawdopodobieństwa, który przyjmowałby hipotetyczny

---

<sup>1</sup> Patrz np. Musiela, M., Rutkowski, M. (2008) *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer lub Pliska, S.R. (2005) *Wprowadzenie do matematyki finansowej. Modele z czasem dyskretnym*, WNT, Warszawa.

inwestor pozbawiony awersji do ryzyka, przy założeniu, że jego wycena instrumentów finansowych byłaby zgodna z obserwowaną wyceną rynkową – dlatego określa się ją także jako „miarę neutralną względem ryzyka” (ang. *risk-neutral measure*). Na rynku mamy zatem do czynienia z dwoma różnymi miarami probabilistycznymi: miarą rzeczywistą  $P$ , opisującą rzeczywiste prawdopodobieństwa różnych poziomów cen oraz miarą martyngałową  $Q$ , zawierającą informacje na temat wyceny rynkowej. Ta druga miara zawiera informacje o oczekiwaniach rynków, co do przyszłego rozwoju sytuacji, oraz o awersji inwestorów wobec ryzyka. Gęstość miary martyngałowej względem miary rzeczywistej nazywana jest rynkową ceną ryzyka<sup>2</sup> i określa niechęć inwestorów do ryzyka w możliwych przyszłych stanach świata.

W pracy [Breedon, Litzenberg 1978] zauważono, że miarę martyngałową dla dowolnego, przyszłego momentu  $T$  można wyznaczyć na podstawie opcji europejskich, których terminem wykonania jest  $T$ , jeżeli istnieje odpowiednio dużo opcji o różnej cenie wykonania. W teoretycznym przypadku, jeżeli istnieje nieskończenie wiele opcji (kupna lub sprzedaży) z dowolną ceną wykonania, gęstość miary martyngałowej można otrzymać jako drugą pochodną funkcji ceny opcji w zależności od ceny wykonania. W praktyce opcji jest jednak skończenie wiele, skąd pojawiła się konieczność opracowania innych metod wyznaczania miary martyngałowej, których przegląd można znaleźć w opracowaniu [Bahra 1997].

Oszacowania miary martyngałowej mają dwa podstawowe zastosowania. Pierwszym jest wykrywanie możliwości arbitrażu, na co zwrócono uwagę już w [Breedon, Litzenberg 1978]. Jeśli przy aktualnych cenach rynkowych nie można znaleźć gęstości miary martyngałowej – prawdopodobieństwa pewnych stanów świata są ujemne – oznacza to, że opcje o różnych cenach wykonania są niepoprawnie wycenione. Możliwe jest wówczas stworzenie strategii opcyjnej (portfela złożonego z trzech opcji kupna, taka strategia nazywana jest *spreadem motyla*<sup>3</sup>) pozwalającej na wykorzystanie możliwości arbitrażu.

Oprócz tego oszacowania takie stosowane są w analizie zdarzeń rynkowych i wykrywaniu oczekiwań rynków. W [Bahra 1997] przedstawiono kilka propozycji wykorzystania tego podejścia przez władze monetarne (m.in. do oceny oczekiwań skuteczności polityki pieniężnej i oczekiwań inflacyjnych). W artykule [Jackwerth, Rubinstein 1996] przedstawiono pewną metodę szacowania miary martyngałowej na podstawie cen opcji na indeks S&P 500. Jak stwierdzono, po kryzysie giełdowym z października 1987 roku martyngałowe prawdopodobieństwa dużych spadków wartości indeksu są wielokrotnie większe niż odpowiednie prawdopodobieństwa w mierze rzeczywistej, wyznaczone przy założeniu normalności stóp zwrotu, co dowodzi zmiany oczekiwań. Kryzys ten badano także

<sup>2</sup> Patrz np. Bjork, T. (2009) *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press.

<sup>3</sup> Patrz np. Hull, J. (2009) *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, s. 225.

w [Bates 1991]. W artykule [Melick, Thomas 1997] zastosowano analizowano zmiany oczekiwania na rynku ropy naftowej po wojnie w Zatoce Perskiej w roku 1990. Autorzy wykazali, że po wojnie rozkład martyngałowy zmienił kształt i pojawił się w nim gruby prawy ogon. Problem analizy rynku ropy naftowej był następnie podejmowany w pracach [Sadorsky 2001] i [Gagnon, Power 2013]. W pracy [Mandler 2002] porównano kształt rozkładu w tygodniach, w których odbywały się zebrania Rady Prezesów Europejskiego Banku Centralnego z rozkładem martyngałowym w tygodniach bez zebrań i wykazano istotne różnice między tymi rozkładami. Zmiany miary martyngałowej, wyznaczonej na podstawie opcji na kontrakty futures LIFFE-Euribor charakteryzowały się dużą różnorodnością i nie zdołano uzyskać jednoznacznych rezultatów. Natomiast w pracy [Birru, Figlewski 2012] oszacowania rozkładów prawdopodobieństwa wykorzystano do analizy kryzysu finansowego 2008 roku. W pracy [Wang 2009] zastosowano oszacowania miary martyngałowej dla indeksu FTSE 100 przy założeniu, że proces stochastyczny opisujący wartość indeksu posiada skoki i pokazano, że zdolność predykcyjna modelu takiego modelu jest lepsza. W artykule [Ait-Sahalia, Jacod 2009] zaproponowano metodę wykrywania skoków w procesie cen akcji opartą na szacowaniu miary martyngałowej na podstawie cen opcji.

W pracy [Chabi-Yo, Garcia, Renault 2008] wykorzystali przekształcenia miar martyngałowych do próby wyjaśnienia zagadki nadmiernej premii za ryzyko<sup>4</sup>. W artykule [Ziegler 2007] podjęto próbę wyjaśnienia tzw. „uśmiechu zmienności” (ang. *volatility smile*), przyjmując, że może on być wywołany przez agregację miar martyngałowych inwestorów o różnych oczekiwaniach.

W pracach [Liu et al. 2007], [de Vincent-Humphereys, Noss 2012] oraz [de Vincent-Humphereys, Puigvert 2012] podjęto próbę powiązania miary martyngałowej z miarą rzeczywistą. Zwrócono uwagę, że miara martyngałowa, oszacowana na podstawie cen opcji, może stanowić uzupełnienie prognoz tworzonych na podstawie danych historycznych, jeśli uda się znaleźć odpowiednią transformację od prawdopodobieństw martyngałowych do prawdopodobieństw rzeczywistych. Jako taką transformację proponowano m.in. funkcję rozkładu beta, uogólnione rozkłady beta oraz przekształcenia oparte na funkcji użyteczności ze stałą awersją do ryzyka.

W artykule podejmujemy próbę oszacowania miar martyngałowych dla zdarzeń na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie na podstawie opcji na indeks WIG20. Zastosowanie standardowych metod na rynku polskim związane jest z poważnymi problemami, ponieważ opcje znajdujące się w obrocie na GPW są mało płynne. W związku z tym do szacowania rozkładu martyngałowego należy stosować podejście parametryczne z małą liczbą parametrów. Oszacowane

---

<sup>4</sup> Patrz Mehra, R., Prescott, E.C. (1985) The Equity Premium: A Puzzle, *Journal of Monetary Economics*, vol. 15, ss. 145-161.

rozkłady można następnie porównywać z rozkładem martyngałowym otrzymanym z modelu Blacka-Scholesa, podobnie jak robiono to w [Melick, Thomas 1997] i [Mandler 2002], i wnioskować stąd o zmianach oczekiwań inwestorów i ich skłonności do akceptacji ryzyka w odpowiedzi na pewne wydarzenia rynkowe.

## ESTYMACJA MIARY MARTYNGAŁOWEJ NA PODSTAWIE CEN OPCJI EUROPEJSKICH

Rozważmy europejską opcję kupna z terminem wykonania  $T$  i ceną wykonania  $K$ . Zgodnie z zasadą wyceny martyngałowej cena tej opcji w chwili 0 wynosi

$$c(K, T) = e^{-rT} E^Q \left[ (S_T - K)^+ \right], \quad (1)$$

gdzie  $S_T$  to cena instrumentu, na który opcja jest wystawiona,  $Q$  to miara martyngałowa, a  $r$  jest stopą zwrotu wolną od ryzyka. Należy podkreślić, że  $Q$  związana jest z konkretnym momentem wykonania  $T$  - określa rozkład cen instrumentu  $S$  w tym właśnie momencie. Zakładając, że rozkład ten jest ciągły, oznaczmy jego gęstość przez  $q_T(x)$ . Wzór (1) można zatem zapisać w postaci

$$c(K, T) = e^{-rT} \int_K^{+\infty} (x - K) q_T(x) dx. \quad (2)$$

Podobnie, cenę opcji sprzedaży z ceną wykonania  $K$  możemy wyrazić następującym wzorem:

$$p(K, T) = e^{-rT} \int_0^K (K - x) q_T(x) dx. \quad (3)$$

Różniczkując dwukrotnie obie strony równania (2) względem  $K$  otrzymujemy

$$q_T(x) = e^{rT} \frac{\partial^2 c(K, T)}{\partial K^2} \quad (4)$$

Podobnie, z równania (3) można otrzymać następującą zależność

$$q_T(x) = e^{rT} \frac{\partial^2 p(K, T)}{\partial K^2}. \quad (5)$$

Zatem jeśli posiada się obserwacje cen opcji (kupna lub sprzedaży) przy wszystkich możliwych cenach wykonania, można wyznaczyć rozkład martyngałowy. W praktyce jest to oczywiście niemożliwe – notowanych jest jedynie kilka opcji na dany instrument z różnymi cenami wykonania.

Gęstość miary martyngałowej można jednak oszacować na podstawie obserwowanych cen opcji, przyjmując odpowiednie założenia, co do postaci tej gęstości. Przegląd stosowanych metod można znaleźć w [Aparicio, Hodges 1998] oraz [Fusai, Roncoroni 2008]. Poniżej przedstawiamy krótką charakterystykę różnych podejść.

1. Podejście nieparametryczne, oparte na regresji kernelowej, zostało zaproponowane w [Aït-Sahalia, Lo 1998]. Wymaga ono jednak odpowiednio dużej liczby obserwacji. W warunkach polskich, gdzie rynek opcyjny jest mało płynny, tej metody nie można zastosować.
2. Podejście oparte na dopasowywaniu zmienności w modelu. W pracach [Rubinstein 1994], [Jackwerth, Rubinstein 1996], [Jackwerth 1999] zastosowano w tym celu implikowane drzewa dwumianowe. Natomiast w artykułach [Durpie 1994] i [Derma, Kani 1994] wykorzystano „uśmiech zmienności”. W obu tych podejściach przyjmuje się pewne założenia co do przyszłych zmienności instrumentu podstawowego, aby otrzymać w modelu obserwowane na rynku ceny opcji.
3. Podejście oparte na przyjęciu modelu dyfuzji ze skokami do opisu zmian cen instrumentu podstawowego zostało przedstawione w artykułach [Hull, White 1987], [Heston 1993], [Bates 1991], [Wang 2009]. Głównym problemem w tym podejściu jest brak wzorów analitycznych na cenę opcji w modelu dyfuzji ze skokami. Opcje są wyceniane numerycznie, co znacznie wydłuża czas obliczeń.
4. W pracach [Shimko 1993], [Dumas, et al. 1998] przyjęto pewną sparametryzowaną postać powierzchni zmienności (wyrażającej zmienność implikowaną w zależności od ceny wykonania i terminu wykonania). Na podstawie oszacowanej powierzchni zmienności wyznaczono miarę martyngałową, korzystając z wzorów (4) i (5).
5. W artykułach [Melick, Thomas 1997] i [Söderlind, Svensson 1997] zastosowano parametryczną postać funkcji gęstości miary martyngałowej, a następnie szacowano parametry minimalizując różnice między teoretycznymi i obserwowanymi cenami opcji.

W obliczeniach w tym artykule przyjmiemy to ostatnie podejście. Podobnie, jak w [Melick, Thomas 1997] przyjmujemy, że martyngałowy rozkład prawdopodobieństwa cen instrumentu bazowego w chwili wykonania jest mieszaniną rozkładów logarytmiczno-normalnych. Gęstość rozkładu ma zatem postać:

$$q_T(x) = \sum_{i=1}^k w_i f(x, \mu_i, \sigma_i), \quad (6)$$

gdzie wagi  $w_i > 0$  sumują się do jedności ( $\sum_{i=1}^k w_i = 1$ ), zaś  $f(x, \mu, \sigma)$  to gęstość rozkładu logarytmiczno-normalnego z parametrami  $\mu$  i  $\sigma$ :

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 T} \left(\ln x - \ln S_0 - \mu T + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)^2\right) \quad (7)$$

Ceny opcji w takim modelu są średnimi ważonymi cen wyznaczonych na podstawie wzoru Blacka-Scholesa. Ceny opcji kupna wynoszą

$$c(K, T) = e^{-rT} \sum_{i=1}^k w_i \left[ S_0 e^{\left(\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T} N(d_{1i}) - KN(d_{2i}) \right], \quad (8)$$

gdzie  $S_0$  jest obecną ceną instrumentu podstawowego,  $N(\cdot)$  to funkcja dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego, a współczynniki  $d_{1i}$  oraz  $d_{2i}$  są równe<sup>5</sup>

$$d_{1i} = \frac{\ln S_0 - \ln K + \left(\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T}{\sigma_i \sqrt{T}}, \quad (9)$$

$$d_{2i} = \frac{\ln S_0 - \ln K + \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T}{\sigma_i \sqrt{T}}. \quad (10)$$

Natomiast cena opcji sprzedaży jest równa

$$p(K, T) = e^{-rT} \sum_{i=1}^k w_i \left[ KN(-d_{2i}) - S_0 e^{\left(\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T} N(-d_{1i}) \right]. \quad (11)$$

Ze wzoru (8), podstawiając  $K = 0$ , można też otrzymać cenę terminową (*futures*) instrumentu podstawowego która wynosi

$$U_T = e^{-rT} \sum_{i=1}^k w_i S_0 e^{\left(\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T} \quad (12)$$

Oszacowanie miary martyngałowej polega na wyznaczeniu odpowiednich wartości parametrów  $\mu_i$ ,  $\sigma_i$ ,  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Dla mieszaniny  $k$  rozkładów logarytmicznych należy oszacować  $3k - 1$  parametrów.

Współczynniki modelu można kalibrować minimalizując sumy kwadratów odchyłeń między teoretycznymi i obserwowanymi cenami opcji. Załóżmy, że dysponujemy obserwacjami  $n$  cen opcji kupna  $c_1, c_2, \dots, c_n$  o cenach wykonania  $K_1, K_2, \dots, K_n$  i  $m$  cen opcji sprzedaży  $p_1, p_2, \dots, p_m$  o cenach wykonania  $H_1, H_2, \dots, H_m$ , a wszystkie opcje mają ten sam termin wykonania  $T$ . Wektor

<sup>5</sup> Jak można zauważyć, wzory te różnią się od standardowej wersji – w liczniku brak jest parametru  $r$  (stopy wolnej od ryzyka). Jest to spowodowane tym, że we wzorze Blacka-Scholesa parametry dryfu ( $\mu$ ) i dyfuzji ( $\sigma$ ) są wyznaczone w mierze rzeczywistej, natomiast tutaj są to parametry miary martyngałowej.

parametrów  $\theta = (\mu_1, \dots, \mu_k, \sigma_1, \dots, \sigma_k, w_1, \dots, w_k)$  dobieramy rozwiązując następujące zadanie optymalizacji nieliniowej

$$\min_{\theta} \left[ \sum_{i=1}^n (c_i - c(K_i, T))^2 + \sum_{i=1}^m (p_i - p(H_i, T))^2 + (U_T - e^{-rT} S_0) \right], \quad (13)$$

pod warunkiem, że

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k > 0 \text{ oraz } w_1, w_2, \dots, w_k \geq 0, \sum_{i=1}^k w_i = 1. \quad (14)$$

## DANE I PROCEDURA OBLICZENIOWA

Do estymacji rozkładu prawdopodobieństwa miary martyngałowej na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie posłużyliśmy się danymi dotyczącymi cen opcji na indeks WIG20. Notowania cen opcji oraz wartości indeksu zaczerpnęliśmy z bazy danych EIKON Thomson Reuters. Oszacowania przeprowadzaliśmy dla czterech momentów, odpowiadających terminom zapadalności czterech serii opcji: 21 marca 2014, 20 czerwca 2014, 19 września 2014 i 19 grudnia 2014 r. Dla każdej serii notowano opcje o różnych cenach wykonania, przy czym ceny wykonania dla opcji kupna i sprzedaży były zawsze takie same. Dla serii o terminie wykonania 21 marca 2014 oraz 20 czerwca 2014 r. notowano opcje o cenach wykonania: 1800, 1900, 2000, 2100, 2200, 2300, 2400, 2500, 2600, 2700, 2800, 2900, 3000. Dla serii o terminie wykonania 19 września 2014 r. ceny wykonania były następujące: 2000, 2100, 2200, 2300, 2400, 2500, 2600, 2700, 2800, 2900, 3000. Dla serii o terminie wykonania 19 grudnia 2014 r. ceny wykonania to: 2000, 2100, 2200, 2300, 2400, 2500, 2600, 2700, 2800, 2900.

Rynek opcji w badanym okresie nie był bardzo płynny. W przypadku każdej serii istniały dni sesyjne, w których nie odbywały się żadne transakcje na opcje z tej serii. Na ogół bardziej płynne były tańsze opcje „nie w cenie” (*out-of-the-money*), przy czym opcje najtańsze charakteryzowały się największą płynnością. W przypadku opcji kupna były to zatem opcje z wyższą ceną wykonania, a w przypadku opcji sprzedaży – z niższą ceną wykonania. Na ogół bardziej płynne były opcje o krótszym terminie wykonania (a więc z wcześniejszych serii). W przypadku braku transakcji GPW jako cenę zamknięcia podaje cenę wyznaczoną na podstawie wzoru Blacka-Scholesa. Uwzględniając te notowania przy szacowaniu miary martyngałowej, otrzymalibyśmy oszacowania obciążone w kierunku rozkładu logarytmiczno-normalnego, co obniżyłoby moc testów stosowanych do sprawdzania, czy rozkłady martyngałowe stóp zwrotu różnią się istotnie od rozkładu normalnego. Dlatego do oszacowania miary martyngałowej w każdym dniu uwzględnialiśmy jedynie notowania opcji, którymi w danym dniu handlowano.

Z uwagi na niską płynność i małą liczbę opcji podlegających obrotowi, musieliśmy przyjąć rozkład o małej liczbie parametrów. Przyjęliśmy podejście opisane w [Melick, Thomas 1997], zgodnie z którym miara martyngałowa jest mieszaniną rozkładów logarytmiczno-normalnych. W [Melick, Thomas 1997] analizowano ceny ropy naftowej w okresie pierwszej wojny w Zatoce Perskiej i przyjęto wobec tego, że rozkład martyngałowy jest mieszaniną trzech rozkładów logarytmiczno-normalnych, które były związane z trzema oczekiwanymi przez rynek rozwiązaniami kryzysu politycznego: 1) powrotem do sytuacji sprzed kryzysu, 2) poważnym uszkodzeniem infrastruktury wydobywczej w krajach Zatoki Perskiej, 3) kontynuacją sytuacji kryzysowej.

W przypadku mieszaniny trzech rozkładów logarytmiczno-normalnych liczba parametrów do oszacowania wynosi 10. Z powodu niskiej płynności opcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie zdecydowaliśmy się na przyjęcie, że miara martyngałowa stanowi mieszaninę jedynie dwóch rozkładów logarytmiczno-normalnych. Liczba parametrów do oszacowania wynosi wówczas jedynie 7. Przyjęcie mieszaniny dwóch rozkładów ma oprócz tego naturalną interpretację ekonomiczną: inwestorzy mogą oczekiwać kontynuacji obecnego trendu lub mogą się spodziewać zakłóceń na giełdzie warszawskiej lub w całym regionie Europy Wschodniej.

Dla każdego dnia z okresu od 1 lipca 2013 r. do 19 marca 2014 r. wykonywaliśmy obliczenia dla każdej serii opcji, która była notowana w tym dniu. Miarę martyngałową szacowaliśmy na podstawie cen opcji, dla których wykonywano transakcje (dzienny wolumen obrotu był większy od zera). W przypadku, gdy liczba takich opcji była mniejsza niż 8, dla danego dnia nie wykonywaliśmy obliczeń. Tabela 1 przedstawia podstawowe informacje dotyczące próby. Jak można zauważyć, dla opcji z serii czerwcowej, wrześniowej i grudniowej nie można było przeprowadzić obliczeń w większość dni sesyjnych z powodu zbyt małej liczby opcji, na które odbywały się transakcje. Znacznie bardziej płynne były opcje z serii marcowej. Możliwe było dokonanie oszacowań dla 136 dni sesyjnych (z łącznej próby 179 dni).

Tabela 1. Informacje dotyczące uwzględnionych w badaniu serii opcji

Seria opcji (data wykonania)	Okres obserwacji	Liczba dni w próbie	Liczba dni w badaniu	Liczba aktywnych opcji (średnia)	Aktywnych opcji sprzedaży (średnia)
marcowa (21.3.2014)	1.7.2013- 19.3.2014	179	136	5,3	6,2
czerwcowe (20.12.2014)	1.7.2013- 20.3.2014	180	76	3,2	3,2
wrześniowa (19.9.2014)	23.9.2013- 20.3.2014	121	19	2,0	1,1
grudniowa (19.12.2014)	23.12.2013- 20.3.2014	58	15	1,9	1,8

Źródło: opracowanie własne



Uwagi: Do badania brano tylko „aktywne” opcje, tj. takie, dla których odbywały się transakcje w danym dniu sesyjnym. Ostatnie dwie kolumny podają, ile takich opcji (kupna i sprzedaży) przypadało średnio na dzień sesyjny w okresie obserwacji. W próbie, na podstawie której dokonywano oszacowań, uwzględniono jedynie dni sesyjne, w których liczba „aktywnych” opcji przekraczała 8.

## WYNIKI

Prawdopodobieństwa martyngałowe wyznaczaliśmy minimalizując sumę kwadratów odchyłeń cen teoretycznych od cen rynkowych, czyli rozwiązując zadanie (13)-(14). Obliczenia przeprowadzono numerycznie za pomocą funkcji przygotowanych w pakiecie R<sup>6</sup>. Dla porównania, oprócz szacowania miary martyngałowej w modelu z mieszaniną dwóch rozkładów logarytmiczno-normalnych (model ten oznaczamy literą M), wyznaczaliśmy też tę miarę przyjmując, że jej rozkład jest logarytmiczno-normalny (model ten oznaczamy literą L), czyli że spełnione są założenia modelu Blacka-Scholesa. Tabela 2 zawiera informacje na temat dopasowania obu modeli. Kolumny druga i trzecia zawierają dane dotyczące średniej wartości minimalizowanej funkcji celu (13) oraz odchylenia standardowego tej wielkości, obliczone na podstawie wszystkich dni, dla których dokonywano obliczeń. Tabela zawiera też informacje o błędzie średniokwadratowym (MSE) oraz średnim błędzie względnym (MAPE).

Tabela 2. Jakość dopasowania modelu logarytmiczno-normalnego i modelu z mieszaniną rozkładów.

Seria	Suma kwadratów odchyłeń		MSE		MAPE	
	Model L	Model M	Model L	Model M	Model L	Model M
marcowa	1700,2 (1923,9)	826,6 (1295,1)	9,98	7,07	0,31	0,40
czerwcową	8448,2 (23299,6)	4541,4 (11911,2)	24,51	18,48	0,49	0,32
wrześniowa	1360,0 (651,4)	109,9 (191,9)	12,44	3,80	0,29	0,09
grudniowa	1881,3 (2733,6)	1203,1 (2182,8)	15,46	12,66	0,09	0,04

Źródło: obliczenia własne

Tabela 3 zawiera statystyki oszacowanych parametrów dla modelu miary martyngałowej opartym na mieszaninie rozkładów logarytmiczno-normalnych. Przedstawione wartości maksymalne, minimalne, średnie i odchylenia standardowe zostały obliczone na podstawie wyników ze wszystkich dni, w który możliwe było

<sup>6</sup> R Core Team (2013) R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <http://www.R-project.org/>.

wykonanie oszacowań. Jak można zauważyć rozkład pierwszy w mieszaninie rozkładów charakteryzuje się mniejszą wartością oczekiwaną ( $\mu_1 < \mu_2$ ) i większym odchyleniem standardowym ( $\sigma_1 > \sigma_2$ ). Można go zatem zinterpretować jako oczekiwany przez inwestorów „gorszy” stan świata w przyszłości, w którym realizują się niższe stopy zwrotu przy większej zmienności. Parametr  $w_1$ , określający udział pierwszego rozkładu w mieszaninie rozkładów można zatem zinterpretować jako „współczynnik niepokoju”, oznaczający oczekiwane przez inwestorów prawdopodobieństwo realizacji tego gorszego stanu.

Tabela 3. Statystyki oszacowanych parametrów modelu M

Seria		$\mu_1$	$\mu_2$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$w_1$
marzec	Max	-0,029	5,467	0,518	0,217	0,805
	Średnia	-1,161	0,268	0,148	0,121	0,338
	Min	-24,083	-0,012	0,000	0,000	0,019
	Odch. std.	3,159	0,484	0,095	0,037	0,170
czerwiec	Max	-0,109	10,211	5,145	2,423	1,000
	Średnia	-2,071	0,878	0,526	0,367	0,504
	Min	-20,879	-2,214	0,000	0,000	0,000
	Odch. std.	3,755	1,306	0,710	0,450	0,209
wrzesień	Max	-0,108	4,627	13,668	7,051	1,000
	Średnia	-11,742	0,309	3,710	0,753	0,282
	Min	-68,533	-1,097	0,354	0,109	0,016
	Odch. std.	18,132	1,220	4,011	1,550	0,299
grudzień	Max	-0,121	2,028	9,733	7,876	1,000
	Średnia	-5,641	0,175	2,632	1,365	0,368
	Min	-35,932	-0,653	0,011	0,186	0,000
	Odch. std.	9,686	0,689	3,019	2,339	0,375

Źródło: obliczenia własne

W Tabeli 4 znajdują się charakterystyki otrzymanych rozkładów. Tabela zawiera informacje na temat wartości oczekiwanej, odchylenia standardowego, współczynnika skośności i kurtozy nadwyżkowej zarówno oszacowanych rozkładów logarytmiczno-normalnych, jak i mieszaniny takich rozkładów (model M). Tabela zawiera średnie wartości charakterystyk, a w nawiasach podano odchylenia standardowe. Jak łatwo zauważyć, stosując mieszaninę rozkładów logarytmiczno-normalnych otrzymuje się na ogół wyższe oszacowania odchylenia standardowego i kurtozy.

Tabela 4. Charakterystyki otrzymanych rozkładów

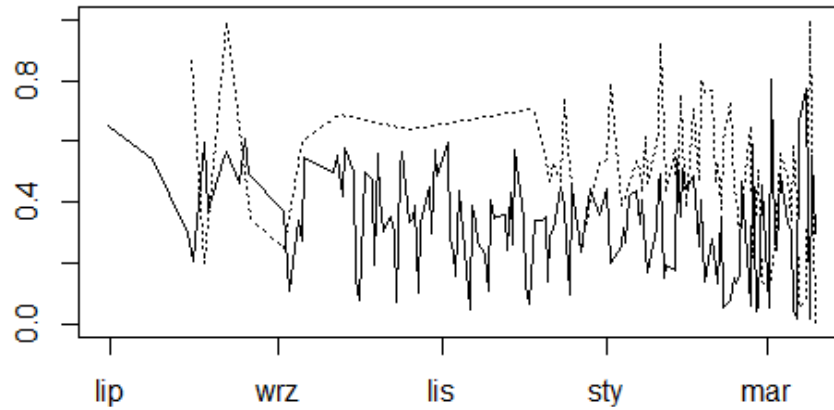
	marcowa	czerwcowe	wrześniowa	grudniowa
	Model L			
Wartość oczekiwana	2430,49 (84,29)	2356,82 (119,22)	2376,70 (70,38)	2343,88 (62,74)
Odchylenie std.	245,43 (81,22)	505,78 (274,24)	403,42 (31,58)	470,84 (18,91)
Wsp. Skośności	83,15 (48,22)	498,58 (1049,85)	208,89 (35,23)	288,37 (25,85)
Kurtoza (nadw.)	0,19 (0,11)	1,70 (6,28)	0,48 (0,09)	0,67 (0,07)
	Model M			
Wartość oczekiwana	2433,94 (85,63)	2381,45 (111,95)	2406,07 (85,64)	2355,33 (49,54)
Odchylenie std.	250,40 (82,07)	525,51 (418,20)	433,74 (43,37)	532,58 (46,62)
Wsp. Skośności	-58,67 (115,40)	940,19 (614,09)	58,33 (293,46)	1189,23 (1224,78)
Kurtoza (nadw.)	0,50 (3,23)	12,82 (99,53)	5,16 (11,79)	62,37 (81,77)

Źródło: obliczenia własne

Rysunek 1 przedstawia wartości parametru  $w_1$  dla opcji serii marcowej i czerwcowej. Największe wartości parametr ten osiąga na początku marca – po rozpoczęciu się niepokojów na Krymie (1 marca Rada Federacji Rosji wyraziła zgodę na użycie wojsk rosyjskich na Krymie, a 11 marca parlament Krymu ogłosił niepodległość). Podobnie, największe różnice między wartościami oczekiwanymi oraz między odchyleniami standardowymi rozkładów stanowiących mieszaninę, również występują na początku marca. Nie dotyczy to opcji z serii wrześniowej i grudniowej; być może z uwagi na ich małą płynność.

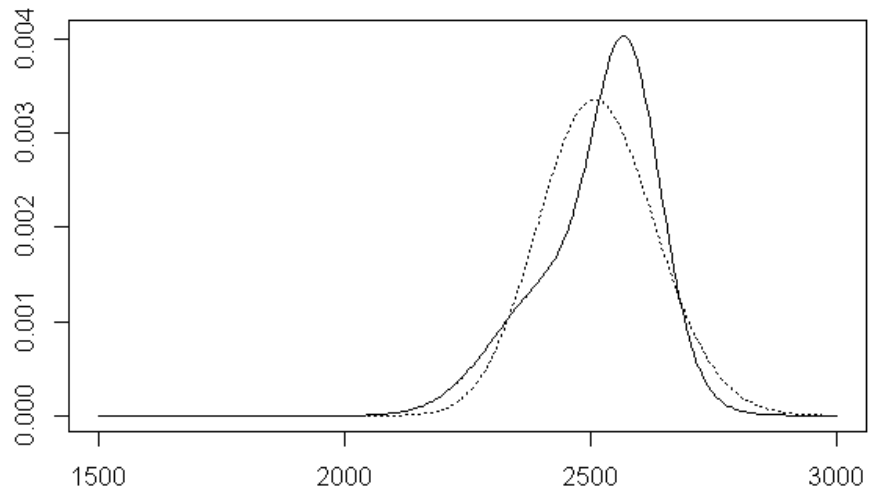
Reakcję na wydarzenia można także wykryć w momentach szacowanych rozkładów. Poniedziałek 3.3.2014 to dzień gwałtownego skoku zarówno skośności, jak i kurtozy dla marcowej serii opcji. Współczynnik skośności spadł do -552,27, a nadwyżkowa kurtoza wzrosła do 8,1, podczas gdy poprzedniego dnia sesyjnego, 28.2.2014 r. wielkości te wynosiły odpowiednio -75, 8 i 0,28, a we wcześniejszych dniach utrzymywały się na zbliżonym poziomie. Rysunki 3 i 4 przedstawiają wykresy funkcji gęstości oszacowanych rozkładów, zarówno dla modelu M, jak i dla modelu L, odpowiednio w dniach 28.3.2014 i 3.3.2014r.

Rysunek 2. Wartość parametru  $w_1$  dla opcji z serii marcowej (linia ciągła) i czerwcowej (linia przerywana)



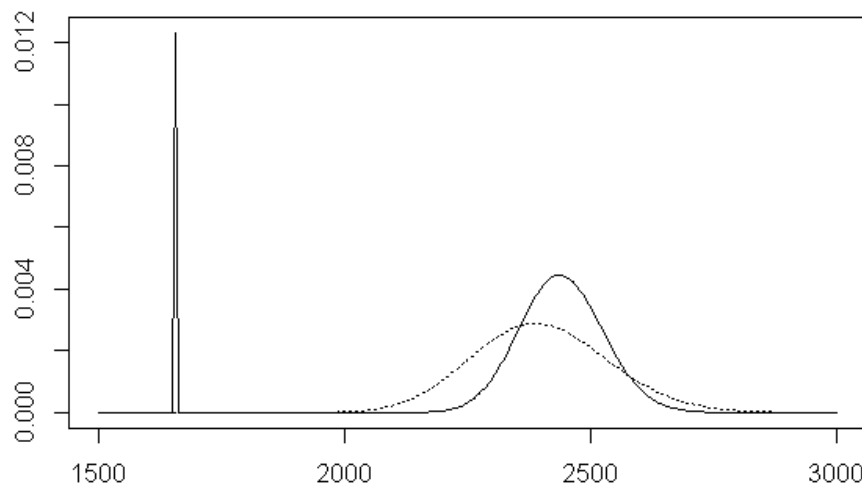
Źródło: opracowanie własne

Rysunek 3. Mieszanka rozkładów logarytmiczno-normalnych (linia ciągła) i pojedynczy (linia przerywana) rozkład logarytmiczno-normalny dla cen opcji z dnia 28.2.2014



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 4. Mieszanka rozkładów logarytmiczno-normalnych (linia ciągła) i pojedynczy rozkład logarytmiczno-normalny (linia przerywana) dla cen opcji z dnia 3.3.2014



Źródło: opracowanie własne

## WNIOSKI

W artykule oszacowaliśmy miary martyngałowe, reprezentujące rynkowe oczekiwania odnośnie przyszłych cen, na podstawie cen opcji na indeks WIG20. Rozważyliśmy dwa modele: w pierwszym z nich przyjęto rozkład logarytmiczno-normalny, a w drugim - mieszaninę dwóch takich rozkładów. Drugi z tych modeli ma oczywistą interpretację: rozkłady w mieszaninie reprezentują dwa możliwe stany świata w przyszłości, których oczekuje rynek. Parametr przedstawiający procentowy udział rozkładów w mieszaninie można wówczas interpretować jako „współczynnik niepokoju” co do przyszłego rozwoju sytuacji rynkowej.

Mimo niskiej płynności opcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie, próba oszacowania parametrów miary martyngałowej zakończyła się powodzeniem dla wielu dni sesyjnych. Należy jednak zwrócić uwagę, że dotyczy to opcji o krótkim okresie do wykonania. Opcje o dłuższym okresie są zbyt mało płynne. Próbując wykorzystać szacunki miary martyngałowej do prognozowania ekonomicznego, jak to zaproponowano to np. w [de Vincent-Humphereys, Noss 2012], należy ograniczyć się jedynie do prognoz krótkoterminowych.

Wyniki badań pokazały, że zastosowanie mieszaniny rozkładów daje zazwyczaj wyższe charakterystyki rozproszenia rozkładu (wariancję i kurtozę). Na ogół model z mieszaniną rozkładów był lepiej dopasowany do danych niż model oparty na pojedynczym rozkładzie logarytmiczno-normalnym.

## BIBLIOGRAFIA

- Aït-Sahalia, Y., Lo, A.W. (2000) Nonparametric risk management and implied risk aversion, *Journal of Econometrics*, vol. 94, ss. 9-51.
- Aït-Sahalia, Y., Jacod, J. (2009) Testing for jumps in a discretely observed process. *The Annals of Statistics*, vol. 37, ss. 184-222.
- Aparicio, S., Hodges, S. (1998) Implied risk-neutral distribution: a comparison of estimation methods, working paper, Warwick University.
- Bahra B. (1997) Implied risk-neutral probability density functions from option prices: theory and application, Bank of England Working Paper No. 66.
- Bates D.S. (1991) The crash of '87: was it expected? The evidence from option markets, *Journal of Finance*, vol. 46, ss. 1009-1044.
- Bjork, T. (2009) *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press.
- Birru, J., Figlewski, S. (2012) An anatomy of a meltdown: the risk neutral density from the S&P 500 in the fall of 2008, *Journal of Financial Markets*, vol. 15, ss. 151-180.
- Breeden, D.T., Litzenberg, L.H. (1978) Prices of state-contingent claim implicit in option prices, *Journal of Business*, vol. 51, ss. 621-651.
- Chabi-Yo, F., Garcia, R., Renault, E. (2008) State dependence can explain the risk aversion puzzle, *Review of Financial Studies*, vol. 21, ss. 973-1011.
- Derman E., Kani I. (1994) Riding on a smile, *Risk*, vol. 7, ss. 32-39.
- Dumas, B., Fleming, J., Whaley, R. (1998) Implied volatility functions: empirical test, *Journal of Finance*, vol. 53, ss. 2059-2106.
- Durpie, B. (1994) Pricing with a smile, *Risk*, vol. 7, ss. 18-20.
- Fusai G., Roncoroni, A. (2008) *Implementing Models in Quantitative Finance: Methods and Cases*, Springer.
- Gagnon, M.-H., Power, G.J. (2013) Investor risk aversion and market shocks: event studied using options on crude oil, working paper, SSRN, [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=2126343](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2126343) (dostęp: 22.3.2014).
- Heston, S. (1993) A closed-form solution for options with stochastic volatility application to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, vol. 6, ss. 327-343.
- Hull, J. (2009) *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall.
- Hull, J., White, A. (1987) The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *Journal of Finance*, vol. 42, ss. 281-300.
- Jackwerth, J. (1999) Option implied risk-neutral distributions and implied binomial trees: a literature review, *Journal of Derivatives*, vol. 7, ss. 66-82.
- Jackwerth, J., Rubinstein M. (1996) Recovering probability distributions from option prices, *Journal of Finance*, vol. 51, ss. 1611-1631.
- Liu, X., Shackleton, M.B., Taylor, S.J., Xu, X. (2007) Closed-form transformations from risk-neutral to real-world distributions, *Journal of Banking and Finance*, vol. 31, ss. 1501-1520.
- Mandler, M. (2002) Comparing risk-neutral probability density functions implied by option prices – market uncertainty and ECB-council meetings, referat prezentowany na 29<sup>th</sup> Annual Meeting of the European Finance Association, Berlin.
- Mehra, R., Prescott, E.C. (1985) The Equity Premium: A Puzzle, *Journal of Monetary Economics*, vol. 15, ss. 145-161.

- Melick, W.R., Thomas C.P. (1997) Recovering an asset's implied PDF from option prices: an application to crude oil during Gulf crisis, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 32, ss. 91-115.
- Musiela, M., Rutkowski, M. (2008) *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer.
- Pliska, S.R. (2005) *Wprowadzenie do matematyki finansowej. Modele z czasem dyskretnym*, WNT, Warszawa.
- R Core Team (2013) *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <http://www.R-project.org/>.
- Rubinstein, M. (1994) Implied binomial trees, *Journal of Finance*, vol. 49, ss. 771-818.
- Sadorsky, P. (2001) Risk factor in stock returns of Canadian oil and gas companies, *Energy Economics*, vol. 23, ss. 17-28.
- Shimko, D. (1993) Bounds of probability, *Risk*, vol. 6, ss. 33-37.
- Söderlind, P., Svensson, L. (1997) New techniques to extract market expectations from financial instruments, *Journal of Monetary Economics*, vol. 40, ss. 383-429.
- de Vincent-Humphereys, R., Puigvert, J. (2012) A quantitative mirror on the Euribor market using implied probability density functions, *Eurasian Economic Review*, vol. 2, ss. 1-31.
- de Vincent-Humphereys, R., Noss, R. (2012) Estimating probability distributions of future asset prices: empirical transformations from option-implies risk-neutral to real-world density function, *Bank of England Working Paper No. 455*.
- Wang, Y.-H. (2009). The impact of jump dynamics on the predictive power of option-implied densities. *Journal of Derivatives*, vol. 16, ss. 9-22.
- Ziegler, A. (2007). Why does implied risk aversion smile? *Review of Financial Studies*, vol. 20, ss. 859-904.

## ESTIMATION OF RISK NEUTRAL MEASURE FOR POLISH STOCK MARKET

**Abstract:** In the paper we present the usage of risk neutral measure estimation to the analysis of the index WIG20 from Polish stock market. The risk neutral measure is calculated from the prices of the options on that index. We assume that risk neutral measure is the mixture of lognormal distributions. The parameters of the distributions are estimated by minimizing the sum of squares of pricing errors. Obtained results are then compared with the model based on a single lognormal distribution. As an example we consider changes in risk neutral distribution at the beginning of March 2014, after the outbreak of political crisis in the Crimea.

**Keywords:** risk-neutral pricing, option-implied density, risk aversion, real-world measure, event study