

## MODEL DYNAMIKI RYNKU PRACY Z HETEROGENICZNĄ SIŁĄ ROBOCZĄ

**Małgorzata Wrzosek**

Instytut Ekonometrii, Szkoła Główna Handlowa  
e-mail: malgorzata.wrzosek@sgh.waw.pl

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono model dynamiki na rynku pracy w sytuacji, gdy pracownicy są heterogeniczni – różnią się produktywnością, która zależy od kwalifikacji pracownika. Prezentowany model pozwala badać przepływy na rynku pracy i ich zależność od takich czynników, jak występowanie i wysokość płacy minimalnej oraz struktura kwalifikacji pracowników. Zastosowanie układów dynamicznych do opisu zagadnienia umożliwia analizę istnienia, charakteru i stabilności równowagi na rynku pracy. Budowa modelu teoretycznego została uzupełniona symulacjami komputerowymi pozwalającymi na stawianie i weryfikowanie hipotez dotyczących dynamiki zatrudnienia i bezrobocia.

**Słowa kluczowe:** rynek pracy, modelowanie przepływów, układy dynamiczne

### WSTĘP

Wysoki poziom bezrobocia w wielu krajach, szczególnie wśród młodych ludzi wchodzących na rynek pracy powoduje, że ekonomiści wciąż zajmują się analizą procesów zachodzących na tym rynku oraz identyfikowaniem czynników kształtujących popyt na siłę roboczą. W ostatnich latach bardzo często, jako ważny czynnik wpływający w sposób szczególny na rynek pracy, wskazywany jest znaczący postęp technologiczny i wynikające z niego zapotrzebowanie na wysoko wykwalifikowanych pracowników<sup>1</sup>. Siła robocza postrzegana jest jako heterogeniczna i jest to cecha istotnie wpływająca na procesy na rynku pracy.

---

<sup>1</sup> Zjawisko to, szczególnie obserwowane i analizowane w USA oraz UK, występuje w opracowaniach pod nazwą SBTC, która jest skrótem od Skill-Biased Technological Change.

Postęp technologiczny, szczególnie w drugiej połowie XX i na początku XXI wieku jest istotnym motorem wzrostu gospodarczego. Jednak już od około 30 lat obserwowany jest także złożony wpływ postępu na rynek pracy. Z jednej strony – rosnące zapotrzebowanie na odpowiednie kwalifikacje pracowników spowodowało wzrost inwestycji w umiejętności i wykształcenie. Z drugiej strony – wysokie kwalifikacje były coraz wyżej cenione, co doprowadziło do znacznego rozwarstwienia płac. Właśnie postęp technologiczny jako przyczynę stale rosnących nierówności płacowych<sup>2</sup> wskazują [Card, DiNardo 2002] oraz [Acemoglu, Autor 2011], zaś [Acemoglu, Autor 2012] proponują inwestycje w kapitał ludzki jako sposób na redukcję tych nierówności.

Z punktu widzenia polityki rynku pracy kluczowe są dwie kwestie: jak wpływa wzrost kwalifikacji na poziom bezrobocia w grupie nisko i wysoko wykwalifikowanych pracowników oraz jak osiągnąć pożądany wzrost kwalifikacji. Analizy zależności wielkości bezrobocia od poziomu kwalifikacji siły roboczej wskazują na ogół, że wzrost poziomu kwalifikacji wpływa na ogólny spadek bezrobocia, w obydwu grupach pracowników – zarówno nisko, jak i wysoko wykwalifikowanych (por. [Moore, Ranjan 2005]). Natomiast [Weiss, Garloff 2011] proponują model, z którego wynika, że relatywny wzrost produktywności pracowników wysoko wykwalifikowanych w stosunku do nisko wykwalifikowanych powoduje wzrost bezrobocia.

Problemem dla ekonomistów pozostaje sposób oceny wysokości kwalifikacji. Jako naturalne przybliżenie miernika kwalifikacji [Katz, Margo 2008] przyjmują poziom edukacji społeczeństwa. Jednak często badania empiryczne wskazują, że edukacja i kwalifikacje nie są ekwiwalentami. Model ekonometryczny, który opisują [Altonji i in. 2012] wskazuje, że o rozbieżności płac w mniejszym stopniu decyduje poziom edukacji niż wybrany profil kształcenia.

Jako przyczyna wzrostu i utrzymywania się bezrobocia w grupie najmłodszych pracowników często wskazywane są występowanie i wysokość płacy minimalnej (por. [Meer, West 2013]). Artykuł ma na celu zaprezentowanie opracowanego przez autorkę modelu dynamiki rynku pracy uwzględniającego oddziaływanie na tę dynamikę obserwowanego poziomu kwalifikacji oraz płacy minimalnej. Wykorzystanie do tego celu układów dynamicznych wpisuje się w szeroki nurt prac analizujących rynek pracy, których autorzy zakładają, że najlepszą podstawą do zrozumienia zjawisk zachodzących na tym rynku jest wskazanie przyczyn i wielkości przepływów między grupami uczestników rynku (por. [Elsby i in. 2009],[Shimer 2012]).

---

<sup>2</sup> Wśród innych czynników mogących mieć wpływ na nierówności płacowe rozpatruje się także globalizację rynków [Moore, Ranjan 2005], jednak zjawisko to jest obserwowane znacznie krócej niż SBTC.

## MODEL DYNAMIKI RYNKU PRACY

### Opis modelu

Prezentowany model rynku pracy opisuje przepływy między trzema grupami osób: zatrudnieniem, bezrobociem i grupą nieaktywnych na rynku pracy. Stan rynku w okresie  $t$  charakteryzowany jest za pomocą punktu

$$r_t = (e_t, u_t, n_t),$$

w którym przyjęto następujące oznaczenia:

$e_t$  - wielkość zatrudnienia w okresie  $t$ ,

$u_t$  - wielkość bezrobocia w okresie  $t$ ,

$n_t$  - wielkość grupy nieaktywnych na rynku pracy w okresie  $t$ ,

gdzie  $t \in [t_0, T] \subset \mathbb{R}^+$  oraz  $e_t, u_t, n_t \in \mathbb{R}^+$ .

Zakłada się, że w każdym okresie występują przepływy w obu kierunkach między bezrobociem i zatrudnieniem oraz między bezrobociem i grupą nieaktywnych. Natomiast między zatrudnieniem i grupą nieaktywnych występują przepływy tylko w jednym kierunku – przyjmuje się, że część zatrudnionych rezygnuje z aktywności na rynku pracy i przechodzi do grupy nieaktywnych. Jednak nieaktywni, którzy chcą wrócić do aktywnego uczestnictwa w rynku pracy trafiają najpierw do bezrobocia i dopiero z tego stanu mogą przejść do zatrudnienia.

Siła robocza jest heterogeniczna, ponieważ pracownicy różnią się posiadanymi kwalifikacjami. Wśród pracowników zatrudnionych obserwuje się dwa poziomy kwalifikacji: wysoki i niski. Pracodawcy nie znają jednak kwalifikacji konkretnego pracownika przed zatrudnieniem go. Znają tylko strukturę kwalifikacji w grupie bezrobotnych. Struktura ta jest charakteryzowana parametrem  $s \in (0,1)$ , który oznacza udział osób wysoko wykwalifikowanych w bezrobociu. Przyjmuje się, że wielkość przepływu bezrobotnych w okresie  $t$  do zatrudnienia w okresie  $t+1$  jest wprost proporcjonalna do struktury kwalifikacji  $s$ . Natomiast wielkość przepływu zatrudnionych w okresie  $t$  do bezrobocia w okresie  $t+1$  jest proporcjonalna do frakcji nisko wykwalifikowanych pracowników, którzy zostali zatrudnieni w okresie poprzednim.

W modelu zakłada się, że przepływy między grupą nieaktywnych na rynku i pozostałymi grupami zależą od wielkości obowiązującej płacy minimalnej. Przepływ z grupy nieaktywnych do bezrobocia jest wprost proporcjonalny do płacy minimalnej, a wielkości przepływów z bezrobocia i zatrudnienia do grupy nieaktywnych są odwrotnie proporcjonalne do płacy minimalnej. Dla uproszczenia modelu przyjęto, że ostatnie dwa przepływy charakteryzowane są tym samym parametrem.

### Matematyczny zapis modelu dynamiki rynku pracy

Opisane powyżej zależności na rynku pracy charakteryzuje układ równań różnicowych

$$\begin{cases} e_{t+1} = \left(1 - \gamma \frac{1}{w_m}\right) e_t + \alpha s u_t - \alpha s (1-s) u_{t-1}, \\ u_{t+1} = \left(1 - \alpha s - \gamma \frac{1}{w_m}\right) u_t + \alpha s (1-s) u_{t-1} + \beta w_m n_t, \\ n_{t+1} = \gamma \frac{1}{w_m} e_t + \gamma \frac{1}{w_m} u_t + (1 + \beta w_m) n_t. \end{cases} \quad (1)$$

W modelu (1) przyjęto następujące oznaczenia:

$w_m$  – płaca minimalna,

$\alpha$  – parametr opisujący przepływ z bezrobocia do zatrudnienia, wielkość  $\alpha s$  oznacza odsetek osób bezrobotnych w okresie  $t$ , które znajdują zatrudnienie w okresie  $t+1$ ,  $\alpha$  przyjmuje wartości z przedziału  $(0,1)$ ,

$\beta$  – parametr charakteryzujący wielkość przepływu z grupy nieaktywnych na rynku do bezrobocia, wskaźnik  $\beta w_m$  oznacza część nieaktywnych w okresie  $t$ , którzy wracają na rynek pracy w okresie  $t+1$ ,  $\beta$  przyjmuje wartości z przedziału  $(0, \frac{1}{w_m})$ ,

$\gamma$  – parametr charakteryzujący przepływy z zatrudnienia oraz bezrobocia do grupy nieaktywnych na rynku, wielkość  $\gamma \frac{1}{w_m}$  oznacza frakcję zatrudnionych oraz bezrobotnych w okresie  $t$ , którzy rezygnują z aktywności na rynku pracy w okresie  $t+1$ ,  $\gamma$  przyjmuje wartości z przedziału  $(0, w_m)$ .

Zakłada się, że w każdym okresie  $t \in [t_0, T]$  zachodzi równość

$$e_t + u_t + n_t = N = const.$$

Przy powyższym założeniu układ równań (1) jest równoważny następującemu układowi

$$\begin{cases} e_{t+1} = (1 - \varphi) e_t + \alpha s u_t - \alpha s (1-s) x_t, \\ u_{t+1} = -\varepsilon e_t + (1 - \alpha s - \varphi - \varepsilon) u_t + \alpha s (1-s) x_t + \varepsilon N, \\ x_{t+1} = u_t, \end{cases} \quad (2)$$

przy czym dla uproszczenia dalszej analizy przyjęto oznaczenia:  $\varphi = \gamma \frac{1}{w_m}$ ,  $\varepsilon = \beta w_m$ . Parametry  $\varphi$ ,  $\varepsilon$  spełniają warunek  $\varphi, \varepsilon \in (0,1)$ .

Dla przyjętych zakresów zmian wartości parametrów modelu (2) zawsze istnieje jeden punkt stały układu. Zatem rynek pracy, którego dynamikę opisuje układ równań (2) w długim okresie posiada równowagę, w której wielkości zatrudnienia i bezrobocia wynoszą odpowiednio

$$\begin{cases} \bar{e} = \frac{\varepsilon \alpha s^2 N}{\varphi^2 + \alpha s^2 (\varphi + \varepsilon) + \varphi \varepsilon}, \\ \bar{u} = \frac{\varepsilon \varphi N}{\varphi^2 + \alpha s^2 (\varphi + \varepsilon) + \varphi \varepsilon}. \end{cases} \quad (3)$$

Postać analityczna punktu równowagi wskazuje, że zarówno poziom zatrudnienia, jak i bezrobocia w równowadze zależą od struktury kwalifikacji i od płacy minimalnej.

### WYNIKI SYMULACJI DYNAMIKI RYNKU PRACY

Dla zbudowanego modelu dynamiki rynku pracy zostały przeprowadzone symulacje komputerowe. Graficzna ilustracja zmian wielkości zatrudnienia i bezrobocia nie tylko pozwala obserwować wpływ poszczególnych parametrów modelu na charakter dynamiki rynku, ale umożliwia także stawianie i weryfikowanie hipotez dotyczących badanych zależności. Szczególnie istotna jest ocena wpływu struktury bezrobocia oraz płacy minimalnej na dynamikę rynku i stan równowagi. W celu oceny wpływu tych czynników na dynamikę zatrudnienia i bezrobocia wykonano serię symulacji dla różnych wartości badanego czynnika i ustalonych wartości pozostałych parametrów i punktów początkowych.

Rysunki poniżej przedstawiają różne warianty dynamiki zatrudnienia i bezrobocia w zależności od obserwowanej na rynku struktury kwalifikacji bezrobotnych, charakteryzowanej parametrem  $s$ . Wykresy pokazują 8 wariantów przebiegów wartości zmiennych dla parametru  $s$  przyjmującego kolejno wartości od 0,5 do 0,64 co 0,02. Punkt początkowy symulacji oraz wartości pozostałych parametrów są jednakowe dla wszystkich wykresów, a ich wartości prezentuje Tabela 1. Wartości te zostały dobrane tak, aby możliwe było odniesienie uzyskanych wyników do polskiego rynku pracy. Wielkości bezrobocia i zatrudnienia wyrażone są w tysiącach osób.

Tabela 1. Wartości początkowe zatrudnienia i bezrobocia oraz przyjęte parametry charakteryzujące rynek pracy, dla którego obserwowany jest wpływ struktury kwalifikacji bezrobotnych

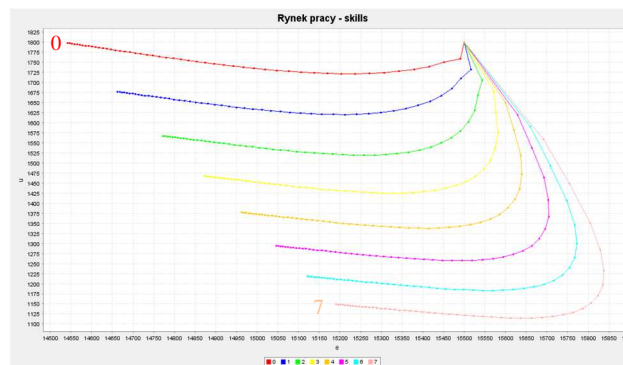
$e_0$	$u_0$	$N$	$\varphi$	$\varepsilon$	$\alpha$
15500	1800	30000	0,022	0,026	0,7

Źródło: obliczenia własne

Rysunek 1 prezentuje trajektorie wielkości zatrudnienia i bezrobocia dla różnych poziomów struktury kwalifikacji bezrobotnych. Na osi poziomej zaznaczone zostały wielkości zatrudnienia, a na osi pionowej – bezrobocia, wyrażone w tysiącach osób. Kolejne trajektorie oznaczone liczbami od 0 do 7 odpowiadają coraz większym wartościom parametru  $s$  charakteryzującego strukturę kwalifikacji. Każdy z przedstawionych tu rynków stabilizuje się na innym

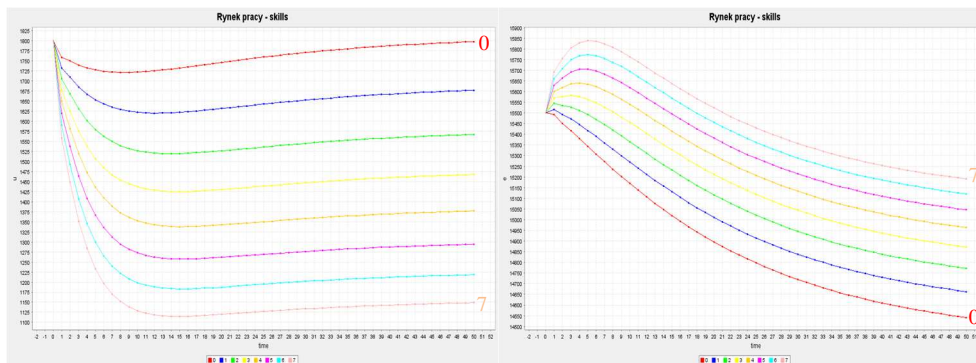
poziomie wielkości zatrudnienia i bezrobocia, przy czym im wyższy jest poziom kwalifikacji, tym wyższe jest zatrudnienie i niższe bezrobocie, do których zbiega rynek pracy. Zależność tę dokładniej ilustrują wykresy wielkości bezrobocia i zatrudnienia w kolejnych okresach, przedstawione na rysunku 2.

Rysunek 1. Trajektorie rynku pracy wyznaczone dla poziomów kwalifikacji bezrobotnych od 0,5 do 0,64



Źródło: obliczenia własne

Rysunek 2. Wielkości zatrudnienia i bezrobocia w kolejnych okresach wyznaczone dla poziomów kwalifikacji bezrobotnych od 0,5 do 0,64



Źródło: obliczenia własne

Zmiana wysokości płacy minimalnej wpływa na zmianę dwóch współczynników w modelu:  $\varphi$  oraz  $\varepsilon$ . Pierwszy maleje wraz ze wzrostem płacy minimalnej, drugi współczynnik jest wprost proporcjonalny do płacy minimalnej. Rysunki 3 i 4 ilustrują zmiany dynamiki rynku pracy w zależności od wysokości płacy minimalnej. Kolejne krzywe oznaczone numerami od 0 do 7 ilustrują zmiany dynamiki na rynku pracy przy wzroście parametru  $\varepsilon$  i spadku parametru  $\varphi$ , co odpowiada wzrostowi płacy minimalnej. Zmiany wartości parametrów  $\varphi$  oraz  $\varepsilon$  dla krzywych 0-7 można interpretować jako wzrost wysokości płacy minimalnej od

310 do 370 EUR<sup>3</sup>. Tabela 2 przedstawia wspólne dla wszystkich trajektorii wartości dla punktu początkowego oraz pozostałych parametrów modelu.

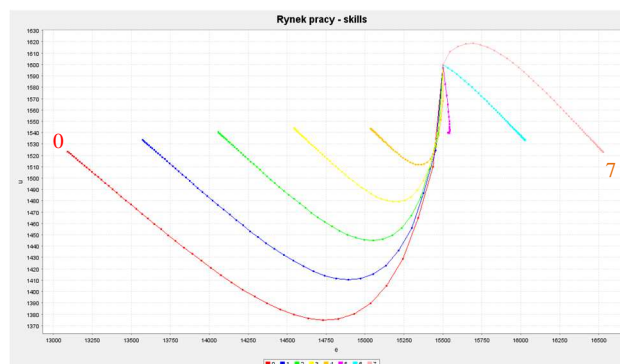
Tabela 2. Wartości początkowe zatrudnienia i bezrobocia oraz przyjęte parametry charakteryzujące rynek pracy, dla którego obserwowany jest wpływ wysokości płacy minimalnej

$e_0$	$u_0$	$N$	$A$	$s$
15500	1600	30000	0,7	0,6

Źródło: obliczenia własne

Uzyskane w wyniku symulacji trajektorie zatrudnienia i bezrobocia wskazują na wyraźny wzrost wielkości zatrudnienia wraz ze wzrostem płacy minimalnej. Natomiast wpływ płacy minimalnej na wielkość bezrobocia zmienia się w czasie – w krótkim okresie powoduje wzrost bezrobocia, ale dłuższym horyzoncie nie ma dużego wpływu na poziom bezrobocia. Rysunek 4 wskazuje, że krzywe ilustrujące dynamikę bezrobocia dla różnych poziomów płacy minimalnej nie tylko zbliżają się do siebie, ale mogą się także przecinać, co oznacza brak jednoznacznej zależności między wysokością płacy minimalnej i wielkością bezrobocia.

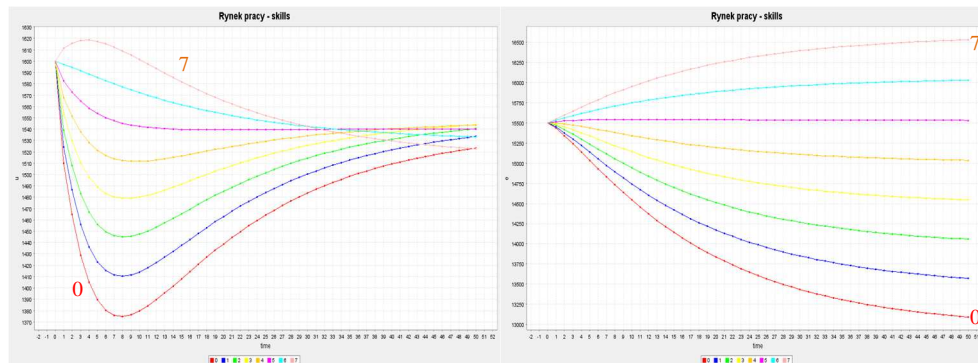
Rysunek 3. Trajektorie rynku pracy wyznaczone przy założeniu wzrostu płacy minimalnej w zakresie 310-370 EUR



Źródło: obliczenia własne

<sup>3</sup> Parametry  $\varphi$  oraz  $\varepsilon$  przyjmują wartości, odpowiednio, od 0,03 do 0,025 oraz od 0,028 do 0,033. Odpowiada to wzrostowi płacy minimalnej od poziomu około 310 EUR do około 370 EUR, przy założeniu, że wartości parametrów  $\beta$  oraz  $\gamma$  są stałe i wynoszą odpowiednio 0,00009 oraz 9,2.

Rysunek 4. Wielkości zatrudnienia i bezrobocia w kolejnych okresach wyznaczone przy założeniu wzrostu płacy minimalnej w zakresie 310-370 EUR



Źródło: obliczenia własne

## PODSUMOWANIE

Zaprezentowany w artykule model dynamiki rynku pracy pozwala na analizę wpływu poziomu kwalifikacji oraz płacy minimalnej na zmiany wielkości zatrudnienia i bezrobocia. Uwzględniona w modelu struktura kwalifikacji jest odzwierciedleniem heterogeniczności pracowników, która w sposób istotny determinuje popyt na siłę roboczą. Postać punktu równowagi oraz przeprowadzone symulacje komputerowe wskazują, że w przedstawionym modelu struktura kwalifikacji pracowników wpływa na dynamikę rynku zgodnie z oczekiwaniami – jej wzrost redukuje poziom bezrobocia i zwiększa zatrudnienie. Problemem pozostaje sposób mierzenia kwalifikacji, gdy możliwość wykorzystania do tego celu poziomu edukacji jest kwestionowana. Wydaje się, że lepszym miernikiem kwalifikacji pracowników może być wskaźnik edukacji osób dorosłych w społeczeństwie. Badanie empiryczne [Boguta i in. 2007] dowodzi, że właśnie wskaźnik edukacji dorosłych ma bardzo dużą siłę oddziaływania na poziom bezrobocia<sup>4</sup>.

Analiza oddziaływania płacy minimalnej na dynamikę rynku pracy w prezentowanym modelu wskazała, że w długim okresie wzrost płacy minimalnej wpływa dodatnio tylko na wielkość zatrudnienia, zaś bezrobocie, po początkowym okresie wzrostu, stabilizuje się na podobnym poziomie, niezależnie od zmian płacy.

<sup>4</sup> Pierwotnym celem opracowania [Boguta i in. 2007] było zbadanie wpływu poziomu edukacji na wielkość bezrobocia. Przeprowadzone badania empiryczne wykazały, że to nie edukacja szkolna, ale dalsza edukacja dorosłych jest czynnikiem wyraźnie wpływającym na bezrobocie. Innymi czynnikami istotniejszymi od poziomu edukacji okazały się m.in. dostęp do Internetu oraz nakłady na badania i rozwój.



**BIBLIOGRAFIA**

- Altonji J. G., Blom E., Meghir C. (2012) Heterogeneity in Human Capital Investments: High School Curriculum, College Major, and Careers, *Annual Review of Economics*, Annual Reviews, Tom 4, str. 185-223.
- Acemoglu D., Autor D. (2012) What Does Human Capital Do? A Review of Goldin and Katz's Race between Education and Technology, *Journal of Economic Literature*, Tom 50, str. 426-463.
- Acemoglu D., Autor D. (2011) Skills, Tasks and Technologies: Implications for Employment and Earnings, *Handbook of Labor Economics*, Tom 4, str. 1043-1171.
- Boguta M., Karbownik K., Wrzosek M. (2007) Influence of the Education on the Level of Unemployment in European Countries, *Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych SGH*, Zeszyt 17/2007, str. 101-117.
- Card D., DiNardo J. E. (2002) Skill-Biased Technological Change and Rising Wage Inequality: Some Problems and Puzzles, *Journal of Labor Economics*, Tom 20, str. 733-783.
- Elsby M. W. L., Michaels R., Solon G. (2009) The Ins and Outs of Cyclical Unemployment, *American Economic Journal: Macroeconomics*, American Economic Association, Tom 1, str. 84-110.
- Katz L. F., Margo R. A. (2013) Technical Change and the Relative Demand for Skilled Labor: The United States in Historical Perspective, NBER Working Paper Nr 18752.
- Meer J., West J. (2013) Effects of the minimum wage on employment dynamics, NBER Working Paper Nr 19262.
- Moore M. P., Ranjan P. (2005) Globalisation vs skill-biased technological change: implications for unemployment and wage inequality, *The Economic Journal*, Tom 115, str. 391 – 422.
- Shimer R. (2012) Reassessing the Ins and Outs of Unemployment, *Review of Economic Dynamics*, Elsevier for the Society for Economic Dynamics, Tom 15(2), str. 127-148.
- Weiss M., Garloff A. (2011) Skill-biased technological change and endogenous benefits: the dynamics of unemployment and wage inequality, *Applied Economics*, Tom 43, str. 811-821.

**MODEL OF THE LABOR MARKET DYNAMICS WITH  
HETEROGENEOUS LABOR FORCE**

**Abstract:** The article presents a model of the labor market dynamics with heterogeneous employment structure, e.g. involving workers with different productivity depending on qualifications. This model allows to examine labor market flows and their dependencies on factors such as the minimum wage, whether it is imposed at all, and finally the structure of workers' qualifications. Using dynamical systems to describe the issue enables the analysis of existence, type and stability of the labor market equilibrium. Construction of the theoretical model has been supplemented by computer simulations allowing for proposing and verifying hypotheses about the dynamics of employment and unemployment.

**Keywords:** labor market, modeling of flows, dynamical system