

## PROGNOZOWANIE NA PODSTAWIE SZEREGÓW CZASOWYCH O WYSOKIEJ CZĘSTOTLIWOŚCI OCZYSZCZONYCH Z SEZONOWOŚCI DLA LUK NIESYSTEMATYCZNYCH

**Maria Szmuksta – Zawadzka**

Studium Matematyki

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie  
e-mail: maria.szmuksta-zawadzka@zut.edu.pl

**Jan Zawadzki**

Katedra Zastosowań Matematyki w Ekonomii  
Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie  
e-mail: jan.zawadzki@zut.edu.pl

**Streszczenie:** W pracy przedstawione zostaną wyniki zastosowania wybranych modeli wyrównywania wykładniczego w prognozowaniu zmiennej o bardzo wysokiej częstotliwości, obserwowanej w okresach godzinnych, dla luk niesystematycznych, oczyszczonej z dwóch lub trzech rodzajów sezonowości. Rozpatrywany był wariant, w którym luki występują w każdym z rodzajów wahań składowych.

**Słowa kluczowe:** prognozowanie, dane o wysokiej częstotliwości, złożona sezonowość, wyrównywanie wykładnicze

### WPROWADZENIE

W pracy [Szmuksta-Zawadzka, Zawadzki, 2015] wykazano, że modele wyrównywania wykładniczego mogą być z powodzeniem wykorzystane w prognozowaniu zmiennej ekonomicznej ze złożonymi wahaniami sezonowanymi dla kompletnych szeregów czasowych oczyszczonej z dwóch lub trzech rodzajów sezonowości. W niniejszej pracy podjęta zostanie próba rozszerzenia rozważań na szeregi z lukami niesystematycznymi występującymi w każdym z rodzajów wahań składowych.

Prognozy dla modeli Browna i Holta buduje na podstawie szeregów z których wyeliminowano sezonowość roczną, tygodniową i godziną. Natomiast

w przypadku modeli Holta-Wintersa eliminowane są tylko wahania o cyklu rocznym i tygodniowym, ponieważ wahania o cyklu dobowym opisywane są za pomocą dodatkowego równania. W przypadku wszystkich modeli prognozy wyjściowe wyznaczane są na podstawie predyktorów dla danych oczyszczonych. Prognozy ostateczne natomiast są sumami prognoz wyjściowych i składników sezonowości (modele addytywne) lub iloczynami prognoz wyjściowych i wskaźników sezonowości (modele multiplikatywne). Modele wymienione wyżej są przystosowanymi dla danych oczyszczonych o wysokiej częstotliwości modelami znanymi w literaturze dla wahań o niezłożonej sezonowości lub dla zmiennych, w których wahania te nie występują (por. [Pawłowski 1973]; [Zeliaś, Pawełek, Wanat 2003]; [Dittman 2006]).

Zapisy analityczne modeli w postaci addytywnej i multiplikatywnej podane zostały w pracy [Szmuksta-Zawadzka, Zawadzki 2015]. Poniżej przedstawione zostaną modele w postaci multiplikatywnej. W poniższych zapisach litera „m” oznacza model multiplikatywny.

Zapis ogólny modelu multiplikatywnego ze złożoną sezonowością jest następujący :

$$Y_{t(m)} = P^{(m)}(t) \cdot M^{(m)}(t) \cdot D^{(m)}(t) \cdot G^{(m)}(t) \cdot V_{t(m)} \quad (1)$$

gdzie:

$P^{(m)}(t)$  – trend,

$M^{(m)}(t)$  – wskaźniki sezonowości o cyklu 12 miesięcznym,

$D^{(m)}(t)$  – wskaźniki sezonowości o cyklu 7 dniowym,

$G^{(m)}(t)$  – wskaźniki sezonowości o cyklu 24 godzinnym.

Oznaczając przez  $Y_{t(m)}^{***}$  zmienną prognozowaną, z której wyeliminowano wskaźniki sezonowości o cyklu rocznym, tygodniowym i dobowym można podać zapisy analityczne modeli Browna i Holta.

Równanie prostego modelu Browna (m\_B) wyraża się wzorem:

$$m_t^{***} = \alpha Y_{t(m)}^{***} + (1 - \alpha) m_{t-1}^{***}, \quad (2)$$

gdzie:  $m_t^{***}$  - operator rzędu pierwszego,

$\alpha$  - stała wygładzania ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ).

Predyktor oparty na tym modelu przyjmuje postać:

$$\Pi_{\alpha\_B}^{***} = m_{t_0}^{***}, \quad (3)$$

gdzie  $t_0$  jest okresem wyjściowym budowy prognoz.

Prognozę końcową otrzymuje się na podstawie predyktora:

$$\Pi_{m\_B} = \Pi_{m\_B}^{***} \cdot M^{(m)}(t) \cdot D^{(m)}(t) \cdot G^{(m)}(t) \quad (4)$$

Równania liniowego modelu Holta (m\_H) są następujące:

$$m_t^{***} = \alpha Y_{t(m)}^{***} + (1 - \alpha)(m_{t-1}^{***} + \delta_{1t-1}^{***}), \quad (5)$$

$$\delta_{1t}^{***} = \beta(m_t^{***} - m_{t-1}^{***}) + (1 - \beta)\delta_{1t-1}^{***}, \quad (6)$$

gdzie:  $m_t^{***}$  - operator rzędu pierwszego,

$\delta_{1t}^{***}$  - parametr kierunkowy trendu,

$\alpha$  - stała wygładzania ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ),

$\beta$  - stała wygładzania ( $0 \leq \beta \leq 1$ ).

Predyktory: wyjściowy dla horyzontu prognozy  $h=1,2,\dots$  oraz końcowy przyjmują postać:

$$\Pi_{m\_H}^{***} = m_{t_0}^{***} + \delta_{1t_0}^{***} h, \quad (8)$$

$$\Pi_{m\_H} = \Pi_{m\_H}^{***} \cdot M^{(m)}(t) \cdot D^{(m)}(t) \cdot G^{(m)}(t) \quad (9)$$

Jak wspomniano wyżej w przypadku modelu Holta-Wintersa eliminuje się dwa rodzaje wahań: o cyklu rocznym i tygodniowym. Zmienną z której wyeliminowano składniki sezonowości o cyklach wskazanych wyżej oznaczmy przez  $Y_{t(m)}^{**}$ .

Równania multiplikatywnego modelu Holta-Wintersa, opisujące wahania o cyklu dobowym o długości  $m$  są następujące:

$$m_t^{**} = \frac{\alpha Y_t^{**}}{C_{t-m}^{**}} + (1 - \alpha)(m_{t-1}^{**} + \delta_{1t-1}^{**}), \quad (10)$$

$$\delta_{1t}^{**} = \beta(m_t^{**} - m_{t-1}^{**}) + (1 - \beta)\delta_{1t-1}^{**}, \quad (11)$$

$$C_t^{**} = \frac{\delta Y_{t(m)}^{**}}{m_t^{**}} + (1 - \delta)C_{t-m}^{**}, \quad (12)$$

gdzie:  $m_t^{**}$  - operator rzędu pierwszego,

$\delta_{1t}^{**}$  - parametr kierunkowy trendu,

$C_t^{**}$  - ocena wskaźnika sezonowości,

$\alpha$  - stała wygładzania ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ),

$\beta$  - stała wygładzania ( $0 \leq \beta \leq 1$ ).

$\delta$  - stała wygładzania ( $0 \leq \delta \leq 1$ ).

Predyktor wyjściowy dla horyzontu prognozy  $h=1,2,\dots$  przyjmuje postać:

$$\Pi_{m\_HW}^{**} = m_{t_o}^* + \delta_{1t_o}^* h + C_{t_o, 1+h}^* \quad (13)$$

Prognozę końcową wyznacza się ze wzoru:

$$\Pi_{m\_HW} = \Pi_{m\_HW}^{**} \cdot M^{(m)}(t) \cdot D^{(m)}(t) \quad (14)$$

Jednym z ważnych zagadnień wymagających rozstrzygnięcia jest wybór modelu adaptacyjnego dla celów prognozowania o „optymalnych” wartościach stałych wygładzania (wyrównywania). W przypadku pełnych danych wyboru tego można dokonać posługując się jednym z dwóch kryteriów (mierników) polegających na minimalizacji:

- przeciętnych błędów względnych wartości wyrównanych obliczanych dla dostępnych danych w przedziale czasowym „próby” ( $K_{WW}$ ),
- przeciętnych względnych ocen błędów prognoz ekstrapolacyjnych obliczonych dla okresu empirycznej weryfikacji prognoz ( $K_{EX}$ ).

W przypadku szeregów z lukami w grę wchodzi także trzecie kryterium, minimalizujące przeciętne względne oceny błędów prognoz interpolacyjnych obliczonych dla podokresów, w których występowały luki ( $K_{IN}$ ).

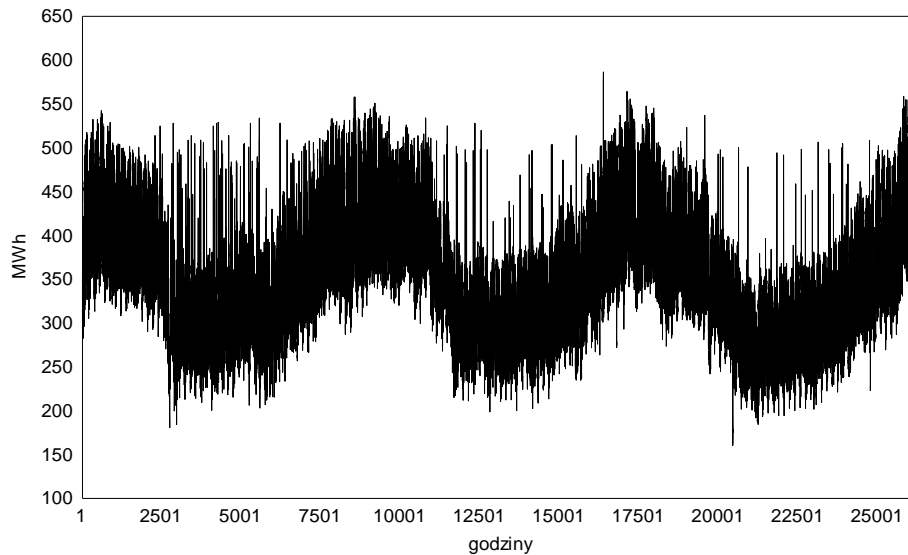
Z uwagi na to, że modele tego samego rodzaju charakteryzujące się minimalnymi ocenami mierników dla poszczególnych kryteriów dość często mogą różnić się stałymi wygładzania. Konsekwencją tego faktu będzie występowanie dość znacznych różnic błędów prognoz, zwłaszcza ekstrapolacyjnych. W związku z tym, dla każdego z mierników należy obliczyć dwa pozostałe rodzaje mierników, odnoszące bądź do wartości wyrównanych bądź i (lub) przynajmniej jeden rodzaju prognoz. Będą one oznaczone dodatkowymi indeksami. Na przykład dla kryterium  $K_{WW}$  będzie to  $K_{WW\_IN}$  i  $K_{WW\_EX}$ .

## SYNTETYCZNA CHARAKTERYSTYKA ZMIENNEJ PROGNOZOWANEJ

Modelowaniu i prognozowaniu dla luk niesystematycznych z wykorzystaniem modeli Browna, Holta i Holta-Wintersa w postaci addytywnej i multiplikatywnej poddane zostało zapotrzebowanie na moc energetyczną w aglomeracji A. Podstawą budowy prognoz wyjściowych były godzinne szeregi czasowe z których wyeliminowano dwa lub trzy rodzaje wahań sezonowych.

Kształtowanie się zmiennej prognozowanej bez luk w okresie trzech lat zostało przedstawione na rys. 1. Pierwsze dwa lata posłużą do budowy modeli i prognoz inter- i ekstrapolacyjnych a rok trzeci będzie okresem empirycznej ich weryfikacji.

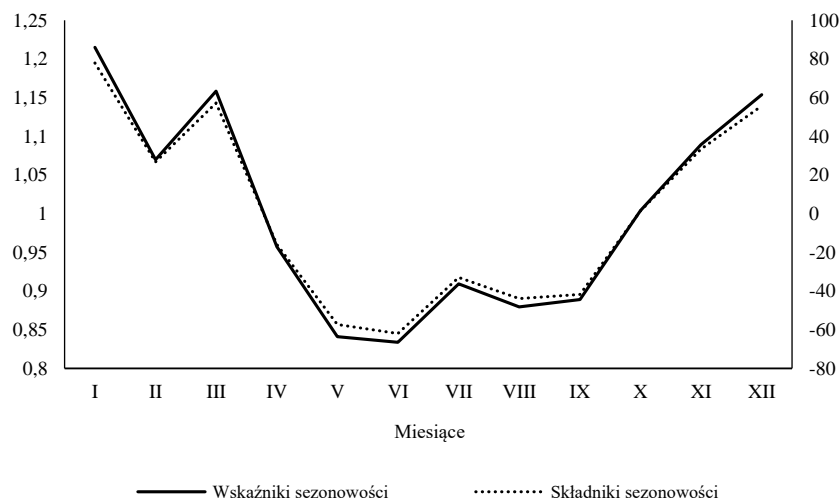
Rysunek 1. Kształtowanie się zapotrzebowania na moc energetyczną (w MWh)



Źródło: Bank Danych Katedry Zastosowań Matematyki w Ekonomii ZUT w Szczecinie

Poniżej zostaną przedstawione w sposób graficzny kształtowanie się ocen wskaźników i składników sezonowości o cyklu rocznym, tygodniowym i dobowym (rys. 2-4).

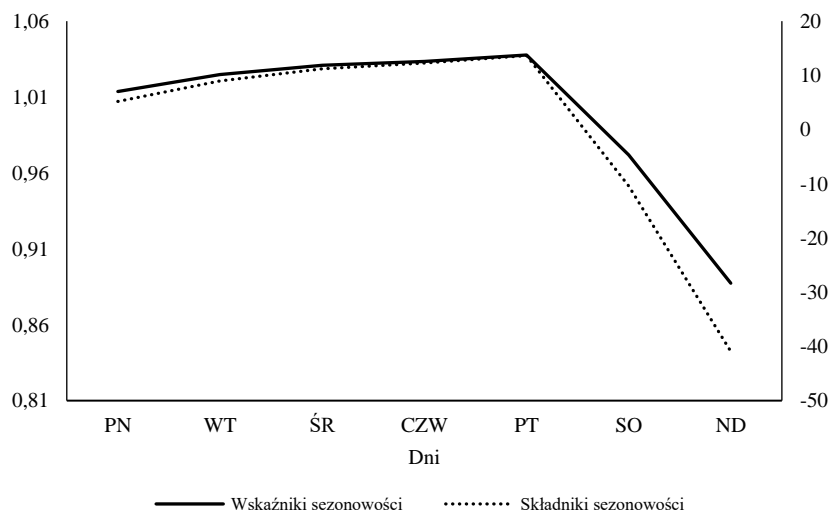
Rysunek 2. Oceny składników i wskaźników sezonowości o cyklu rocznym



Źródło: Szmuksta-Zawadzka, Zawadzki, 2015, s.152

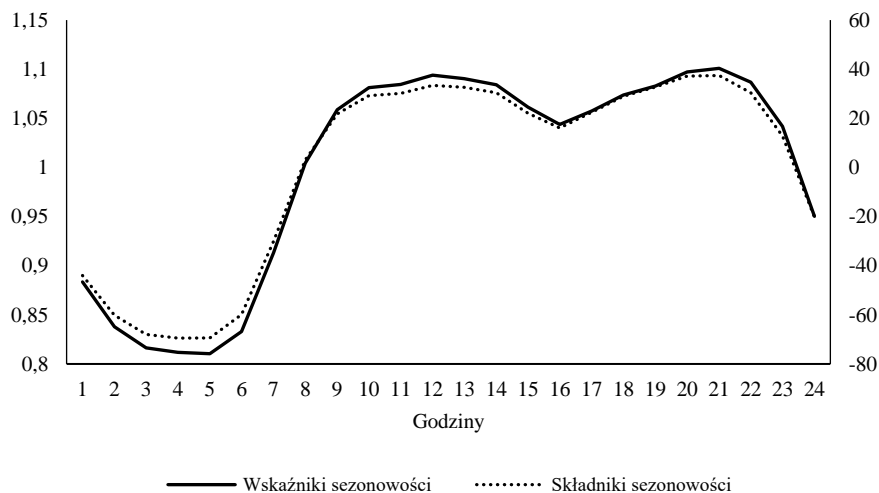
Rozstęp wskaźników sezonowości wynosił ok. 15 p.p. i był zdecydowanie niższy niż dla cyklu rocznego. Różnica skrajnych ocen składników sezonowości wynosiła ok. 55 MWh.

Rysunek 3. Oceny składników i wskaźników sezonowości o cyklu tygodniowym



Źródło: Szmuksta-Zawadzka, Zawadzki, 2015, s.153

Rysunek 4. Oceny składników i wskaźników sezonowości o cyklu 24 godzinnym



Źródło: Szmuksta-Zawadzka, Zawadzki, 2015, s.153

## WYNIKI MODELOWANIA I PROGNOZOWANIA

W modelowaniu i prognozowaniu z wykorzystaniem modeli: Browna, Holta i Holta-Wintersa zapotrzebowania na moc energetyczną w aglomeracji A wykorzystane zostały godzinne szeregi czasowe. Dla modeli Browna i Holta w postaci addytywnej i multiplikatywnej z szeregów oryginalnych zostały wyeliminowane wahania o cyklu: 12-miesięcznym, 7-dniowym i 24-godzinnym. Natomiast w przypadku modeli Holta-Wintersa, w tych samych postaciach wyeliminowano dwa pierwsze rodzaje wahań sezonowych, ponieważ wahania o cyklu dobowym będą podlegać modelowaniu i prognozowaniu adaptacyjnemu. Rozpatrywany był jeden wariant luk niesystematycznych. Przyjęto założenie, że luki występują w każdym z rodzajów wahań. Obejmowały dwa miesiące (sierpień i październik), dwa dni tygodnia (wtorek i czwartek) oraz osiem godzin (2, 6, 8, 10, 14, 16, 18 i 22), w okresie od 1 lipca roku pierwszego do 30 czerwca roku drugiego.

Liczba brakujących danych wynosiła 5272, co stanowiło 30,09% długości pełnego szeregu liczącego 17520 obserwacji. Luki w danych otrzymano przez wymazanie wskazanej wyżej liczby obserwacji z pełnego szeregu.

Do budowy prognoz na podstawie modeli Holta-Wintersa w postaci addytywnej i multiplikatywnej wykorzystane zostały szeregi czasowe oczyszczone z wahań o cyklu rocznym i tygodniowym ( $Y_t^{**}$ ). Natomiast prognozy na podstawie prostych modeli Browna i modeli Holta były budowane dla zmiennej, z której zostały wyeliminowane także wahania o cyklu 24-godzinnym ( $Y_t^{***}$ ).

W Tabeli 1 i 2 zostały zestawione błędy prognoz inter- i ekstrapolacyjnych otrzymanych na podstawie predyktorów opartych na modach Browna, Holta i Holta-Wintersa w postaci addytywnej i multiplikatywnej o stałych wygładzania charakteryzujących się minimalnymi ocenami poszczególnych kryteriów. Kolumna druga każdej tabeli zawiera skrótowe nazwy modeli poprzedzone odpowiednio: symbolem „a\_” dla modeli addytywnych oraz „m\_” dla modeli multiplikatywnych. W celach porównawczych w wierszach poniżej podane zostały wielkości odpowiednich błędów otrzymanych na podstawie takich samych modeli dla pełnych danych (bez luk). Zostały one oznaczone występującymi po nazwach modeli dolnymi indeksami „p”.

Natomiast w dwóch ostatnich wierszach, dla postaci addytywnej i multiplikatywnej, podane zostały mierniki dokładności wartości teoretycznych ( $K_{ww}$ ), prognoz ekstrapolacyjnych ( $K_{EX}$ ), a dla danych z lukami także prognoz interpolacyjnych ( $K_{IN}$ ), otrzymane na podstawie klasycznych modeli szeregu czasowego odpowiednio: z liniowym trendem i periodycznymi składnikami sezonowymi ( $a_{Kl}$ ,  $a_{Kl_p}$ ) oraz z trendem wykładniczym o stałej stopie wzrostu i relatywnie stałych waniach sezonowych ( $m_{Kl}$ ,  $m_{Kl_p}$ ).

Z analizy ocen błędów wartości wyrównanych ( $K_{ww}$ ) wynika, że najniższą jego oceną wynoszącą 4,182% charakteryzuje się predyktor oparty na multiplikatywnym modelu Browna ( $m_B$ ) o stałej wygładzania  $\alpha=0,96$ . Jest ona

tylko o 0,118 p.p. wyższa od oceny błędu dla modelu  $m_{B_p}$  dla pełnych danych i stałej wygładzania  $\alpha=0,97$ . Najwyższą oceną miernika  $K_{ww}$  wynoszącą 5,569% charakteryzował się model  $a_H$ .

Dla modelu  $m_B$  otrzymano także najniższą ocenę błędu prognoz interpolacyjnych dla tego kryterium ( $K_{ww\_IN} = 6,415\%$ ) a najwyższą (9,121%) dla modelu  $a_{HW}$  spośród pozostałych modeli.

Najniższą ocenę błędu prognoz ekstrapolacyjnych dla tego kryterium otrzymano także dla modelu  $m_B$  ( $K_{ww\_EX} = 7,617\%$ ). Natomiast oceny przekraczające 87%, otrzymano dla: addytywnego modelu Holta ( $a_B$ ) oraz obu postaci modelu Holta-Wintersa ( $a_{HW}$ ,  $m_{HW}$ ).

Podobnie wygląda sytuacja dla pełnych danych – bardzo wysokie błędy prognoz ekstrapolacyjnych ( $K_{ww\_EX}$ ), oprócz trzech wyżej wymienionych modeli, otrzymano także dla multiplikatywnego modelu Browna ( $m_{B_p}$ ).

Minimalną ocenę błędu prognoz interpolacyjnych ( $K_{IN}$ ) wynoszącą 6,361%, otrzymano także na podstawie predyktora opartego na multiplikatywnym modelu Browna ( $m_B$ ), ale dla  $\alpha=0,60$ . Dla modelu addytywnego  $a_B$  i  $\alpha=0,58$  była ona o 0,72 p.p. wyższa. Najniższą wynoszącą 8,117% charakteryzował się model  $m_{HW}$ . Oceny  $K_{IN\_ww}$  wahały się od 4,443% dla modelu  $m_B$  do 6,835%.

Dla modelu  $m_{HW}$  minimalną ocenę miernika  $K_{IN\_EX}$  wynoszącą 7,368% otrzymano dla predyktora  $m_B$ . Oceny błędów  $K_{IN\_EX}$  dla addytywnej postaci modelu Holta i obu postaci modelu Holta-Wintersa przyjmują, podobnie jak w przypadku kryterium  $K_{ww}$  wysokie wartości. Zawarte są one w przedziale od 28,656% dla modelu  $a_{HW}$  do 81,322% dla modelu  $a_H$ .

Najniższą ocenę błędu prognoz ekstrapolacyjnych ( $K_{EX}$ ) wynoszącą 7,254% otrzymano dla modelu Browna w postaci multiplikatywnej ( $m_{HW}$ ) o stałej wygładzania:  $\alpha=0,66$ . Dalszymi w kolejności z błędami wynoszącymi 7,531% i 7,536% były modele Browna o postaci addytywnej ( $a_B$ ) i Holta ( $a_H$ ) o stałej wygładzania  $\alpha=0,75$ . Dla dwóch pozostałych modeli ( $a_{HW}$  oraz  $m_H$ ) przekroczyły one 8%.

Z porównania ocen błędów dla kryterium ( $K_{EX}$ ) dla danych z lukami i pełnych danych wynika, że z wyjątkiem modeli Holta w postaci addytywnej otrzymano identyczne oceny stałych wygładzania oraz identyczne oceny błędów prognoz ekstrapolacyjnych. Oznacza to, że występowanie luk w danych nie miało wpływu na wartości i dokładność prognoz. W przypadku miernika  $K_{EX\_ww}$  jego oceny zawarte są w przedziale od 4,366% dla modelu  $a_B$  do 5,830% dla modelu  $m_{HW}$ . Minimalną ocenę wartości miernika  $K_{EX\_IN}$  otrzymano dla modelu  $m_H$  (5,516%) a maksymalną dla modelu  $a_H$  (14,043%).



Tabela 1. Oceny błędów wartości wyrównanych, prognoz interpolacyjnych i prognoz ekstrapolacyjnych dla najlepszych addytywnych modeli adaptacyjnych (w %)

Model	Oznaczenie	Wartości wyrównane (WW)						Prognozy interpolacyjne (IN)						Prognozy ekstrapolacyjne (EX)					
		Stale wygładzania			MAPE (%)			Stale wygładzania			MAPE (%)			Stale wygładzania			MAPE (%)		
		$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$K_{WW}$	$K_{WW IN}$	$K_{WW EX}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$K_{IN}$	$K_{IN WW}$	$K_{IN EX}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$K_{EX}$	$K_{EX WW}$	$K_{EX IN}$
Brown	a_B	0,97	-	-	4,216	6,584	7,808	0,58	-	-	6,433	4,547	7,665	0,75	-	-	7,531	4,366	6,474
	a_B <sub>p</sub>	0,97	-	-	4,007	-	7,808	-	-	-	-	-	-	0,75	-	-	7,531	4,132	-
Holta	a_H	0,20	0,01	-	5,569	6,665	91,759	0,13	0,01	-	6,572	5,850	81,322	0,18	0,04	-	7,536	5,829	14,043
	a_H <sub>p</sub>	0,15	0,01	-	5,545	-	84,750	-	-	-	-	-	-	0,11	0,09	-	8,694	5,993	-
Holta-Wintersa	a_HW	0,15	0,01	0,14	4,882	8,191	87,051	0,09	0,02	0,01	7,618	6,631	28,656	0,08	0,01	0,07	8,047	5,830	8,225
	a_HW <sub>p</sub>	0,15	0,01	0,14	4,453	-	83,436	-	-	-	-	-	-	0,08	0,01	0,07	8,047	4,820	-
Klas. szer. czas.	a_KI	-	-	-	6,907	-	-	-	-	-	6,724	-	-	-	-	-	8,552	-	-
	a_KI <sub>p</sub>	-	-	-	6,666	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8,192	-	-

Źródło: opracowanie własne

Tabela 2. Oceny błędów wartości wyrównanych, prognoz interpolacyjnych i prognoz ekstrapolacyjnych dla najlepszych multiplikatywnych modeli adaptacyjnych (w %)

Model	Oznaczenie	Wartości wyrównane (WW)						Prognozy interpolacyjne (IN)						Prognozy ekstrapolacyjne (EX)					
		Stale wygładzania			MAPE (%)			Stale wygładzania			MAPE (%)			Stale wygładzania			MAPE (%)		
		$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$K_{ww}$	$K_{ww IN}$	$K_{ww EX}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$K_{IN}$	$K_{IN ww}$	$K_{IN EX}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$K_{EX}$	$K_{EX ww}$	$K_{EX IN}$
Brownna	m_B	0,96	-	-	4,182	6,415	7,617	0,60	-	-	6,361	4,443	7,268	0,66	-	-	7,254	4,371	6,474
	m_Ba	0,20	0,01	-	5,306	6,390	8,850	-	-	-	-	-	-	0,66	-	-	7,254	4,465	-
	m_H	0,20	0,01	-	5,302	5,429	8,850	0,20	0,01	-	5,429	5,302	8,850	0,15	0,01	-	8,071	5,477	6,415
Holta	m_Ha	0,15	0,02	-	5,303	-	87,289	-	-	-	-	-	-	0,15	0,01	-	8,071	5,454	-
	m_HW	0,15	0,01	0,14	4,722	9,121	97,868	0,06	0,04	0,01	8,117	6,835	63,24	0,08	0,01	0,04	7,536	5,341	9,616
	m_HWa	0,15	0,14	0,01	4,288	-	94,870	-	-	-	-	-	-	0,11	0,01	0,01	7,068	5,927	-
Klas. szer. czas.	m_Kl	-	-	-	6,631	-	-	-	-	-	6,660	-	-	-	-	-	8,050	-	-
	m_KlJ	-	-	-	6,372	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7,857	-	-

Źródło: opracowanie własne

Należy zwrócić uwagę, że oceny błędów: wartości wyrównanych ( $K_{EX\_WW}$ ) prognoz interpolacyjnych ( $K_{EX\_IN}$ ), dla modelu charakteryzującego się minimalną oceną miernika  $K_{EX}$ , przyjęły wartości tylko niewiele wyższe od minimalnych ocen błędów  $K_{WW}$  oraz  $K_{IN}$ . Oznacza to, że kryterium wyboru modelu dla celów prognozowania ekstrapolacyjnego z całą pewnością nie mogą być predyktory oparte na modelach Holta oraz Holta-Wintersa. Ewentualnie mogą być brane pod uwagę, niezależnie od postaci, jedynie modele Browna.

W tabelach tych podane zostały, zarówno dla luk jak i dla pełnych danych, oceny błędów wartości wyrównanych, prognoz interpolacyjnych (dla luk) i ekstrapolacyjnych otrzymanych na podstawie modeli klasycznych w postaci addytywnej ( $a_{KL}$ ,  $a_{KLp}$ ) i multiplikatywnej ( $m_{KL}$ ,  $m_{KLp}$ ). Średnie względne błędy wartości teoretycznych (wyrównanych) dla modelu addytywnego i multiplikatywnego wynoszą odpowiednio: 6,907% oraz 6,663% i są one o ok. 2,3. oraz 2,6 p.p. wyższe od otrzymanych dla najlepszego modelu adaptacyjnego ( $m_B$ ). W przypadku prognoz interpolacyjnych względne ich błędy przyjęły wartości: 6,660% ( $m_{KL}$ ) oraz 6,545% ( $m_{KL}$ ) i są one wyższe od minimalnego średniego błędu prognoz otrzymanego na podstawie modeli Browna o ok. 0,2 – 0,3 p.p.

W przypadku prognoz ekstrapolacyjnych otrzymanych na podstawie modelu w postaci multiplikatywnej błąd ten jest o 0,796 p.p. (10,97%) wyższy od błędu minimalnego otrzymanego na podstawie modelu  $m_{HW}$ .

W tabeli 3 zamieszczone zostały oceny błędów średnich prognoz interpolacyjnych i ekstrapolacyjnych dla danych z lukami otrzymanych na podstawie najlepszych predyktorów adaptacyjnych ( $m_B$  oraz  $m_{HW}$ ), w dezagregacji na godziny, dni tygodnia i miesiące.

Tabela 3. Przeciętne względne błędy prognoz zdezagregowanych

	Liczba luk	Prognozy interpolacyjne		Prognozy ekstrapolacyjne			
		Modele z lukami		Modele bez luk			
		$m_B_{0.60}$	$m_{KL}$	$m_B_{0.66}$	$m_{KL}$	$m_{HWp_{0.11_0.01_0.01}}$	$m_{KLp}$
Ogółem	5272	6,361	6,660	7,254	8,050	7,068	7,696
G1	147	6,601	6,142	6,746	8,119	5,979	7,355
G2	365	5,152	6,483	7,150	7,666	6,190	7,701
G3	147	5,946	5,390	7,446	8,793	6,500	7,982
G4	147	6,052	5,490	8,038	9,433	6,548	8,706
G5	147	6,110	5,942	7,978	9,090	6,964	8,580
G6	365	6,438	7,477	8,744	8,794	8,394	8,964
G7	147	8,573	9,135	9,655	9,802	9,181	9,739
G8	365	7,061	8,295	10,166	10,491	9,431	10,439
G9	147	7,566	8,727	8,528	8,911	7,693	8,999
G10	365	4,477	6,104	6,580	7,476	6,421	7,129

	Liczba luk	Prognozy interpolacyjne		Prognozy ekstrapolacyjne			
		Modele z lukami				Modele bez luk	
		m_B_0.60	m_KL	m_B_0.66	m_KL	m_HWp_0.11_0.01_0.01	m_KLp
G11	147	6,224	6,075	5,710	6,896	5,416	6,525
G12	147	6,179	5,939	5,960	7,319	5,707	6,805
G13	147	6,484	5,857	5,549	6,749	5,734	6,274
G14	365	4,379	5,323	5,280	6,263	5,655	5,768
G15	147	6,672	5,595	5,271	6,111	5,815	5,718
G16	365	5,375	6,067	5,854	6,544	6,162	6,525
G17	147	9,352	7,162	7,841	8,872	8,837	8,516
G18	365	6,898	7,547	9,136	9,484	9,638	9,176
G19	147	9,367	9,629	9,403	9,540	9,459	9,317
G20	147	8,037	7,898	9,208	9,559	9,398	9,143
G21	147	6,738	7,209	7,772	8,070	8,083	7,689
G22	365	6,187	5,374	5,723	6,545	6,090	6,133
G23	147	6,881	5,911	5,194	6,261	5,435	5,767
G24	147	7,200	5,978	5,155	6,405	4,907	5,762
PN	560	6,752	7,819	7,524	8,267	7,267	7,871
WT	1248	6,709	6,593	6,473	7,274	6,372	6,866
ŚR	560	5,309	6,425	6,988	7,708	6,786	7,394
CZ	1248	6,862	6,509	7,282	7,870	6,969	7,598
PT	544	5,150	5,889	7,168	8,060	6,790	7,657
SO	552	5,763	6,207	6,803	7,849	6,741	7,446
ND	560	6,894	7,417	8,553	9,335	8,566	9,058
ST	392	4,522	5,325	6,142	5,946	6,080	5,840
LU	352	4,543	4,281	5,301	9,101	5,250	8,488
MAR	392	3,653	4,878	11,086	10,040	10,968	9,698
KW	368	4,471	6,046	6,016	7,680	6,168	7,361
MAJ	408	5,664	6,763	8,622	9,573	8,291	8,708
CZE	368	7,410	6,948	7,064	10,649	6,654	9,351
LIP	376	5,682	6,121	9,393	7,667	7,782	7,858
SIĘ	744	8,282	8,163	7,101	6,584	6,306	6,696
WRZ	368	5,982	7,052	5,616	7,745	5,673	7,206
PAŹ	744	8,701	7,116	6,113	5,891	6,050	5,928
LIS	384	6,723	7,452	6,337	7,411	6,453	7,202
GRU	376	6,625	7,815	7,936	8,452	8,860	8,106

Źródło: opracowanie własne

W celach porównawczych podane zostały, w takim samym układzie, błędy obu rodzajów prognoz otrzymanych na podstawie modelu klasycznego w postaci multiplikatywnej ( $m_{Kl}$ ). Kolumna druga zawiera liczby prognoz interpolacyjnych, obejmujących godziny, dni i miesiące, w których wystąpiły luki.

Z porównania ocen błędów prognoz interpolacyjnych dla godzin wynika, że dla predyktora adaptacyjnego ( $m_B$ ) są one w 14 przypadkach na 24 niższe od uzyskanych dla predyktora klasycznego ( $m_{Kl}$ ). Różnice te zawarte są w przedziale od 0,262 p.p. (godz. 19) do 1,626 p.p. (godz. 10). Niższe oceny błędów prognoz interpolacyjnych na podstawie predyktora klasycznego otrzymano dla 10 okresów godzinowych. Mieszczą się one w przedziale od 0,169 p.p. (godz. 5) do 2,189 p.p. (godz. 17). Jedynie dla godz. 22 lepszym o 0,702 p.p. okazał się predyktor klasyczny. Dla pięciu spośród siedmiu dni tygodnia bardziej efektywny okazał się predyktor oparty na modelu wyrównywania wykładniczego. Różnice ocen kształtowały się w przedziale od 0,444 p.p. dla czwartku do 1,116 p.p. dla środy. Natomiast niższe oceny błędów prognoz, wynoszące odpowiednio 0,117 p.p. i 0,352 p.p. otrzymano dla wtorku i czwartku, a więc dni w których występowały luki. Wyższe dokładności prognoz adaptacyjnych otrzymano dla 8 spośród 12 miesięcy. Zawarte były w przedziale od 0,439 p.p. dla lipca do 1,574 p.p. dla kwietnia.

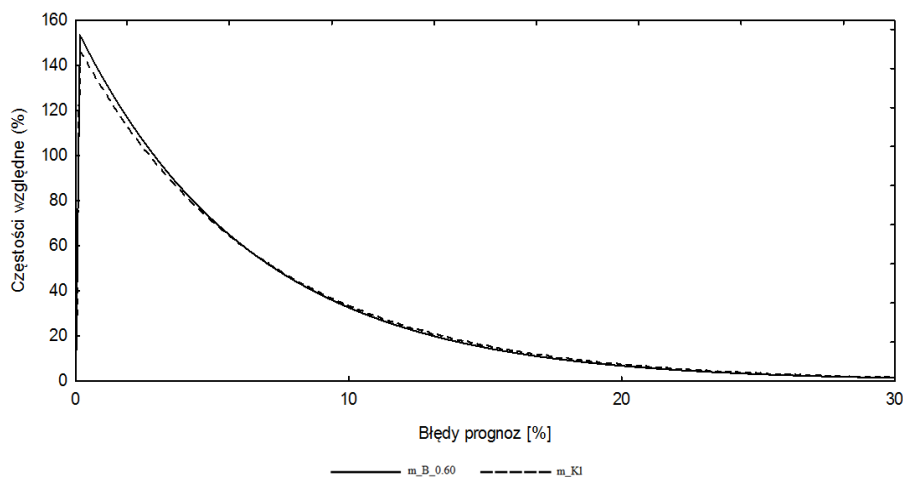
Predyktor klasyczny okazał się bardziej efektywny w czterech miesiącach (lutym, czerwcu, sierpniu i październiku). Różnice w ocenach wahały się od 0,120 p.p. dla sierpnia do 1,585 p.p. dla października, a więc miesięcy, w których występowały luki.

Jak wspomniano wcześniej przeciętny błąd względny prognoz ekstrapolacyjnych otrzymanych na podstawie predyktora adaptacyjnego ( $m_{HW}$ ) wynosił 7,254% i był niższy o 0,796 p.p. od błędu prognoz dla predyktora klasycznego ( $m_{Kl}$ ). Dla prognoz zdezagregowanych dla wszystkich 24 godzin otrzymano niższe błędy dla predyktora adaptacyjnego. Kształtowały się one w przedziale od 0,049 p.p. dla godz. 6 do 1,321 p.p. dla godz. 14. W przypadku 7 dni tygodnia także predyktor adaptacyjny okazał się bardziej efektywny. Różnice ocen błędów kształtowały się w przedziale od 0,588 p.p. dla czwartku do 1,046 p.p. dla soboty. Dla 8 spośród 12 miesięcy niższe oceny błędów otrzymano dla predyktora  $m_{HW}$ . Różnice ocen błędów zawarte były w przedziale 0,951. – 3,586 p.p. i dotyczyły odpowiednio: maja i lutego. Niższe oceny błędów dla predyktora klasycznego otrzymano dla: stycznia (o 0,046 p.p.), marca (o 1,046 p.p.) lipca (o 1,725 p.p.) oraz października (o 0,223 p.p.).

Obecnie przedstawione zostaną w postaci graficznej aproksymanty teoretyczne empirycznych rozkładów błędów prognoz interpolacyjnych otrzymane na podstawie najlepszego predyktora adaptacyjnego ( $m_{B_0.60}$ ) oraz predyktora klasycznego ( $m_{KL}$ ). Najlepiej rozkłady empiryczne błędów prognoz interpolacyjnych były aproksymowane za pomocą rozkładów wykładniczych.

Z Rysunku nr 5 wynika, że błędy prognoz adaptacyjnych ( $m_{B_0.60}$ ) przyjmują nieco częściej niższe wartości od błędów otrzymanych na podstawie modelu klasycznego ( $m_{Kl}$ ).

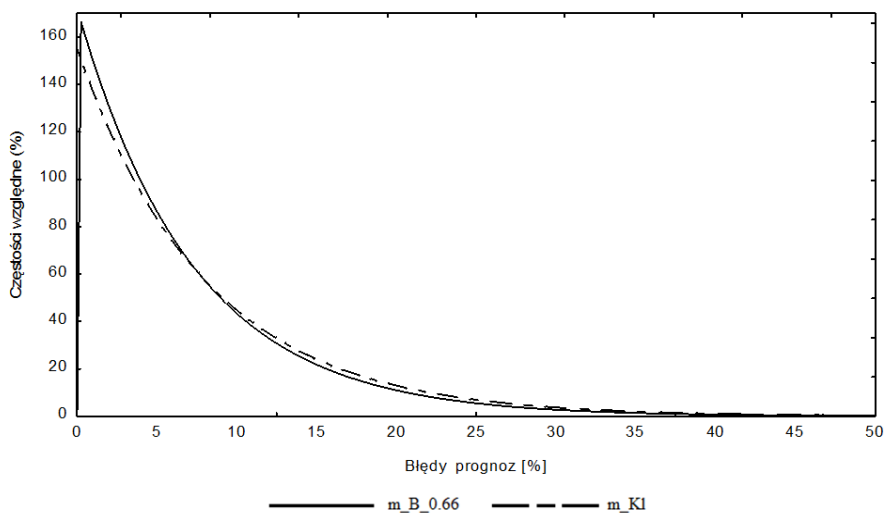
Rysunek 5. Rozkłady błędów prognoz interpolacyjnych otrzymanych na podstawie modeli  $m_{B\_0.60}$  oraz  $m_{KL}$



Źródło: opracowanie własne

Kształtowanie się wykładniczych aproksymant rozkładów empirycznych błędów prognoz ekstrapolacyjnych otrzymanych na podstawie najlepszych predyktorów: adaptacyjnego ( $m_{B\_0.66}$ ) oraz predyktora klasycznego ( $m_{KL}$ ) dla luk niesystematycznych zostało przedstawione graficznie na Rysunku 6.

Rysunek 6. Aproksymanty teoretyczne rozkładów błędów prognoz ekstrapolacyjnych otrzymanych na podstawie modeli  $m_{B\_0.66}$  oraz  $m_{KL}$



Źródło: opracowanie własne

Z porównania rozkładów błędów prognoz inter- i ekstrapolacyjnych wynika, że dokładność prognoz ekstrapolacyjnych jest wyraźnie wyższa od dokładności prognoz otrzymanych na podstawie modelu klasycznego

## PODSUMOWANIE

Przeprowadzone w pracy rozważania można podsumować następująco :

1. Podstawą wyboru modelu dla celów prognozowania *ex ante* nie mogą być modele o stałych wygładzania, którym odpowiadają minimalne oceny błędów wartości wyrównanych ( $K_{WW}$ ) i prognoz interpolacyjnych ( $K_{IN}$ ). Wynika to z faktu, że błędy prognoz ekstrapolacyjnych przyjmują dla nich zazwyczaj bardzo wysokie oceny, zwłaszcza dla modeli Holta i Holta-Wintersa.
2. Kryterium wyboru powinny być minimalne oceny błędów prognoz ekstrapolacyjnych ( $K_{EX}$ ). Minimalnym ich ocenom odpowiadają tylko nieznacznie wyższe od minimalnych oceny błędów wartości wyrównanych ( $K_{WW}$ ) i prognoz interpolacyjnych ( $K_{IN}$ ).
3. Dokładność prognoz ekstrapolacyjnych dla najlepszego modelu adaptacyjnego dla danych z lukami była zbliżone dla tego rodzaju modelu i pełnych danych – różnica w dokładności wynosiła 2,6%.
4. Prognozy interpolacyjne dla modeli adaptacyjnych dla luk niesystematycznych charakteryzowały się oceną przeciętnym błędem prognoz niższym o ok. 3,8 % niż dla klasycznego modelu szeregu czasowego. W przypadku prognoz ekstrapolacyjnych różnica ta wyniosła 10,97 %.
5. Potwierdzona została więc przydatność modeli wyrównywania wykładniczego w prognozowaniu zmiennej oczyszczonej ze złożonych wahań sezonowych, nawet w przypadku, gdy udział luk przekracza 30%.

## BIBLIOGRAFIA

- Dittmann P. (2006) Prognozowanie w przedsiębiorstwie. Metody i ich zastosowanie, Wolters Kluwer Polska, Kraków.
- Pawłowski Z. (1973) Prognozowanie ekonometryczne, PWN, Warszawa.
- Szmuksta-Zawadzka M., Zawadzki J. (2015) Wykorzystanie danych oczyszczonych o wysokiej częstotliwości w prognozowaniu zmiennych ze złożoną sezonowością, Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych, SGGW, t. XVI nr.4. Warszawa.
- Zeliaś A., Pawełek B., Wanat S. (2003) Prognozowanie ekonomiczne. Teoria, przykłady, zadania, PWN, Warszawa.

**FORECASTING BASED ON HIGH FREQUENCY  
TIME SERIES WITH UNSYSTEMATIC GAPS**

**Abstract:** In the paper will be presented the results of the application of selected models of exponential smoothing in forecasting of very high frequency variable, observed hourly, with unsystematic gaps, from which two or three types of seasonality fluctuation were eliminated. In the research was used a combination, in which gaps were present in each type of the fluctuation component.

**Keywords:** forecasting, high frequency time series, complex seasonality, exponential smoothing