

## POJĘCIE MIARY ODEJŚCIA OD RÓWNOMIERNOŚCI ORAZ JEJ WPŁYW NA TESTOWANIE NIEZALEŻNOŚCI W TABLICACH DWUDZIELCZYCH ŚREDNICH ROZMIARÓW

**Piotr Sulewski**

Instytut Matematyki, Akademia Pomorska w Słupsku  
e-mail: piotr.sulewski@apsl.edu.pl

**Streszczenie:** Gdy hipoteza  $H_0$  o niezależności cech jest słuszna, bardzo często wówczas — za sprawą małych próbek — rozkład statystyki testowej odbiega od rozkładu chi-kwadrat. Kwantyl rozkładu chi-kwadrat nie jest zatem właściwą wartością krytyczną. Obecnie nie jest problemem wyznaczenie wartości krytycznej, lecz modelowanie  $H_0$ . Modelowanie  $H_0$  to wypełnianie tablic, w których wartości cechy przypisane wierszom są niezależne od wartości cechy przypisanej kolumnom. W pracy zdefiniowano miarę odejścia od równomierności (mn). Gdy  $H_0$  jest słuszna, rozkład statystyki testowej zależy od mn. Wartość krytyczną należy ustalać z uwzględnieniem mn.

**Słowa kluczowe:** tablica dwudzielcza, test niezależności, miara nieprawdźliwości  $H_0$ , metoda słupkowa, metoda Monte Carlo

### WPROWADZENIE

W każdym popularnym podręczniku ze statystyki znajdują się informacje o m. in. takich testach, jak: niezależności, t Studenta, Kołmogorowa czy Behrensa - Fishera. Nie sposób nie zgodzić się zatem z tezą, że testy - obok wspomnianych wcześniej testów - są zapewne najczęściej stosowanymi narzędziami statystycznymi. Dane do testów niezależności aranżuje się w postaci tablic dwudzielczych  $w \times k$  (TD).

Statystyka testowa ma asymptotyczny rozkład chi-kwadrat. Takie zdanie często pojawia się w literaturze statystycznej. W praktyce jednak bardzo często rozkład statystyki testowej nie podlega rozkładowi chi-kwadrat, co wynika z małych próbek. Rachunek prawdopodobieństwa nie oferuje metod pozwalających na wyznaczenie dokładnych rozkładów. Tak naprawdę, znajomość postaci analitycz-

nej tych rozkładów nie jest nam potrzebna. Jedyne, co chcemy znać, to wartości kwantyli z tzw. „ogona” tych rozkładów, najczęściej 90% i 95%. Do ich uzyskania służy metoda modelowania komputerowego Monte Carlo (MC), dzięki której można wyznaczać wartość kwantyla na podstawie  $10^5$  powtórzeń testu zgodności

Interesuje nas tutaj rozkład statystyki testowej, gdy hipoteza zerowa  $H_0$  o niezależności cech jest słuszna. Przy obecnej wydajności komputerów nie stanowi problemu wyznaczenie kwantyla, lecz modelowanie  $H_0$ . Modelowanie  $H_0$  to wypełnianie takich TD, w których wartości cechy przypisanej wierszom są niezależne od wartości cech przypisanych kolumnom. Odpowiednia do takiego modelowania jest TD równomierna, o jednakowym prawdopodobieństwie przynależności do komórek. Jednak w modelowaniu nie można się ograniczyć tylko do niej. Zjawisko niezależności może wystąpić w każdej TD nierównomiernej, gdy prawdopodobieństwo według kolumn jest jednakowe we wszystkich wierszach lub prawdopodobieństwo według wierszy jest jednakowe we wszystkich kolumnach.

Do pokazania wpływu nierównomierności wypełnienia TD na wartość krytyczną wykorzystano najbardziej znaną i powszechnie stosowaną statystykę  $\chi^2$ . TD posiada ograniczenia w zakresie stosowania tej statystyki, która ma asymptotyczny rozkład chi-kwadrat z  $(w-1)(k-1)$  stopniami swobody. W celu zniesienia tych ograniczeń zaproponowano wyznaczanie wartości krytycznych na podstawie symulacji komputerowych metodą MC. Także Lilliefors w teście Kołmogorowa dla rozkładu normalnego wyznaczał wartości krytyczne za pomocą symulacji, gdy parametry rozkładu były oszacowane z próby.

W [Sulewski 2016a] pokazano, że wartość krytyczna w teście niezależności dla TD  $2 \times 2$  - gdy między cechami nie ma związku - zależy nie tylko od liczebności próby i poziomu istotności, ale także od stopnia nierównomierności danych. Artykuł obecny jest kontynuacją tamtych rozważań. TD nie są najmłodszym zagadnieniem, dlatego praca [Sulewski 2016a] miała charakter sondażowy, a ponieważ tematyka w niej zawarta została pozytywnie odebrana i zrecenzowana, autor postanowił pójść dalej i rozszerzył swoje badania na TD  $w \times k$  ( $w, k=2,3$ ) większe niż  $2 \times 2$ .

Celem artykułu jest przypomnienie teorii dotyczącej testów niezależności dla TD, wprowadzenie miary nierównomierności danych oraz analiza wyników modelowania statystycznego. Analiza ta ujawniła, że - nawet gdy  $H_0$  o niezależności cech jest słuszna - rozkład statystyki testowej w istotny sposób zależy od nierównomierności wypełnienia TD. Zatem wartość krytyczną należy ustalać z uwzględnieniem miary nierównomierności danych.

## TABLICA DWUDZIELCZA

Tabela 1 przedstawia TD  $w \times k$ , która składa się z  $w \cdot k$  wartości  $n_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,w$ ;  $j=1,2,\dots,k$ ) rozkładu łącznego cech  $X$  i  $Y$  takich, że  $\sum_{i=1}^w \sum_{j=1}^k n_{ij} = n$ .

Tabela 1. Tablica dwudzielcza  $w \times k$

Cecha $X$	Cecha $Y$				Razem
	$Y_1$	$Y_2$	...	$Y_k$	
$X_1$	$n_{11}$	$n_{12}$	...	$n_{1k}$	$n_{1\bullet}$
$X_2$	$n_{21}$	$n_{22}$	...	$n_{2k}$	$n_{2\bullet}$
..	...	...	...	...	...
$X_w$	$n_{w1}$	$n_{w2}$	...	$n_{wk}$	$n_{w\bullet}$
Razem	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	...	$n_{\bullet k}$	$n$

Źródło: opracowanie własne

Komórki TD  $w \times k$  można także wypełnić prawdopodobieństwami  $p_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,w; j=1,2,\dots,k$ ) takimi, że  $\sum_{i=1}^w \sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$ . W odniesieniu do tabeli 1 wartości te wyznaczone są ze wzoru  $p_{i\bullet} = n_{i\bullet} / n$ .

Liczebność oczekiwana komórki w  $i$ -tym wierszu i  $j$ -tej kolumnie wyznacza się ze wzoru

$$e_{ij} = \frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n} = n \cdot p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j} \quad (i=1,2,\dots,w; j=1,2,\dots,k), \tag{1}$$

wówczas statystyka  $\chi^2$  dla TD  $w \times k$  ma postać

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^w \sum_{j=1}^k \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = n \sum_{i=1}^w \sum_{j=1}^k \frac{(p_{ij} - p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j})^2}{p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}} = n \sum_{i=1}^w \sum_{j=1}^k \frac{p_{ij}^2}{p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}} - n. \tag{2}$$

Przeprowadzając badanie populacji generalnej istotna jest nie tylko zależność istniejąca między cechami, ale także jej siła. Teorię poświęconą miarom siły związku można spotkać praktycznie w każdej książce statystycznej. Część z tych miar wykorzystuje statystykę  $\chi^2$  i są to współczynniki V Cramera, T Czuprowa oraz C Pearsona. Na szczególną uwagę zasługuje jednak asymetryczna miara siły związku między cechami, a mianowicie współczynnik  $\tau$  Goodmana—Kruskala [Goodman, Kruskal 1979]. Niewątpliwym atutem tej miary jest także to, że ma swoje rozszerzenia dla tablic trójdzielczych [Gray, Williams 1975] oraz dla tablic czterodzielczych [D’Ambra, Crisci 2013].

Bazując na klasycznej definicji niezależności cech autor proponuje miarę nieprawdźliwości  $H_0$  przyjmującą postać

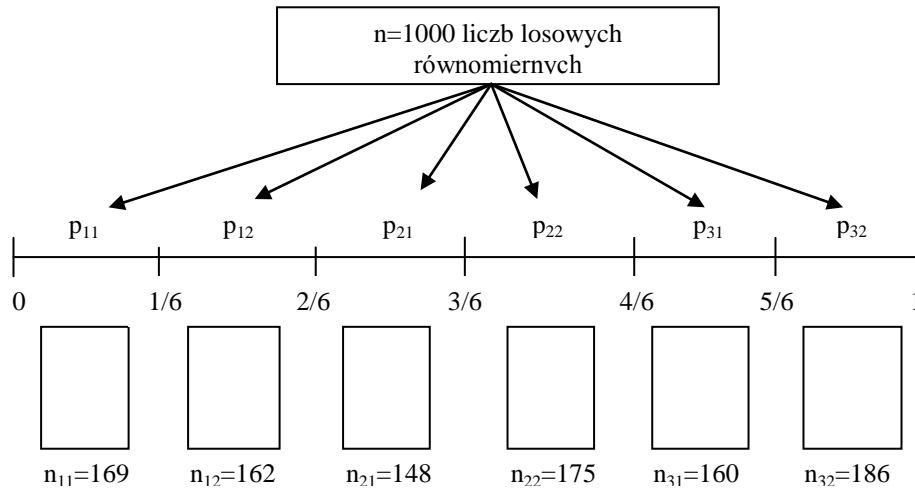
$$mu_{w \times k} = \sum_{i=1}^w \sum_{j=1}^k |p_{ij} - p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}|. \tag{3}$$

Hipoteza zerowa  $H_0$  — mówiąca o tym, że między cechami  $X$  i  $Y$  w TD  $w \times k$  nie ma związku — jest słuszna, gdy  $p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$  ( $i=1,2,\dots,w; j=1,2,\dots,k$ ). Zatem miara (3) przyjmuje wartość 0, gdy hipoteza zerowa  $H_0$  jest słuszna. Im większe są wartości  $mu_{w \times k}$ , tym bardziej nieprawdźliwa jest  $H_0$ .

W pracy [Sulewski 2015] wartości krytyczne dla TD wyznaczano metodą MC. Pierwszym etapem tego procesu jest wypełnianie TD niezbędne do przeprowadzenia symulacji, którą wykonano metodą słupkową. W tym celu przedział  $\langle 0;1 \rangle$  podzielono na  $w \cdot k$  podprzedziałów o szerokościach równych wartościom prawdopodobieństw  $p_{ij}$  w taki sposób, że pierwszy podprzedział ma szerokość  $p_{11}$ , drugi -  $p_{12}$ , ...,  $k$ -ty -  $p_{1k}$ , ..., ostatni -  $p_{wk}$ . Aby uzyskać zerową wartość miary  $mu_{w \times k}$  wielkości  $p_{ij}$  wyznaczono ze wzoru  $p_{ij} = 1/(w \cdot k)$ . Prawdopodobieństwa te spełniają oczywiście warunek normalizacji  $\sum_{i=1}^w \sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$ .

Każda z  $n$  wygenerowanych liczb losowych równomiernych „wpada” do jednego z podprzedziałów i tym samym zostaje o jedną zwiększona liczba obiektów w odpowiadającej temu podprzedziałowi komórce TD. Wielkości  $n_{ij}$  spełniające równość  $\sum_{i=1}^w \sum_{j=1}^k n_{ij} = n$  są liczebnością obiektów w poszczególnych komórkach TD. Rysunek 1 przedstawia schemat wypełniania komórek TD  $3 \times 2$  dla liczebności próby  $n=1000$  i miary  $mu_{w \times k} = 0$ , gdy  $p_{ij} = 1/6$  dla każdego  $i=1,2,3$ ;  $j=1,2$ . Tabela 2 prezentuje odpowiadającą temu schematowi TD  $3 \times 2$ .

Rysunek 1. Schemat wypełniania komórek TD  $3 \times 2$



Źródło: opracowanie własne

Tabela 2. Tablica dwudzielcza 3×2 otrzymana metoda słupkową

Cecha X	Cecha Y		Razem
	$Y_1$	$Y_2$	
$X_1$	169	162	331
$X_2$	148	175	323
$X_3$	160	186	346
Razem	477	523	1000

Źródło: opracowanie własne

### MIARA NIERÓWNOMIERNOŚCI DANYCH

Wcześniejsze badania symulacyjne autora wykazały, że wartości krytyczne zależą od wartości prawdopodobieństw  $p_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,w$ ;  $j=1,2,\dots,k$ ), dla których miara nieprawdopodobieństwa  $H_0$  (3) przyjmuje wartość zero ( $H_0$  o niezależności cech jest słuszna). W związku z tym autor proponuje miarę nierównomierności danych dla TD w postaci:

$$mn_{w \times k} = w \cdot k \cdot \sum_{i=1}^w \sum_{j=1}^k \left( p_{ij} - \frac{1}{w \cdot k} \right)^2, \quad (4)$$

kóra - w zależności od rozmiaru TD - przyjmuje wartości w przedziale  $\langle 0, d_{\max} \rangle$ , gdzie  $d_{\max} \leq 1$ . W wyrażeniu (4) widoczne jest pewne podobieństwo do statystyki  $\chi^2$  (2).

### WYZNACZANIE WARTOŚCI KRYTYCZNYCH

Istnieją pewne ograniczenia w zakresie stosowalności statystyki  $\chi^2$  dla TD, która ma asymptotyczny rozkład chi-kwadrat z  $(w-1)(k-1)$  stopniami swobody. W odniesieniu do TD większych niż 2×2 ze statystyki  $\chi^2$  można korzystać, gdy liczebności oczekiwane (1)  $e_{ij} > 1$  oraz gdy nie więcej niż 20% tych wartości jest mniejsze niż 5 [Yates, Moore, McCabe 1999, Shier 2004]. Natomiast zdaniem Cochran'a [1952] statystykę  $\chi^2$  dla TD większych niż 2×2 można stosować, gdy przynajmniej jedna z liczebności oczekiwanych  $e_{ij} > 5$ . W dobie coraz to szybszych komputerów można za pomocą stosownego oprogramowania znieść te ograniczenia i drogą symulacyjną — stosując metodę MC i uwzględniając nierównomierność wypełnienia TD - wyznaczyć wartości krytyczne. W celu uzyskania bardziej dokładnych wyników wartość krytyczną końcową  $cv_\alpha$  wyznaczono jako wartość średnią kilkudziesięciu wyników, np.  $n=50$ . Algorytm wyznaczania wartości krytycznych dla TD jest następujący:

1. Sformułowanie hipotezy zerowej  $H_0$ : nie ma związku między cechami.
2. Ustalenie rozmiaru TD, liczebności próby  $n$  i poziomu istotności  $\alpha$ .

3. Wybór schematu prawdopodobieństw A lub B, gdy  $w \neq k$ .
4. Dla przyjętej wartości miary nierównomierności  $mn_{w \times k}$ , ustalenie wartości prawdopodobieństw  $p_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,w; j=1,2,\dots,k$ ), dla których miara nieprawdźliwości  $mu_{w \times k} = 0$ .
5. Wypełnianie TD metodą słupkową na podstawie wartości  $p_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,w; j=1,2,\dots,k$ ) ustalonych w kroku 4.
6. Wyznaczenie wartości statystyki  $\chi^2$  (2).
7.  $R=10^5$  krotne powtórzenie pkt. 5 i 6.
8. Uporządkowanie w kolejności rosnącej wartości statystyk  $\chi_i^2$  ( $i=1,\dots,R$ ).
9. Obliczenie wartości dystrybuant empirycznych  $F_i^* = i/(R+1)$ .
10. Ustalenie wartości krytycznej  $cv_1$  jako  $i$ -tej statystyki pozycyjnej, dla której wartość dystrybuanty empirycznej wynosi  $F_i^* = 1 - \alpha$  lub jest bardzo bliska tej wartości.
11.  $u=50$  - krotne powtórzenie pkt. 5 - 10.
12. Wyznaczenie wartości krytycznej  $cv_\alpha = (\sum_{i=1}^{50} cv_1) / 50$ .

W dalszej części tego punktu wyznaczono wartości krytyczne dla TD  $w \times k$  ( $w, k=2,3,4$ ) większych niż  $2 \times 2$  przy poziomie istotności  $\alpha=0,05$  z uwzględnieniem miary nierównomierności danych (4) i liczebności próby  $n$ . Minimalną liczebność próby dla danej TD dobrano tak, aby prawdopodobieństwa brzegowe były różne od zera. Maksymalną liczebność próby ustalono tak, aby pokazać jak z jej wzrostem maleje wpływ nierównomierności danych w TD na wartość krytyczną. Związek między liczbą komórek  $w \cdot k$  w analizowanych TD, a liczebnością próby  $n$ , określają zależności (5) z pewnym zaokrągleniem dla TD  $3 \times 2$  oraz TD  $3 \times 3$

$$\begin{aligned} n_1 &= w \cdot k \cdot 3,75; & n_2 &= w \cdot k \cdot 5; & n_3 &= w \cdot k \cdot 6,25; \\ n_4 &= w \cdot k \cdot 7,5; & n_5 &= w \cdot k \cdot 12,5; & n_6 &= w \cdot k \cdot 25. \end{aligned} \quad (5)$$

Stałe liczbowe występujące w (5) mają ścisły związek z liczebnością próby  $n$  dla TD  $2 \times 2$  [Sulewski 2016b].

Wnioski jakie wynikają z uzyskanych wyników dla każdej analizowanej TD są takie same. Żeby ich nie powielać, zostaną one przedstawione na końcu tego punktu.

W celu uzyskania żądanej wartości miary nierównomierności  $mn_{w \times k}$  (4), wartości prawdopodobieństw  $p_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,w; j=1,2,\dots,k$ ) - dla których miara nieprawdźliwości  $H_0$   $mu_{w \times k} = 0$  - uzyskano ze wzorów:

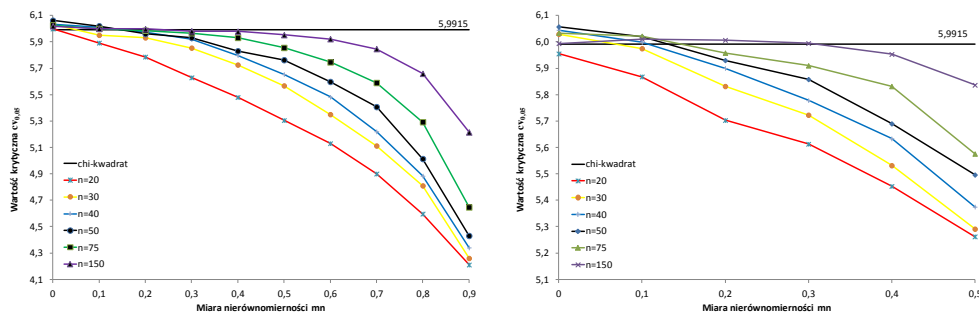
- TD  $3 \times 2$  schemat A:  $p_{i1} = 1/6 - q \cdot \Delta p$ ,  $p_{i2} = 1/6 + q \cdot \Delta p$  ( $i=1,2,3$ ),
- TD  $3 \times 2$  schemat B:  $p_{1j} = 1/6 - q \cdot \Delta p$ ,  $p_{2j} = 1/6$ ,  $p_{3j} = 1/6 + q \cdot \Delta p$  ( $j=1,2$ ),

- TD 3×3:  $p_{i1} = 1/9 - q \cdot \Delta p$ ,  $p_{i2} = 1/9$ ,  $p_{i3} = 1/9 + q \cdot \Delta p$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  
gdzie  $\Delta p = 10^{-3} / (w \cdot k)$  oraz  $q \in \langle 0, 10^3 \rangle$ .

Dla każdego z tych schematów wartość minimalna  $mn_{w \times k} = 0$ , natomiast wartości maksymalne to  $mn_{3 \times 2} = 1$  (schemat A) i  $mn_{3 \times 2} = 2/3$  (schemat B) oraz  $mn_{3 \times 3} = 2/3$ . Jeżeli  $mn_{w \times k}$  przyjmuje wartość maksymalną, to nie można policzyć wartości statystyki (2), gdyż prawdopodobieństwa brzegowe są zerowe. Dlatego symulacje komputerowe przeprowadzono dla wartości  $mn_{w \times k} \in \langle 0, \max \rangle$ , gdzie  $\max = 2/3$  dla TD 3×2 (schemat B) i 3×3 oraz  $\max = 1$  dla TD 3×2 (schemat A). Dokładne wartości miary  $mn_{w \times k}$ , dla których korzystając z metody MC wyznaczono wartości krytyczne  $cv_{0,05}$  to  $mn_{3 \times 2} = 0, 0.1, \dots, 0.9$  (schemat A),  $mn_{3 \times 2} = 0, 0.1, \dots, 0.5$  (schemat B) oraz  $mn_{3 \times 3} = 0, 0.1, \dots, 0.6$ .

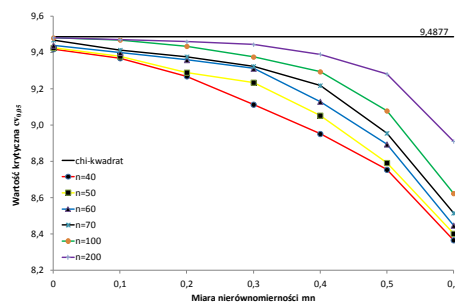
Otrzymane wartości krytyczne dla danej wartości miary  $mn_{w \times k}$  oraz liczebności próby  $n$  przedstawiono graficznie na rysunkach 2 i 3.

Rysunek 2. Wartości krytyczne i wartości miary nierównomierności odnoszące się do schematu A (po lewej) i do schematu B (po prawej) w TD 3×2



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 3. Wartości krytyczne i wartości miary nierównomierności w TD 3×3



Źródło: opracowanie własne

Z rysunków 2 i 3 wynika, że w TD dla danej liczebności próby  $n$ , wartość krytyczna  $cv_{0,05}$  zmienia się wraz ze wzrostem stopni nierównomierności danych  $mn_{w \times k}$  i przyjmuje najmniejsze wartości, gdy ta nierównomierność jest największa. Odchylenia od wartości krytycznej  $\chi_{0,05;(w-1)(k-1)}^2$  wyznaczanej „rutynowo” z rozkładu chi-kwadrat są znaczne i maleją wraz ze wzrostem liczebności próby.

Do badań empirycznych niezbędny jest także wskaźnik kierunku zmiany nierównomierności (WKZN), którego zadaniem - dla tablic o różnej liczbie wierszy i kolumn - jest wskazanie odpowiedniego schematu prawdopodobieństw do wyznaczania wartości krytycznych. Schematowi A odpowiada WKZN w postaci  $m_A$ , natomiast schematowi B - WKZN w postaci  $m_B$ .

$$m_A = \sum_{j=1}^k \left| p_{\bullet j} - \frac{1}{k} \right|, \quad m_B = \sum_{i=1}^w \left| p_{i\bullet} - \frac{1}{w} \right| \quad (6)$$

Wskaźniki (6) przyjmują jednocześnie wartość zero, gdy dane w TD są rozłożone równomiernie. Przykładowe inne wartości tych wskaźników dla TD  $3 \times 2$  przedstawia tabela 3.

Tabela 3. Wartości WKZN w tablicy dwudzielczej  $3 \times 2$  prawdopodobieństw

$m_A = 0,5, m_B = 0$				$m_A = 1, m_B = 0$			
	$Y_1$	$Y_2$	$\Sigma$	1	$Y_1$	$Y_2$	$\Sigma$
$X_1$	1/12	1/4	1/3	$X_1$	0	1/3	1/3
$X_2$	1/12	1/4	1/3	$X_2$	0	1/3	1/3
$X_3$	1/12	1/4	1/3	$X_3$	0	1/3	1/3
$\Sigma$	1/4	3/4	1	$\Sigma$	0	1	1
$m_A = 0, m_B = 1$				$m_A = 0, m_B = 1,2$			
	$Y_1$	$Y_2$	$\Sigma$	1	$Y_1$	$Y_2$	$\Sigma$
$X_1$	0	0	0	$X_1$	0	0	0
$X_2$	1/12	1/12	1/6	$X_2$	1/30	1/30	1/15
$X_3$	5/12	5/12	5/6	$X_3$	7/15	7/15	14/15
$\Sigma$	1/2	1/2	1	$\Sigma$	1/2	1/2	1

Źródło: opracowanie własne

Jeżeli dla danych empirycznych przedstawionych w postaci TD  $w \times k$  ( $w \neq k$ )  $m_A \geq m_B$ , to do wyznaczania wartości krytycznych należy skorzystać ze schematu A prawdopodobieństw. Jeżeli  $m_A < m_B$ , to należy skorzystać ze schematu B.



## PRZYKŁADY LICZBOWE

## Przykład 1

Wśród 1000 klientów PZU mieszkających w województwie Pomorskiem oceniono stopień opanowania języka ojczystego (cecha  $X$ ) oraz wyniki w uczeniu się języka obcego (cecha  $Y$ ). Uzyskane wyniki przedstawia TD  $3 \times 3$ , wartości  $p_{ij}$  zapisano w nawiasach (tabela 4). Za pomocą statystyki  $\chi^2$  zbadano niezależność cech  $X$  i  $Y$  na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$  z uwzględnieniem stopnia nierównomierności danych.

Tabela 4. Tablica dwudzielcza  $3 \times 3$ 

Cecha $X$	Cecha $Y$			Razem
	Słabe	Przeciętne	Wysokie	
Niski	10 (0,050)	19 (0,095)	22 (0,110)	51 (0,255)
Przeciętny	9 (0,045)	47 (0,235)	12 (0,060)	68 (0,340)
Bardzo dobry	58 (0,290)	13 (0,065)	10 (0,050)	81 (0,405)
Razem	77 (0,385)	79 (0,395)	44 (0,220)	200 (1)

Źródło: dane umowne

Do wyznaczenia wartości krytycznych skorzystano z algorytmu opisanego w punkcie 4 i otrzymano następujące wyniki:

- $H_0$ : nie ma związku między cechami.
- $w = 3$ ,  $k = 3$ ,  $n = 200$ ,  $\alpha = 0,05$ ,  $mn_{3 \times 3} = 0,521$ .
- Wartość  $mn_{3 \times 3} = 0,521$  uzyskano dla indeksu nierównomierności  $q = 884$ .  
Wartości prawdopodobieństw dla których  $mn_{3 \times 3} = 0,521$  oraz  $mu_{3 \times 3} = 0$  to:  
 $p_{i1} = 0,013$ ;  $p_{i2} = 0,111$ ;  $p_{i3} = 0,209$  ( $i = 1, 2, 3$ ).
- Wyznaczenie wartości krytycznej:  $cv_{0,05} = \left( \sum_{i=1}^{50} cv1_i \right) / 50 = 9,267$ .

Ponieważ wartość statystyki testowej  $\chi^2 = 79,877$  jest większa od wartości krytycznej  $cv_{0,05} = 9,267$ , zatem są podstawy do odrzucenia  $H_0$ . Wartość krytyczna odczytana z tablic rozkładu chi-kwadrat to  $cv_{0,05;4} = 9,4877$ .

## Przykład 2

W populacji generalnej przeprowadzono badanie statystyczne. Uzyskane wyniki przedstawia TD  $3 \times 2$ , wartości  $p_{ij}$  zapisano w nawiasach (tabela 5). Za pomocą statystyki  $\chi^2$  zbadano niezależność cech  $X$  i  $Y$  na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$  wyznaczając wartość krytyczną testu trzema sposobami: (sposób 1) wartość krytyczną odczytano z tablic rozkładu chi-kwadrat; (sposób 2) wartość krytyczną wyznaczono symulacyjnie metodą MC bez uwzględnienia nierównomierno-

ści danych; (sposób 3) wartość krytyczną wyznaczono symulacyjnie metodą MC z uwzględnieniem nierównomierności danych.

Tabela 5. Tablica dwudzielcza  $3 \times 2$

Cecha X	Cecha Y		Razem
	$Y_1$	$Y_2$	
$X_1$	13(0,121)	35(0,327)	48(0,449)
$X_2$	3(0,028)	38(0,355)	41(0,383)
$X_3$	3(0,028)	15(0,14)	18(0,168)
Razem	19(0,178)	88(0,822)	107(1)

Źródło: dane umowne

Do wyznaczenia wartości krytycznych skorzystano z algorytmu opisanego wcześniej i otrzymano następujące wyniki:

- $H_0$ : nie ma związku między cechami.
- $w=3, k=2, n=107, \alpha=0,05, mn_{3 \times 2}=0$  (sposób II),  $mn_{3 \times 2}=0,615$  (sposób III).
- Ponieważ WKZN  $m_A=0,645 > m_B=0,33$ , więc do wyznaczania wartości krytycznej należy skorzystać ze schematu A prawdopodobieństw (sposób 3).
- Wartość  $mn_{3 \times 2}=0$  uzyskano dla indeksu nierównomierności  $q=0$  (sposób 2), wartość  $mn_{3 \times 2}=0,615$  - dla indeksu nierównomierności  $q=784$  (sposób 3). Wartości prawdopodobieństw dla których  $mn_{3 \times 2}=mu_{3 \times 2}=0$  to:  $p_{ij}=1/6$  ( $i=1,2,3; j=1,2$ ). Wartości prawdopodobieństw dla których  $mn_{3 \times 2}=0,615$  oraz  $mu_{3 \times 2}=0$  to:  $p_{i1}=0,036; p_{i2}=0,297$  ( $i=1,2,3$ ).
- Wyznaczenie wartości krytycznych:

$$\text{(sposób 2) } cv_{0,05} = \left( \sum_{i=1}^{50} cv1_i \right) / 50 = 6,012,$$

$$\text{(sposób 3) } cv_{0,05} = \left( \sum_{i=1}^{50} cv1_i \right) / 50 = 5,849.$$

Sposób I. Statystyka testowa dla analizowanych danych wyznaczona ze wzoru (2) ma wartość  $\chi^2 = 5,933$ , a wartość krytyczna odczytana z tablic rozkładu chi-kwadrat to  $cv_{0,05;2} = 5,991$ . Ponieważ  $\chi^2 < cv_{0,05;2}$ , zatem nie ma podstaw do odrzucenia  $H_0$ .

Sposób II. Wartość krytyczna wyznaczona symulacyjnie metodą MC bez uwzględnienia nierównomierności danych wynosi  $cv_{0,05} = 6,012$  i jest większa od wartości statystyki  $\chi^2 = 5,933$ , zatem nie ma podstaw do odrzucenia  $H_0$ .

Sposób III. Wartość krytyczna wyznaczona symulacyjnie metodą MC z uwzględnieniem nierównomierności danych wynosi  $cv_{0,05} = 5,849$  i jest mniejsza od wartości statystyki  $\chi^2 = 5,933$ , zatem są podstawy do odrzucenia  $H_0$ .

## PODSUMOWANIE

W badaniu niezależności cech za pomocą TD  $w \times k$  bardzo popularną i często stosowaną miarą jest zaproponowana przez Pearsona statystyka  $\chi^2$ . W celu zniesienia ograniczeń w stosowaniu tej statystyki wymienionych w pkt. 4, dla TD wartości krytyczne wyznaczono symulacyjnie. Godnym uwagi jest, że wartości krytyczne wyznaczone symulacyjnie metodą MC zależą nie tylko od liczebności próby i poziomu istotności, ale także od zaproponowanej w niniejszej pracy miary nierównomierności danych. Zbieżność rozkładu statystyki testowej do rozkładu chi-kwadrat jest tym wolniejsza, im bardziej nierównomierna jest TD. Oczywiście wraz ze wzrostem liczebności próby symulacyjne wartości krytyczne dążą do tych wyznaczonych z rozkładu chi-kwadrat.

Głównym przesłaniem tego artykułu jest to, że wartość krytyczną należy ustalać z uwzględnieniem miary nierównomierności wypełnienia TD.

## BIBLIOGRAFIA

- Cochran W. G. (1954) Some Methods for Strengthening the Common  $\chi^2$  Tests. *Biometrics*, 10(4), 417 – 451.
- D’Ambra A., Crisci A. (2013) Multiple TAU decomposition in mean effect and interaction term. *SIS Statistical Conference, Advances in Latent Variables. Methods, Models and Applications*, Brescia.
- Goodman L. A., Kruskal W. H. (1979) Measures of Association for Cross Classifications. *Measures of Association for Cross Classifications. Springer Series in Statistics*, 2 – 34.
- Gray L. N., Williams J. S. (1975) Goodman and Kruskal’s tau b: multiple and partial analogs. *Proceedings of the Social Statistics Section, American Statistical Association*, 444 – 448.
- Shier R. (2004) The Chi-squared test for two-way tables. *Mathematics Learning Support Centre*.
- Sulewski P. (2015) Wyznaczanie obszaru krytycznego przy testowaniu niezależności w tablicach wielodzzielczych. *Wiadomości Statystyczne*, 3, 1 – 18.
- Sulewski P., Drapella A. (2016a) Wpływ nierównomierności wypełnienia tablicy dwudzzielczej  $2 \times 2$  na wartość krytyczną statystyki testowej. *Wiadomości Statystyczne*, 4, 1-16.
- Sulewski P. (2016b) Moc testów niezależności w tablicy dwudzzielczej większej niż  $2 \times 2$ . *Przegląd Statystyczny*, oddana do druku.
- Yates D. S., Moore D. S., McCabe G. P. (1999) *The practice of statistics: TI-83 graphing calculator enhanced*. New York, W. H. Freeman.

**A CONCEPT OF DEPARTURE-FROM-UNIFORMITY MEASURE  
AND ITS IMPACT ON THE TESTING FOR INDEPENDENCE  
IN TWO-WAY CONTINGENCY TABLES  
OF MEDIUM DIMENSIONS**

**Abstract:** Even when null hypothesis  $H_0$  is true, test statistics may not follow the chi-square distribution. It takes place when the contingency table is filled with a small sample. The relevant quantile of the chi-square distribution is no longer a proper critical value. Again and again, also in this case, the Monte Carlo method turns out to be irreplaceable. Modeling  $H_0$  means generating such tables in which values ascribed to rows are independent of values ascribed to columns. In paper a departure-from-uniformity measure  $mn$  was defined. When  $H_0$  is true measure  $mn$  has a strong impact on distribution of the test statistics. So, determining test critical values one has to take  $mn$  into account.

**Keywords:** two-way contingency table, test of independence, untruthfulness measure, bar method, Monte Carlo method