METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XVII/3, 2016, s. 120 – 130

ANALIZA WYCENY OPCJI EUROPEJSKICH W MODELU HULLA – WHITE'A

Arkadiusz Orzechowski
Instytut Bankowości, SGH w Warszawie
e-mail: aorzec@sgh.waw.pl

Abstrakt: W niniejszym artykule analizowany jest model J. Hulla i A. White'a. W ramach podejmowanej problematyki przedstawiane są aspekty teoretyczne rozpatrywanego podejścia oraz wykorzystywane są dane empiryczne do sprawdzenia precyzji wyceny w relacji do cen rynkowych generowanych przez model F. Blacka i M. Scholesa. Ponadto, przeprowadzana jest analiza wrażliwości wyceny opcji. Otrzymane wyniki wskazują, iż model J. Hulla i A. White'a, w swojej podstawowej postaci, pozwala wycenić opcje równie dobrze jak model F. Blacka i M. Scholesa, bez konieczności jednak wprowadzania założenia upraszczającego opis funkcjonowania rynku kapitałowego, tj. stałości wariancji stóp zwrotu z aktywów bazowych.

Słowa kluczowe: model J. Hulla i A. White'a, szereg Tayora, wycena opcji

WPROWADZENIE

Najbardziej znanym i najczęściej wykorzystywanym w praktyce modelem wyceny opcji jest ten opracowany przez F. Blacka i M. Scholesa [Black & Scholes 1973]. W modelu tym przyjmuje się założenie, zgodnie z którym zmiana teoretycznych notowań instrumentów bazowych (najczęściej akcji) opisana jest stochastycznym równaniem różniczkowym w postaci:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t. \tag{1}$$

gdzie μ oznacza dryf kursowy aktywa, na które opiewa kontrakt, σ jest zmiennością ceny waloru będącego podstawą wystawienia opcji, zaś W_t jest procesem Wienera. Warto zauważyć, że dwie pierwsze wartości są stałymi, trzecia natomiast to zmienna posiadająca następujące właściwości:

$$(dt)^2 = 0. \tag{2}$$

$$(dW_t)^2 = dt. \tag{3}$$

$$dW_t dt = 0. \tag{4}$$

$$E[dW_t] = 0. \tag{5}$$

$$E[dW_t dt] = E[dW_t]dt = 0. \tag{6}$$

$$E[(dW_t)^2] = dt. \tag{7}$$

Jedną z podstwowych zalet modelu F. Blacka i M. Scholesa jest jego prostota objawiająca się możliwością obliczania cen kontraktów bazujących na prawach pochodnych przy pomocy relatywnie zwięzłej formuły analitycznej.

Nie sposób pominąć faktu, iż prostota modelu F. Blacka i M. Scholesa wynika z wprowadzenia założeń znacznie ułatwiających opis sposobu funkcjonowania rynku kapitałowego. Wśród nich najważniejszymi wydają się być normalność rozkładu i stałość zmienności stóp zwrotu z aktywów bazowych stanowiących podstawę wystawienia opcji [Forlicz 2011, Piontek 2006].

Normalność rozkładu stóp zwrotu w literaturze finansowej, pomimo, że bardzo często przyjmowana jako fundament budowy modeli finansowych (w tym modeli wyceny opcji), od samego początku była kwestionowana przez wielu naukowców. Prawdziwość tego stwierdzenia wydają się potwierdzać wyniki badań m.in. B. Mandelbrota [Mandelbrot 1963], E. Famy [Fama 1965], P. Clarka [Clark 1973], B. Rosenberga [Rosenberg 1974], B. Rosenberga i J. Ohlsona [Rosenberg & Ohlson 1976], E. Petersa [Peters 1991] i A. Peiro [Peiro 1999]. Wszystkie one wspierają pogląd o braku możliwości opisu rentowności akcji, indeksów giełdowych, itd. przy pomocy krzywych gaussowskich.

Podobnie sytuacja przedstawia się w przypadku zmienności względnych wahań stóp zwrotu z aktywów bazowych. Jak zauważa R. Cont [Cont 2007], stałość odchyleń standardowych dochodowości instrumentów finansowych o charakterze udziałowym pozostaje w sprzeczności ze zjawiskami dobrze udokumentowanymi w literaturze przedmiotu, w tym m.in. z:

- nadmiarem zmienności (ang. *excess volatility*) polegającym na trudności w wytłumaczeniu zmienności stóp zwrotu z akcji napływem informacji o charakterze fundamentalnym [Fama & French 1992, Fama & French 1993],
- skłonnością zmienności do układania się w klastry (ang. *volatility clustering*), której sensem jest tendencja stóp zwrotu do podążania zgodnie z zapoczątkowanym trendem [Mandelbrot 1963],
- korelacją wolumenu obrotu ze zmiennością dochodowości przede wszystkim akcji, której konsekwencją jest tzw. “długa pamięć” rynków finansowych [Lobato & Velasco 2000, Christensen & Nielsen 2007].

W konsekwencji, model F. Blacka i M. Scholesa należy uznać za konstrukcję teoretyczną, która pozwala wycenić opcje jednak z pominięciem szeregu prawidłowości rządzących zachowaniem współczesnych rynków finansowych. Jako alternatywę, często proponuje się modele stochastycznej zmienności. W ich przypadku fluktuacje wariancji notowań instrumentów finansowych, na które opiewają opcje, podlegają procesowi losowemu, który nie jest powiązany z procesem Wienera kształtującym ceny aktywów bazowych [Hull & White 1987, Stein & Stein 1991, Ball & Roma 1997] lub też wykazuje z nim korelację [Scott 1987, Heston 1993, Bates 1996, Bakshi et al. 1997]. Powstałe tym sposobem modele są jednak bardziej złożone, zaś formuły analityczne pozwalające na wycenę opcji, o ile możliwe do wyznaczenia, mają o wiele bardziej złożoną postać.

Celem niniejszego artykułu jest analiza wyceny opcji europejskich w jednym z najprostszych modeli stochastycznej zmienności, tj. modelu J. Hulla i A. White'a [Hull & White 1987]. Przyjmuje się w nim założenie stanowiące o braku korelacji zmiennej W_t ze wzoru (1) ze zmiennością stóp zwrotu z instrumentu bazowego stanowiącego podstawę wystawienia opcji. W ramach podejmowanej problematyki wyprowadzane są formuły analityczne pozwalające określić wartość teoretyczną kontraktów *call* i *put*. Następnie, na przykładzie opcji kupna, sprawdzany jest wpływ zwiększenia precyzji obliczeniowej, wynikający z uwzględnienia kolejnych rozwinięć szeregu Taylora, na wynik końcowy wyceny. Ostatecznie, sprawdzana jest dokładność wyceny kontraktów w stosunku do modelu F. Blacka i M. Scholesa oraz poddawana jest analizie reakcja modelu J. Hulla i A. White'a na zmianę poszczególnych czynników ryzyka.

KONSTRUKCJA MODELU J. HULLA I A. WHITE'A

W odróżnieniu od koncepcji F. Blacka i M. Scholesa [Black & Scholes 1973] model J. Hulla i A. White'a [Hull & White 1987] opisany jest układem dwóch stochastycznych równań różniczkowych, z których pierwsze przyjmuje poniższą postać:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_{1,t}. \tag{8}$$

gdzie S_t to cena instrumentu finansowego o charakterze udziałowym w okresie t, μ jest dryfem kursowym, σ_t utożsamiane jest z odchyleniem standardowym logarytmicznej stopy zwrotu instrumentu bazowego a $W_{1,t}$ jest procesem Wienera. Drugie równanie wyrażone jest natomiast w następującej formie:

$$dV_t = \alpha V_t dt + \xi V_t dW_{2,t}. \tag{9}$$

gdzie V_t to wariancja stopy zwrotu z instrumentu bazowego, α, ξ są wielkościami (stałymi) niezależnymi od S_t a $W_{2,t}$ jest procesem Wienera nieskorelowanym z procesem Wienera $W_{1,t}$.

Chcąc otrzymać formułę na wycenę opcji w modelu J. Hulla i A. White'a można skorzystać z metodologii opracowanej przez M. Garmana [Garman 1976]. W tym celu należy jedynie rozwiązać cząstkowe równanie różniczkowe, które przybiera następującą postać:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\sigma_t S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} + \xi^2 V_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V_t^2}\right] - rf = -rS_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - \mu\sigma_t^2 \frac{\partial f}{\partial V_t}. \tag{10}$$

gdzie r jest stopą zwrotu wolną od ryzyka zaś $f = f(S_t, V_t, t)$. Wielkość zrównująca lewą i prawą strone równania (10) opisana jest poniższym wzorem:

$$f(S_t, \sigma_t^2, t) = e^{-r(T-t)} \int f(S_T, \sigma_T^2, T)\tilde{q}(S_T|S_t, \sigma_t^2)dS_T. \quad (11)$$

gdzie $f(S_T, \sigma_T^2, T) = max[S_T - K, 0]$ dla europejskiej opcji kupna i $f(S_T, \sigma_T^2, T) = max[K - S_T, 0]$ dla europejskiej opcji sprzedaży, zaś $\tilde{q}(S_T|S_t, \sigma_t^2)$ stanowi warunkową funkcję gęstości prawdopodobieństwa ceny aktywa bazowego w momencie wykupu opcji.

Ze względu na to, że rozkład S_T zależy od dwóch zmiennych S_t i σ_t^2, można wykorzystać następującą zależność dla trzech zmiennych losowych zależnych – tutaj oznaczonych jako x, y i z:

$$\tilde{q}(x|y) = \int \tilde{g}(x|z)\tilde{h}(z|y)dz. \quad (12)$$

gdzie $\tilde{q}(x|y)$, $\tilde{g}(x|z)$, $\tilde{h}(z|y)$ są warunkowymi funcjami gęstości prawdopodobieństwa odpowiednio zmiennej x pod warunkiem y, zmiennej x pod warunkiem z i zmiennej z pod warunkiem y.

Definiując średnią wariancję jako:

$$\bar{V} = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma_\tau^2 d\tau. \quad (13)$$

a następnie wykorzystując formułę (13) można otrzymać następującą zależność:

$$\tilde{q}(S_T|\sigma_t^2) = \int \tilde{g}(S_T|\bar{V})\tilde{h}(\bar{V}|\sigma_t^2)d\bar{V}. \quad (14)$$

Wstawienie otrzymanego wyniku do wzoru (11) pozwala wygenerować ogólną formułę na wycenę opcji, tj.:

$$f(S_t, \sigma_t^2, t) = e^{-r(T-t)} \int\int f(S_T, \sigma_T^2, T)\tilde{g}(S_T|\bar{V})\tilde{h}(\bar{V}|\sigma_t^2)d\bar{V}. \quad (15)$$

Uzupełnienie prawej strony równania (15) o granice całkowania uprawnia do stwierdzenia, iż:

$$f(S_t, \sigma_t^2, t) = \int\left[e^{-r(T-t)}\int_K^\infty (S_T - K)\tilde{g}(S_T|\bar{V})dS_T\right]\tilde{h}(\bar{V}|\sigma_t^2)d\bar{V}. \quad (16)$$

dla europejskiej opcji kupna oraz:

$$f(S_t, \sigma_t^2, t) = \int\left[e^{-r(T-t)}\int_0^K (K - S_T)\tilde{g}(S_T|\bar{V})dS_T\right]\tilde{h}(\bar{V}|\sigma_t^2)d\bar{V}. \quad (17)$$

dla europejskiej opcji sprzedaży.

Warto zauważyć, iż przy $t = 0$ warunkowy rozkład logarytmicznej stopy zwrotu $ln\frac{S_T}{S_0}$ względem $\bar{V}$ jest normalny ze średnią $rT - \frac{\bar{V}T}{2}$ i wariancją $\bar{V}T$. Sama wartość europejskiej opcji kupna w analizowanym modelu może być wyznaczona przy pomocy następującego wzoru:

$$C^{HW}(S_t, \sigma_t^2, t) = \int C^{BS}(\bar{V})h(\bar{V}|\sigma_t^2)d\bar{V}. \quad (18)$$

gdzie $C^{HW}(S_t, \sigma_t^2, t)$ to wartość europejskiej opcji *call* w modelu J. Hulla i A. White'a a $C^{BS}(\bar{V})$ stanowi wartość europejskiej opcji *call* ze zmienną $\bar{V}$ w modelu F. Blacka i M. Scholesa zaś $h(\bar{V}|\sigma_t^2)$ jest warunkową funkcją gestości prawdopodobieństwa zmiennej $\bar{V}$ pod warunkiem σ_t^2.

Analogicznie opisać można wartość europejskiej opcji sprzedaży, tj.:

$$P^{HW}(S_t, \sigma_t^2, t) = \int P^{BS}(\bar{V})h(\bar{V}|\sigma_t^2)d\bar{V}. \tag{19}$$

gdzie $P^{HW}(S_t, \sigma_t^2, t)$ to wartość europejskiej opcji *put* w modelu J. Hulla A. White'a a $P^{BS}(\bar{V})$ stanowi wartość europejskiej opcji *put* ze zmienną $\bar{V}$ w modelu F. Blacka i M. Scholesa.

Warto zauważyć, że analityczna postać $h(\bar{V}|\sigma_t^2)$ nie jest znana. Pomimo to istnieje możliwość wyznaczenia wartości oczekiwanej zmiennej $\bar{V}$. Dla wygody obliczeń warto założyć, iż $t = 0$. Wtedy:

$$E(\bar{V}) = \frac{e^{\mu T}-1}{\mu T}V_0. \tag{20}$$

Podobnie jest z wielkością $E(\bar{V}^2)$, tzn.

$$E(\bar{V}^2) = \left[\frac{2e^{(2\mu+\xi^2)T}}{(2\mu+\xi^2)(\mu+\xi^2)T^2} + \frac{2}{\mu T^2}\left[\frac{1}{(2\mu+\xi^2)} - \frac{e^{\mu T}}{\mu(\mu+\xi^2)}\right]\right]V_0^2. \tag{21}$$

Ostatecznie, korzystając z rozwinięcia funkcji $C^{BS}(\bar{V})$ oraz $P^{BS}(\bar{V})$ w szereg Taylora można wygenerować formuły pozwalające wycenić opcje *call* i *put* w modelu J. Hulla i A. Whte'a:

$$C^{HW}(S_t, \sigma_t^2, t) = C^{BS}\big(E(\bar{V})\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C^{BS}(E(\bar{V}))}{\partial E(\bar{V})^2}Var(\bar{V}) + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 C^{BS}(E(\bar{V}))}{\partial E(\bar{V})^3}Sk(\bar{V}) + \cdots \tag{22}$$

$$P^{HW}(S_t, \sigma_t^2, t) = P^{BS}\big(E(\bar{V})\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P^{BS}(E(\bar{V}))}{\partial E(\bar{V})^2}Var(\bar{V}) + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 P^{BS}(E(\bar{V}))}{\partial E(\bar{V})^3}Sk(\bar{V}) + \cdots \tag{23}$$

gdzie $Var(\bar{V})$ i $Sk(\bar{V})$ to odpowiednio drugi i trzeci moment centralny zmiennej $\bar{V}$.

W dalszej części artykułu, w ramach modelu J. Hulla i A. White'a, wartość kontraktów opiewających na aktywa bazowe wyznaczana jest przy wykorzystaniu wzoru (22) na dwa sposoby, tj. gdy:

- szereg Taylora rozwijany jest do drugiego wyrazu włącznie (model określany dalej jako HW 1),
- szereg Taylora rozwijany jest do trzeciego wyrazu włącznie (model określany dalej jako HW 2).

METODOLOGIA BADAŃ

Wycena opcji w modelu J. Hulla i A. White'a

Badania zmierzające do przeprowadzenia analizy modelu J. Hulla i A. White'a można podzielić na kilka części.

Na początku, w oparciu o notowania na zamknięciu poszczególnych sesji, wyznaczane są logartymiczne stopy zwrotu z portfela dwudziestu spółek o najwyższej kapitalizacji notowanych na GPW w Warszawie. Otrzymane wielkości potrzebne są do wyznaczenia cen opcji o symbolach OW20F161300 - OW20F162700. Powyższe oznaczenia przypisywane są kontraktom opcyjnym *call* wystawionym na indeks WIG 20, które wygasły w czerwcu 2016 r. z poziomami wykonania znajdującymi się w przedziale od 1300 do 2700 punktów indeksowych.

Będące przedmiotem zainteresowania instrumenty znajdowały sie w obrocie publicznym w okresie od 22 czerwca 2015 r. do 17 czerwca 2016 r. Ważne jest, iż do badań wybierane są tylko te kontrakty, których poziom realizacji wyniósł od 1300 do 2700 punktów indeksowych ze zmianą co 100 punktów indeksowych.

Następnie, zestaw posiadanych danych rozszerzany jest o wartość jednorocznego WIBORu z dnia poprzedzającego moment dokonanych obliczeń. Otrzymana wielkość stanowił substytut stopy procentowej wolnej od ryzyka. Ponadto, obliczana jest wariancja stopy zwrotu z WIGu 20 obejmująca przedział czasowy równy okresowi życia analizowanych opcji, tj. 250 sesji, który bezpośrednio poprzedza przeprowadzone obliczenia (dla modelu F. Blacka i M. Scholesa). W przypadku modelu J. Hulla i A. White'a zakłada się dodatkowo, iż $\xi = 0{,}01$.

Ostatecznie, na podstawie wygenerowanego zbioru informacji, obliczana jest względna różnica pomiedzy wartościami opcji w modelach J. Hulla i A. White'a oraz F. Blacka i M. Scholesa. Otrzymane wyniki zawarte są w tabeli 1.

Tabela 1. Względne różnice w wycenie opcji na WIG 20 w modelach J. Hulla i A. White'a oraz F. Blacka i M. Scholesa

	OW20F161300	**OW20F161400**	**OW20F161500**	**OW20F161600**	**OW20F161700**
$\frac{HW1-BS}{HW1}$	1,08%	0,89%	0,66%	0,49%	0,55%
	OW20F161800	**OW20F161900**	**OW20F162000**	**OW20F162100**	**OW20F162200**
$\frac{HW1-BS}{HW1}$	0,64%	1,42%	1,16%	-3,41%	0,98%
	OW20F162300	**OW20F162400**	**OW20F162500**	**OW20F162600**	**OW20F162700**
$\frac{HW1-BS}{HW1}$	2,42%	1,14%	2,66%	1,46%	0,29%

Źródło: opracowanie własne

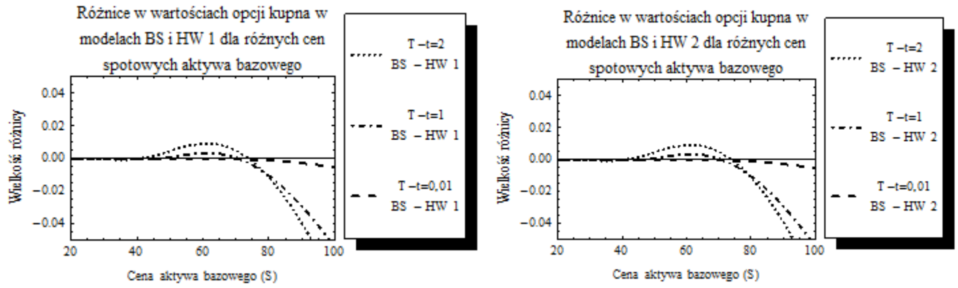
Na podstawie przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić, iż wartości opcji w obu uwzględnioych modelach są do siebie zbliżone. W większości przypadków model HW 1 przeszacowuje wartość opcji w stosunku do modelu F. Blacka i M. Scholesa jednak obserwowane nieprawidłowości nie wydają się być znaczące. Jest to interesujące, gdyż model HW 1 jest modelem stochastycznej zmienności (średnia wariancja stóp zwrotu z instumentu bazowego jest zmienną losową) natomiast podejście F. Blacka i M. Scholesa zakłada stałość wariancji rentowności aktywów, na które wystawiane są kontrakty.

Analiza wrażliwości

W ramach przeprowadzanych badań analizie poddawana jest również wrażliwość wyceny opcji w modelu J. Hulla i A. White'a w relacji do modelu F. Blacka i M. Scholesa na zmianę poziomu wielkości utożsamianych z poszczególnymi czynnikami ryzyka. W tym celu wyznaczane są względne różnice w wycenie kontraktów bazujących na prawach pochodnych wynikające z zastosowania poszczególnych podejść. Przyjmuje się, iż cena rozliczenia kontraktów opcyjnych wynosi 60, odchylenie standardowe równa się 0,2, stopa zwrotu wolna od ryzyka kształtuje się na poziomie 4%, $\xi = 0{,}1$ a cena spotowa instrumentu bazowego należy do przedziału $\langle 20{,}100 \rangle$. Do obliczeń wykorzystywany jest pakiet Mathematica 8.0.

Pierwszym czynnikiem ryzyka jest cena aktywa bazowego. Warto zauważyć, iż na potrzeby dalszej analizy przyjmuje się, iż punktem odniesienia w kwestii wyceny opcji jest model F. Blacka i M. Scholesa.

Rysunek 1. Różnice w wartościach europejskich opcji kupna w modelach F. Blacka i M. Scholesa a HW 1 i HW 2 dla różnych cen spotowych aktywa bazowego

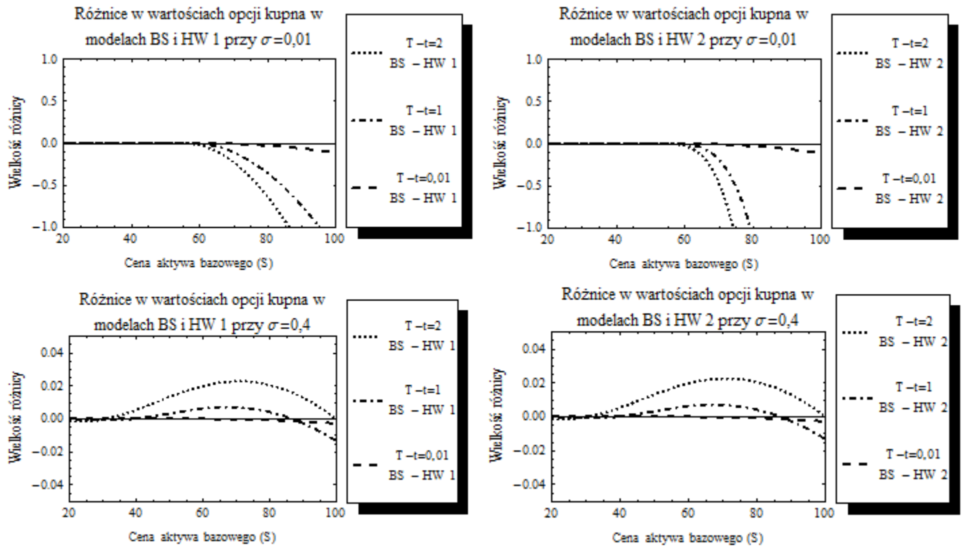


Źródło: opracowanie własne

Na podstawie rysunku 1 można wyciągnąć wniosek stanowiący, iż ceny opcji kupna w modelach F. Blacka i M. Scholesa oraz HW 1 i HW 2 są do siebie zbliżone. W sytuacji kiedy cena spotowa aktywa bazowego znajduje się na poziomie niższym (opcje *out – of – the - money*) lub podobnym do kursu rozliczenia (opcje *at - the - money*), to modele HW 1 i HW 2 odpowiednio dobrze wyznaczają lub zaniżają cenę teoretyczną opcji. W przypadku kontraktów *in - the - money* modele HW 1 i HW 2 generują wartości wyższe niż wynika to z podejścia F. Blacka i M. Scholesa. Warto przy tym zauważyć, iż różnice zwiększają się tym bardziej, im bardziej notowania rynkowe instrumentu bazowego rosną ponad poziom rozliczenia kontraktów opcyjnych. Ze względu jednak na to, że w praktyce duże rozbieżności pomiedzy S_t i K zdarzają się rzadko, dla niewielkich zmian cen aktywa bazowego modele F. Blacka i M. Scholesa oraz HW 1 i HW 2 pozwalają uzyskać podobną wycenę opcji. Nie sposób również pominąć tego, że modele HW 1 i HW 2 wyceniają opcje niemal identycznie, zaś rejestrowane różnice są nieistotne pod względem ekonomicznym.

Nieco inaczej sytuacja wygląda w przypadku drugiego czynniki ryzyka, tj. zmienności stóp zwrotu z aktywa bazowego.

Rysunek 2. Różnice w wartościach europejskich opcji kupna w modelach F. Blacka i M. Scholesa a HW 1 i HW 2 dla różnych poziomów zmienności stóp zwrotu z aktywów bazowych

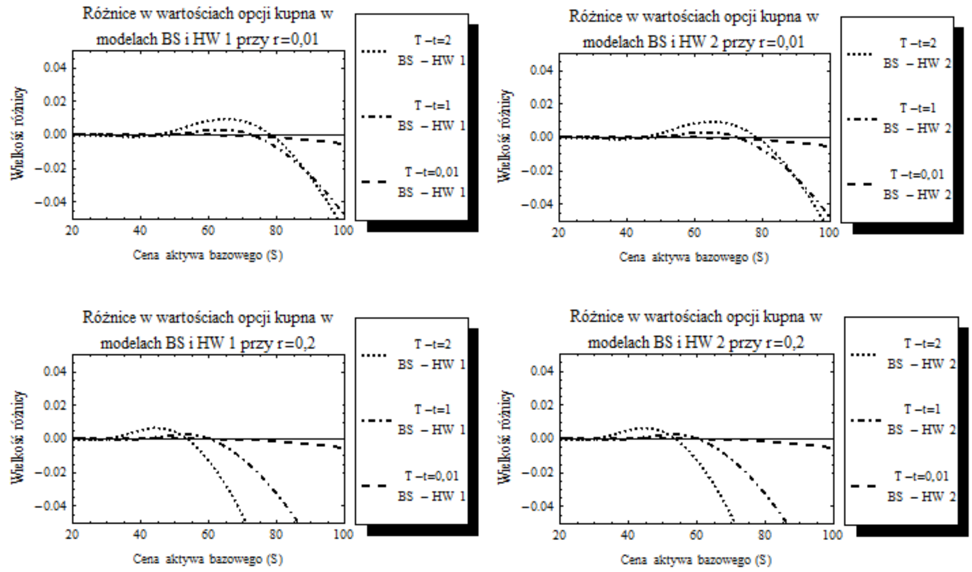


Źródło: opracowanie własne

Z rysynku 2 można wywnioskować, iż niewielkie odchylenia standardowe waloru podstawowego praktycznie nie wpływają na różnicę w wycenie opcji pomiędzy modelami F. Blacka i M. Scholesa oraz HW 1 i HW 2 dla opcji *out - of – the - money* i *at – the – money*. W przypadku opcji *in – the - money*, wraz ze wzrostem S_t w stosunku do K, modele HW 1 i HW 2 zaczynają zawyżać ceny teoretyczne opcji. Gdy odchylenie standardowe rentowności instrumentu podstawowego wzrasta, dla rozsądnych *moneyness* opcji, model F. Blacka i M. Scholesa zawyża wycenę kontraktów opartych na prawach pochodnych.

Trzecim czynnikiem ryzyka jest stopa zwrotu wolna od ryzyka.

Rysunek 3. Różnice w wartościach europejskich opcji kupna w modelach F. Blacka i M. Scholesa a HW 1 i HW 2 dla różnych poziomów stopy zwrotu wolnej od ryzyka



Źródło: opracowanie własne

Na podstawie rysunku 3 można stwierdzić, iż dla niskich poziomów stopy zwrotu wolnej od ryzyka modele F. Blacka i M. Scholesa oraz HW 1 i HW 2 w zbliżony sposób wyceniają opcje będące poza ceną. W przypadku kontraktów będących przy cenie model F. Blacka i M. Scholesa przeszacowuje wartości analizowanych instrumentów w stosunku do podejść HW 1 i HW 2. Jeżeli chodzi natomiast o opcje znajdujące się w cenie dostrzec można odwrotną prawidłowość. Nie sposób również pominąć tego, że rozpoznany tym sposobem schemat nieprawidłowości ulega "przesunięciu w lewo" wraz ze wzrostem stopy zwrotu wolnej od ryzyka.

Ostatnim z uwzględnionych czynników ryzyka jest czas pozostajacy do wykupu opcji. Wielkość ta została pośrednio ujęta w powyższej analizie. Na podstawie rysunków 1 - 3 łatwo można dostrzeć, iż w miarę przybliżania się do momentu wykupu opcji modele F. Blacka i M. Scholesa oraz HW 1 i HW 2 zaczynają generować wartości na poziomie zbliżonym do siebie.

PODSUMOWANIE

W niniejszym artykule przedstawiona została analiza modelu J. Hulla i A. White'a. W ramach podejmowanych działań wyprowadzone zostały wzory na wycenę opcji kupna i sprzedaży. Następnie, sprawdzeniu poddany został wpływ wykorzystywania kolejnych rozwinięć szeregu Taylora na dokładność wyceny.

Ostatecznie wykonany został test empiryczny podejścia J. Hulla i A. White'a oraz przeprowadzona została analiza wrażliwości wyceny opcji na czynniki ryzyka.

Otrzymane wyniki wskazują na to, że model J. Hulla i A. White'a, dla opcji nie będących głęboko *in - the - money* i *out of - the - money*, pozwala wycenić opcje w bardzo zbliżony sposób do modelu F. Blacka i M. Scholesa. Co ważne odbywa się to bez konieczności wprowadzania założenia stanowiącego o stałości wariancji stóp zwrotu z aktywów bazowych. W konsekwencji, dla rozsądnych *moneyness* opcji, model J. Hulla i A. White'a może stanowić interesującą alternatywę w stosunku do najczęściej wykorzystywanego podejścia do wyceny kontraktów bazujących na prawach pochodnych. Warto przy tym zauważyć, że wykorzystanie kolejnych rozwinięć szeregu Taylora w celu przejścia z modelu HW 1 do HW 2 nie ma większego wpływu na dokładność przeprowadzanej wyceny.

BIBLIOGRAFIA

Ball C., Roma A. (1994) Stochastic volatility option pricing. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 29, 589-607.

Bakshi G., Cao C., Chen Z. (1997) Empirical performance of alternative option pricing models. The Journal of Finance, 52, 2003-2049.

Bates D. (1996) Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in Deutsche mark options. The Review of Financial Studies, 9, 69-107.

Black F., Scholes M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities. The Journal of Political Economy, 81, 637-654.

Christensen B., Nielsen M. (2007) The effect of long memory in volatility on stock market fluctuations. The Review of Economics and Statistics, 89, 684-700.

Clark P. (1973) A Subordinated stochastic processes model with finite variance for speculative prices. Econometrica, 41, 135-155.

Cont R. (2007) Volatility clustering in financial markets: empirical facts and agent based models. 289-309 [in:] Teyssiere G., Kirman A. Long memory in economics, Springer.

Fama E. (1965) The behavior of stock market prices. Journal of Business, 38, 34-105.

Fama E., French K. (1992) The cross-section of expected stock returns. The Journal of Finance, 47, 427-465.

Fama E., French K. (1993) Common risk factors in the returns on stock and bonds. Journal of Financial Economics, 33, 3-56.

Forlicz M. (2011) A comparison of the behaviour of market options prices in relation to option prices resulting from the Black- Scholes model during periods of a bull and bear market. Mathematical Economics, 7, 71-81.

Garman M. (1976) General theory of asset valuation under diffusion state processes. Technical report, University of California at Berkeley.

Heston S. (1993) A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. The Review of Financial Studies, 6, 327-343.

Hull J., White A. (1987) The pricing of options on assets with stochastic volatilities. The Journal of Finance, 42, 281-300.
Lobato I., Velasco C. (2000) Long memory in stock market trading volume. Journal of Business and Economic Statistics, 18, 410-427.
Mandelbrot B. (1963) The variation of certain speculative price., Journal of Business, 36, 394-419.
Peters E. (1991) Chaos and order in the capital markets. A new view of cycles, prices and market volatility, John Wiley and Sons.
Peiro A. (1999) Skewness in financial returns. Journal of Banking and Finance, 54, 67-121.
Piontek K. (2006) Weryfikacja parytetu kupna/sprzedaży dla opcji notowanych na GPW w Warszawie - Problemy oraz przykłady strategii arbitrażowych. Metody matematyczne, ekonometryczne i informatyczne w finansach i ubezpieczeniach, cześć II, Prace Naukowe AE w Katowicach, 137-148.
Rosenberg B. (1974) Extra-market components of covariance in security returns. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 9, 263-273.
Rosenberg B., Ohlson J. (1976) The stationary distribution of returns and portfolio separation in capital markets: A fundamental contradiction. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 11, 393-402.
Scott L. (1987) Option pricing when the variance changes randomly: theory, estimation, and an application. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22, 419-438.
Stein E., Stein J. (1991) Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach. The Review of Financial Studies, 4, 727-752.

ANALYSIS OF HULL – WHITE MODEL

Abstract: In this article Hull – White model is analyzed. As a part of the subject matter theoretical aspects of the considered approach are presented. Then, empirical data is used to verify the accuracy of valuation with respect to the Black - Scholes model. In addition, the analysis of sensitivity of option pricing is performed. The results indicate that the Hull - White model allows to price options similarly to the Black – Scholes model but without imposing simplifying assumption which refers to description of the functioning of the capital market, i.e. constant variance of returns of the underlying assets.

Keywords: Hull – White model, Taylor series, option pricing