

## ANALIZA WŁAŚCIWOŚCI FRAKTALNYCH SZEREGÓW CZASOWYCH WYBRANYCH INDEKSÓW GIEŁDOWYCH

**Zuzanna Rzeszótko**

Zakład Analizy Matematycznej

Uniwersytet Przyrodniczo–Humanistyczny w Siedlcach

e-mail: zrsesz@uph.edu.pl

**Streszczenie:** W badaniach zastosowano wybrane metody analizy danych eksperymentalnych do identyfikacji chaosu deterministycznego w szeregach czasowych notowań wybranych spółek wchodzących w skład indeksu WIG-banki Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Szacowano wartość wykładnika Hursta, długości cykli, wymiar korelacyjny. Celem pracy było opracowanie i zastosowanie metodologii badania właściwości fraktalnych szeregów czasowych przy wykorzystaniu programu Mathematica.

**Słowa kluczowe:** wymiar zanurzenia, całka korelacyjna, wymiar fraktalny, analiza przeskalowanego zakresu

### WPROWADZENIE

Prognozowania finansowych szeregów czasowych próbowano początkowo dokonywać za pomocą modeli liniowych, zgodnych z teorią równowagi, stworzoną przez Leona Walrasa [patrz Walras 1954]. Zmiany w tej dziedzinie wymusił światowy kryzys, zainicjowany przez historyczny „Czarny Poniedziałek” 19 października 1987 roku, kiedy to amerykański indeks Dow Jones Industrial Average odnotował spadek o 22 procent, a zaraz potem nastąpił spadek innych indeksów giełdowych na całym świecie. Zaczęto poszukiwać nowych metod przewidywania zmian na rynkach kapitałowych. Zauważono, że rynek kapitałowy ma naturę nieliniową i nieokresową, dlatego przydatna okazała się teoria układów chaotycznych, a spośród różnych zaczerpniętych z niej metod, w badaniach

finansowych obecnie często stosowane są m.in.: wymiar korelacyjny, wymiar fraktalny, wykładnik Lapunowa, analiza przeskalowanego zakresu [Peters 1997].

Celem niniejszej pracy było przygotowanie w pakiecie Mathematica własnych procedur, pozwalających wyznaczyć niektóre z tych parametrów w oparciu o znane z literatury tematu algorytmy. Następnym krokiem było zastosowanie opracowanej metodologii do analizy szeregów czasowych cen wybranych spółek wchodzących w skład indeksu WIG-banki, notowanego na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie.

Wykorzystanie analizy fraktalnej w badaniach właściwości szeregów czasowych notowań giełdowych pozwala szacować prawdopodobieństwo określonych ruchów rynku kapitałowego oraz określić wymiar zbiorów granicznych układu dynamicznego opisującego jego zachowanie.

Zjawiska na rynku finansowym są na tyle złożone, że niemożliwe jest określenie wszystkich zmiennych systemu, można jednak bazując na danych historycznych mniejszej liczby zmiennych dokonać tzw. rekonstrukcji przestrzeni fazowej (rekonstrukcji atraktora). Pomysłodawca tej teorii, David Ruelle [Ruelle 1989], pokazał sposób odtworzenia zbioru przyciągającego, kiedy dysponujemy szeregiem czasowym tylko jednej zmiennej. Stosując tzw. metodę opóźnień, wykazał, że zarówno wymiar fraktalny, jak i rozkład wykładników Lapunowa odtworzonej przestrzeni fazowej są takie same, jak dla rzeczywistej przestrzeni fazowej dwóch zmiennych. W badaniach wykonanych na potrzeby niniejszej pracy, analizowano szereg czasowy jednej zmiennej – szereg czasowy logarytmicznych stóp zwrotu (na podstawie kursów zamknięcia) dla spółek giełdowych GPW sektora bankowego.

## PODSTAWY TEORETYCZNE

Chaos deterministyczny występuje w najprostszych układach dynamicznych dyskretnych, poczynając od wymiaru 1 (iteracje funkcji logistycznej  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax(1-x)$  czy wielomianu zespolonego  $p(z) = z^2 + c$ ,  $z, c \in \mathbb{C}$ ) oraz z czasem ciągłym, czyli w układach generowanych przez rozwiązania układów równań różniczkowych autonomicznych (w wymiarze  $n \geq 3$ ), lub nieautonomicznych (dla  $n \geq 2$ , jak na przykład przy zaburzeniach okresowych równania różniczkowego wahadła matematycznego) [Baker & Gollub 1998].

Przyjmujemy jako układ dynamiczny układ generowany przez rozwiązania równania różniczkowego

$$\dot{x} = f(x), x(0) = x_0 \quad (x \in \mathbb{R}^n) \quad (1)$$

przy założeniu, że takie zagadnienie początkowe posiada jedyne rozwiązanie  $\varphi(t)$ , określone na całej osi czasu  $\mathbb{R}$ .

W tym przypadku rodzina przekształceń  $\varphi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (gdzie  $\varphi_t(x_0)$  jest to wartość rozwiązania  $\varphi(t)$  równania  $\dot{x} = f(x)$ , spełniającego warunek początkowy

$\varphi(0) = x_0$ ) określa jednoparametrową przemienną grupę przekształceń przestrzeni  $X$  w siebie.

Zbiorem niezmienniczym względem danego układu dynamicznego nazywamy wówczas zbiór  $A$  zawarty w  $X$ , jeżeli  $\forall t \in R: \varphi_t(A) = A$ . Natomiast atraktorem powyższego układu dynamicznego nazywamy niezmienniczy zbiór domknięty  $A$ , dla którego istnieje otoczenie  $U$  zawierające  $A$  takie, że a)  $\varphi_t(U)$  jest zawarte w  $U$ , b)  $\forall x \in U \varphi_t(x) \rightarrow A$  przy  $t \rightarrow \infty$  (trajektoria jest z upływem czasu przyciągana przez atraktor  $A$ ).

Orbitą (trajektorią fazową) punktu  $x_0$  nazywa się zbiór

$$T(x_0) := \{x \in X: x = \varphi_t(x_0), t \in R\}.$$

Objętością fazową obszaru  $V$  (zawartego w  $X = R^n$ ) względem (1) w chwili  $t$  nazywa się

$$V(t) := \text{vol}[\varphi_t(V)], t \in R.$$

Zachodzi wówczas wzór Liouville'a:

$$\frac{1}{V(t)} \frac{dV(t)}{dt} = \text{div } f(x).$$

Układem dyssypatywnym (rozpraszającym) nazywa się układ dynamiczny, dla którego  $\text{div } f(x) < 0$ . Objętość fazowa takiego układu nie zależy od wyboru obszaru  $V$  i maleje do zera z upływem czasu. Dla układów dyssypatywnych wyróżnia się następujące typy atraktorów: punkty równowagi, orbity okresowe, orbity quasi-okresowe oraz dziwne atraktory.

Dziwnym atraktorem nazywa się atraktor o złożonej strukturze geometrycznej, generowany przez układ dynamiczny wrażliwy na zmianę warunków początkowych. Fraktalna struktura dziwnego atraktora, zanurzonego w konkretnej przestrzeni fazowej, określona jest przez jego wymiar, który jest zawsze mniejszy niż wymiar rozpatrywanej przestrzeni. Wiąże się to bezpośrednio z kurczeniem się objętości fazowej układu dyssypatywnego.

Deterministyczny autonomiczny układ dynamiczny (1) nazywa się układem chaotycznym, jeśli posiada dziwny atraktor.

W przypadku, gdy nie znamy równań ruchu opisujących dany układ dynamiczny, a korzystamy tylko z historycznych danych doświadczalnych, możemy korzystając z idei Pacarda [Pacard i inni 1980] odtworzyć przestrzeń fazową szeregu czasowego jednej zmiennej tzw. metodą opóźnień. Polega ona na utworzeniu  $m - 1$  „fałszywych zmiennych” układu dynamicznego, zanurzając szukany atraktor w przestrzeni  $R^m$ . Opierając się na teorii F. Takensa [Takens 1981] rozważa się ciąg wszystkich możliwych układów  $m$  kolejnych elementów szeregu czasowego  $\{Y(i)\}$  zawierającego  $N$  obserwacji:

$$[Y(1), Y(2), \dots, Y(m)], [Y(1 + \tau), Y(2 + \tau), \dots, Y(m + \tau)], \dots$$

Jest to ciąg wektorów w  $R^m$ . Każdy taki wektor nazywa się  $m$ -historią szeregu czasowego  $\{Y(i)\}$ . Twierdzenie Takensa mówi, że dla  $m$  dostatecznie dużego w stosunku do wymiaru przestrzeni stanów ( $m > 2p + 1$ ),  $m$ -wymiarowy obraz

przestrzeni stanów, którego częścią jest ciąg  $m$ -historii, oddaje w poprawny matematycznie sposób jej własności. A zatem trajektoria w przestrzeni  $R^m$  zbudowana z wykorzystaniem ciągu  $m$ -historii stanowi prawidłową rekonstrukcję trajektorii generującej badany szereg czasowy  $\{Y(i)\}$ .

W przypadku, kiedy wymiar oryginalnej przestrzeni fazowej układu nie jest znany, można znaleźć odpowiednią wartość wymiaru przestrzeni zanurzenia, obliczając tzw. wymiar korelacyjny dla coraz większych wartości  $m$ .

Punkty atraktora zagęszczają się w określonych miejscach niezależnie od wymiaru przestrzeni zanurzenia, więc od chwili, kiedy wymiar korelacyjny atraktora rekonstruowanego osiągnie wymiar atraktora „prawdziwego”, zwiększanie wymiaru przestrzeni zanurzenia nie powoduje już zwiększania się wymiaru atraktora rekonstruowanego. Dla układu losowego z kolei, punkty rekonstruowanej trajektorii wypełniają przestrzeń zanurzenia we wszystkich kierunkach, a wymiar korelacyjny nie stabilizuje się ze wzrostem wymiaru przestrzeni zanurzenia. Dla ustalania wymiaru zanurzenia w niniejszej pracy stosowano metodę związaną z wyznaczaniem wymiaru korelacyjnego, opisaną w teorii Grassbergera i Procacci [Grassberger & Procaccia 1983]. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana para punktów atraktora jest odległa od siebie o mniej niż  $\varepsilon$ , nazywa się całką korelacyjną i oznacza przez  $C(\varepsilon)$ . Zakładając, że atraktor zanurzony jest w przestrzeni euklidesowej skończonego wymiaru i oznaczając przez  $\{x_i\}$  pewną leżącą na nim trajektorię gęstą, całkę korelacyjną szacuje się za pomocą sumy korelacyjnej

$$C_k(\tau^*, m, \varepsilon) = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=j+1}^k H(\varepsilon - d(x_i, x_j))}{\binom{k}{2}}$$

gdzie

$H(\cdot)$  oznacza funkcję jednostkową Heaviside'a, tj.  $H(x) := \{1: x \geq 0; 0: x < 0\}$ . Zachodzi zależność  $C(\varepsilon) = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k(\tau^*, m, \varepsilon)$ , wymiar korelacyjny atraktora wynosi natomiast  $D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} (\log C_k(\tau^*, m, \varepsilon) / \log \varepsilon)$ .

Metoda Grassbergera-Procaccii: należy obliczyć  $D_2$  dla niskiego  $m$ , a następnie zwiększać sukcesywnie wymiar zanurzenia  $m$  o jeden i każdorazowo wyliczać ponownie wymiar korelacyjny  $D_2$ . Szukany wymiar zanurzenia  $m^*$  to ten, powyżej którego wymiar korelacyjny przestaje się zmieniać.

Złożoność struktury geometrycznej atraktora określa się za pomocą wymiaru pojemnościowego Kołmogorowa  $D_k$ , który dla zbioru ograniczonego  $S$  (zawartego w  $R^p$ ) określa się następująco

$$D_k = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log \frac{1}{r}}$$

gdzie  $N(r)$  to minimalna liczba kul o promieniu  $r$  w  $R^p$  potrzebna do pokrycia zbioru  $S$ . Wymiar pojemnościowy będący liczbą całkowitą odpowiada „regularnym” twórcom geometrycznym, podczas gdy wymiar pojemnościowy nie będący liczbą całkowitą świadczy o tym, że obiekt geometryczny ma skomplikowaną strukturę. Wyliczenie wartości  $D_k$  jest niełatwe, dlatego Grassberger i Procaccia zastąpili wyznaczanie liczby  $N(r)$  mierzaniem odległości  $\varepsilon$  pomiędzy punktami pewnej zawartej w atraktorze trajektorii  $\{x_i\}$ . Udowodniono, że jeśli punkty  $x_i$  równomiernie pokrywają atraktor, to  $D_2 = D_k$ . Ponadto, mimo, że w ogólnym przypadku  $D_2 \leq D_k$ , a więc wymiar pojemnościowy i wymiar korelacyjny nie są równe, to dla wielu znanych atraktorów wymiary te różnią się tylko nieznacznie. Przyjmuje się wobec tego, że wymiar korelacyjny może służyć za dobre oszacowanie wymiaru pojemnościowego Kołmogorowa.

Najlepsze opóźnienie czasowe  $\tau^*$  można natomiast wyznaczyć biorąc pod uwagę zależność  $D_k \times \tau = N^*$ , gdzie  $D_k$  – wymiar pojemnościowy,  $\tau$  – przesunięcie czasowe,  $N^*$  – średni okres orbitalny. Średni okres orbitalny jest to okres czasu, po upływie którego korelacja pomiędzy przebiegami czasowymi zanika, jego wartość wyznacza się na podstawie analizy przeskalowanego zakresu [Peters 1997].

Angielski hydrolog Harold Edwin Hurst opracował i wykorzystał analizę przeskalowanego zakresu (rescaled range method, metoda R/S) w celu badania wielkości wylewów Nilu. Zauważył [Hurst 1951], że szeregi czasowe różnic między wielkościami kolejnych wylewów są procesami z długą pamięcią, podobnymi do procesów ułamkowego ruchu Browna. Nie są one niezależne i nie mają rozkładu normalnego. Hurst zdefiniował stałą  $H$ , mierzącą ułamkowy ruch Browna, a także znalazł sposób jej wyznaczania – metodę przeskalowanego zakresu, która pozwala sprawdzić, czy badany proces zachowuje się jak błądzenie przypadkowe. Zakres zmienności procesu można opisać równaniem:

$$(R/S)_n = cn^H$$

gdzie:  $(R/S)_n$  – (przeskalowany) zakres zmienności  $n$  obserwacji,  $n$  – liczba obserwacji,  $H$  – tzw. wykładnik Hursta,  $c$  – dodatnia stała.

Stała  $H$  mierzy stopień „poszarpania” obiektów fraktalnych, a jej wartość mieści się w granicach 0 i 1. Jak się okazuje, wymiar fraktalny i wykładnik Hursta są ściśle związane, a mianowicie łączą je zależność  $D = 2 - H$ .

Dla procesu błądzenia przypadkowego wykładnik Hursta  $H = 0,5$ , czyli zakres zmienności zwiększa się z pierwiastkiem liczby obserwacji. Procesy, dla których  $0,5 < H < 1$  są nazywane persystentnymi, tzn. jeśli w ostatnim okresie zaobserwowano wzrost/spadek, to najbardziej prawdopodobne jest, że w następnym okresie również zostanie odnotowany wzrost/spadek. Mówi się w tym przypadku o tzw. długiej pamięci (funkcja autokorelacyjna maleje w wolnym tempie). Procesy, dla których  $0 < H < 0,5$  określa się mianem antypersystentnych. Charakteryzują się one tendencją do szybkich zmian. Najbardziej prawdopodobne jest, że najbliższa zmiana wartości realizacji procesu

będzie przeciwnego rodzaju w stosunku do zmiany poprzedniej, po wzroście najczęściej następuje spadek, a po spadku wzrost.

Badanie wykładnika Hursta wykorzystuje się również do wykrywania cykli. Procesy cykliczne są persystentne, ponieważ zmiany kierunku trendu następują stosunkowo rzadko. Dla takiego procesu wartość  $H$  dla  $n$  krótszych od średniej długości cyklu powinna być wyższa niż 0,5. Spadek wartości wykładnika Hursta dla pewnej wartości  $N^*$  do poziomu 0,5 lub niżej oznacza, że proces traci „długą pamięć”. Wartość  $N^*$ , dla której następuje taka zmiana, oznacza przeciętną długość cyklu [Peters 1997].

Algorytm wyznaczania wartości  $(R/S)_n$  przeskalowanego zakresu na podstawie danego szeregu czasowego można znaleźć w pracy [Peters 1997]. Wielkość  $(R/S)_n$  oznacza pewną średnią obliczaną dla danego zbioru danych, przy zastosowaniu podziału tego zbioru na rozłączne przedziały długości  $n$ . Schemat ten powtarza się dla kolejnych wartości  $n$ , a następnie stosuje się regresję liniową  $Y$  względem  $X$ , gdzie  $Y = \log(R/S)_n$  oraz  $X = \log n$ , a współczynnik kierunkowy linii regresji określa wartość wykładnika Hursta. Dla odpowiednio dużych  $n$ , otrzymujemy wynik  $H = 0.5$ . Oznacza to, że zanika pamięć długookresowa i proces zaczyna się zachowywać jak proces błędzenia przypadkowego. Punkt załamania  $N^*$ , w którym wykres zmienia nachylenie (a wykładnik  $H > 0.5$  zmienia się na  $H = 0.5$ ), nie tylko wyznacza długość cyklu, ale pozwala wyliczyć wielkość przesunięcia czasowego  $\tau$ , niezbędnego dla rekonstrukcji atryktora.

Analiza statystyki  $V$  określonej wzorem  $V_n = ((R/S)_n)/\sqrt{n}$  pozwala dokładniej określić momenty zmiany charakterystyki badanego procesu. Dla procesu losowego i niezależnego wykres  $V_n$  względem  $\log n$  to pozioma linia, dla procesu persystentnego – funkcja rosnąca, a dla antypersystentnego – malejąca. Wychwytyjąc miejsca, w których wykres osiąga maksimum lokalne, znajdujemy moment, w którym pamięć układu zanika, co pozwala oszacować średnią długość cyklu.

W celu sprawdzenia czy badany szereg jest losowy, należy ponadto porównać otrzymany wykładnik Hursta  $H_{emp}$  z wartością oczekiwaną  $H_{teor} = E(H)$  wykładnika szeregu losowego tej samej długości. W niniejszej pracy wykorzystano w tym celu wzór opracowany przez J. Purczyńskiego [Purczyński 2000]:

$$E(R/S)_n = \begin{cases} \frac{n - 0,5}{n} \cdot \frac{\text{Gamma}(0,5(n - 1))}{\sqrt{\pi} \text{Gamma}(0,5 n)} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-i}{i}} & \text{dla } n < 30, \\ \frac{(n - 0,5)(n - 0,2491)}{(n - 1)\sqrt{n\pi/2}} \cdot \left( \frac{\pi}{2} + \frac{-2,4718 + 3,5466n - 1,4635n^2}{(n - 1)^{2,5}} \right) & \text{dla } n \geq 30. \end{cases}$$

Zależność  $H_{emp} > H_{teor}$  potwierdza występowanie efektu długiej pamięci oraz długotrwałej autokorelacji, a zależność przeciwna oznacza, że szereg jest bardziej zmienny.

## ANALIZA DANYCH EKSPERYMENTALNYCH

Analizie poddano szeregi czasowe tygodniowych logarytmicznych stóp zwrotu akcji sektora bankowego z okresów, jak podano w tabeli 1. Spośród wszystkich spółek wchodzących w skład indeksu WIG-banki wybrano te, które są notowane na GPW w Warszawie od ponad 10-u lat. Otrzymanie miarodajnych wyników analizy przeskalowanego zakresu jest bowiem możliwe tylko dla odpowiednio długich szeregów czasowych [Peters 1997].

Tabela 1. Liczba i zakres czasowy danych dziennych wykorzystanych do badań

Spółka	L. danych dziennych	Czasowy zakres danych	Spółka	L. danych dziennych	Czasowy zakres danych
MIL	5703	18.08.1992-29.04.2016	BHW	4714	30.06.1997-29.04.2016
MBANK	5698	06.10.1992-29.04.2016	PKO SA	4390	01.07.1998-07.01.2016
BZW	5596	22.06.1993-29.04.2016	BOS	4117	03.02.1997-29.04.2016
ING	5514	25.01.1994-29.04.2016	PKO BP	2872	10.11.2004-29.04.2016
BPH	5304	07.02.1995-29.04.2016			

Źródło: opracowanie własne

Prognozowanie danego szeregu czasowego rozpoczęto od testu  $\chi$ -kwadrat normalności rozkładu (por. [Rzeszółtko 2011]). Parametry:  $l = 2$  (wartość średnia i odchylenie standardowe),  $r = 4$  klasy, liczba stopni swobody  $k = r - l - 1 = 1$ ,  $\chi^2$  ( $\alpha = 0,05, k = 1$ ) = 3,84146 (tablice).

Wyniki testu  $\chi$ -kwadrat rozkładu danych (tabela 2) pokazują, że żaden z rozważanych szeregów czasowych nie podlega rozkładowi normalnemu.

Tabela 2. Wyliczona dla kolejnych spółek wartość  $\chi_{emp}^2$ 

Spółka	Dane tyg.	$\chi_{emp}^2$	Spółka	Dane tyg.	$\chi_{emp}^2$
MIL	1140	124,767	BHW	942	234,17
MBANK	1139	202,735	PKO SA	878	6,29165
BZW	1119	240,109	BOS	823	368,612
ING	1102	60,3137	PKO BP	574	15,8012
BPH	1060	217,114			

Źródło: opracowanie własne

Następnym krokiem badań było przeprowadzenie analizy przeskalowanego zakresu i oszacowanie wartości empirycznej oraz teoretycznej wykładnika Hursta, a następnie oszacowanie długości cyklu. W poniższej tabeli 3 zestawiono wyniki wyznaczone dla szeregów czasowych tygodniowych logarytmicznych stóp zwrotu.

Tabela 3. Oszacowane wartości długości cyklu  $N^*$  (w latach) oraz zestawienie wartości teoretycznych i empirycznych wykładnika Hursta dla rozpatrywanych spółek

Spółka	L. danych tyg.	$N^*$	$H_{emp}$	$H_{teor}$	Spółka	L. danych tyg.	$N^*$	$H_{emp}$	$H_{teor}$
MIL	1140	8,96	0,66	0,56	BHW	942	7,1	0,60	0,56
MBANK	1139	8,65	0,63	0,56	PKO SA	878	7,1	<u>0,56</u>	<u>0,56</u>
BZW	1119	8,96	0,65	0,56	BOS	823	6,5	0,64	0,56
ING	1102	6,96	0,61	0,56	PKO BP	574	5,58	<u>0,61</u>	<u>0,57</u>
BPH	1060	4	0,54	0,57					

Źródło: obliczenia własne

W przypadkach, gdy warunek  $H_{emp} - H_{teor} \geq \sqrt{1/N}$  nie jest spełniony, wyniki wyróżniono podkreśleniem, jako statystycznie nieznaczące,

Korzystając z zależności  $D = 2 - H$ , wyznaczono również wymiar fraktalny  $D$  (tabela 4).

Tabela 4. Empiryczna wartość wykładnika Hursta  $H_{emp}$  i szacowany wymiar fraktalny  $D$

Spółka	$H_{emp}$	$D$	Spółka	$H_{emp}$	$D$
MIL	0,66	1,34	BHW	0,60	1,4
MBANK	0,63	1,37	PEO	<u>0,56</u>	<u>1,44</u>
BZW	0,65	1,35	BOS	0,64	1,36
ING	0,61	1,39	PKO BP	<u>0,61</u>	<u>1,39</u>
BPH	0,54	1,46			

Źródło: obliczenia własne

Za pomocą statystyki  $V$  wyznaczono następnie inne (często krótsze) cykle występujące w badanych szeregach czasowych (patrz tabela 5). Zestawiono je z wynikami szacowania długości cyklu uzyskanymi bez wykorzystania tej metody (patrz tabela 3).



Tabela 5. Długości cykli  $N^*$  podane w latach oszacowane na podstawie statystyki  $V$  i bez jej wykorzystania (wyznaczane dla przyrostów tygodniowych)

Spółka	Dane	$N^*$ wg $V$	$N^*$	Spółka	Dane	$N^*$ wg $V$	$N^*$
MIL	1140	8,19; 10,65	8,96	BHW	942	3,12; 4,8; 5,12; 6,96; 8,35	7,1
MBANK	1139	4,35; 5,42; 6,35; 8,19	8,65	PKO SA	878	2,5; 3,58; 4,96; 5,73; 6,65	7,1
BZW	1119	2,5; 5,88; 6,81; 7,73; 8,81; 9,88	8,96	BOS	823	3,42; 6,35; 6,65	6,5
ING	1102	2,96; 3,88; 6,81; 7,3	6,96	PKO BP	574	1,88; 3,73; 5,27	5,6
BPH	1060	1,88; 2,65; 3,88; 6,04; 6,96; 9,12	4				

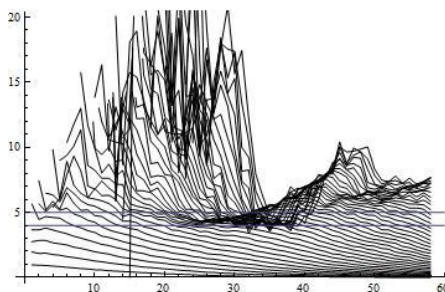
Źródło: obliczenia własne

### Ustalanie wymiaru korelacyjnego

Procedura wyznaczania wymiaru korelacyjnego polega w praktyce na wykonaniu wykresów przedstawiających w skali logarytmicznej zależność całki korelacyjnej  $C(\epsilon)$  od  $\epsilon$  dla zanurzeń trajektorii generującej badany szereg czasowy w przestrzeni  $R^m$  (w pracy  $m = 1, 2, \dots, 40$ ), a następnie na dobraniu dla każdej z tych krzywych (metodą regresji liniowej) prostej przybliżającej ją na pewnym przedziale. Z definicji wymiaru korelacyjnego wynika (przy założeniu, że na rozważanym przedziale całka korelacyjna zachowuje się jak potęga  $\epsilon$ ), że współczynnik kierunkowy takiej prostej jest równy odpowiedniemu wymiarowi korelacyjnemu.

Na rysunku 1 zamieszczono wykresy „pochodnych” kolejnych krzywych dla spółki sektora bankowego BOS. Ich wartości w środkowej części wykresów stabilizują się (w sensie zależności od  $r$  i  $m$ ) na poziomie około 5, a więc liczbę tę możemy przyjąć jako oszacowanie wymiaru korelacyjnego atraktora zrekonstruowanego. Tym samym, na mocy twierdzenia Takensa, atraktorowi „prawdziwemu” również odpowiada wymiar korelacyjny równy  $D_2 = 5$ .

Rysunek 1. Szacowanie wymiaru korelacyjnego dla szeregu stóp zwrotu spółki BOS (Bank Ochrony Środowiska)



Źródło: obliczenia własne

Niestety spośród badanych dziewięciu szeregów czasowych, tylko dla dwóch udało się zaobserwować stabilizację wymiaru korelacyjnego (dla spółki BOS na poziomie około 5 oraz dla ING około 7). W obu przypadkach odpowiednie okazało się opóźnienie czasowe  $\tau = 1$ . Generowane przez te szeregi układy dynamiczne nie mogą być więc opisane przez liczbę zmiennych mniejszą niż 5 i odpowiednio 7.

## PODSUMOWANIE

W pracy zaprezentowano wyniki badania szeregów stóp zwrotu wybranych spółek wchodzących w skład indeksu WIG-banki, notowanych na GPW, za pomocą analizy fraktalnej. Oszacowane wartości wykładnika Hursta wskazują na występowanie pamięci długookresowej w tych szeregach. Podjęto również próbę oszacowania wymiaru korelacyjnego rozważanych szeregów czasowych. Brak stabilizacji wymiaru korelacyjnego dla spółek MIL, MBANK, BZW, BHW, PKO SA i PKO BP oraz BPH może świadczyć o losowości odpowiadających im szeregów czasowych stóp zwrotu. Być może jednak wykorzystanie metod redukcji szumu do tych szeregów, pozwoli na wyznaczenie odpowiadających im wartości  $D_2$ . Będzie to celem dalszych badań.

## BIBLIOGRAFIA

- Baker G. L., Gollub J. P. (1998) Wstęp do dynamiki układów chaotycznych. PWN, Warszawa.
- Grassberger P., Procaccia I. (1983) Characterization of strange attractors. *Physical Review Letters*, 50, (5), 346 – 349.
- Hurst H.E. (1951) Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of American Society of Civil Engineers* 116, 770 – 799.
- Pacard N. H., Crutchfield J. P., Farmer J. D., Shaw R. S. (1980) Geometry from a time series. *Physical Review Letters*, 45, (9), 712 – 716.
- Peters E. E. (1997) *Teoria Chaosu a Rynki Kapitałowe: nowe spojrzenie na cykle, ceny i ryzyko*. WIG Press, Warszawa.
- Purczyński J. (2000) Wybrane problemy numeryczne stosowania analizy R/S. *Przegląd Statystyczny*, XLVII/1 – 2, 17 – 21.
- Ruelle D. (1989) *Chaotic Evolution and Strange Attractors*. Cambridge U. P.
- Rzeszółtko Z. (2011) Fractal analysis of market indices: Estimating the Hurst exponent using rescaled range method. *Monografia naukowa: Computer Algebra Systems in Teaching and Research (Mathematical Modeling in Physics, Civil Engineering, Economics and Finance)*. Wyd. Collegium Mazovia, Siedlce, 289 – 299.
- Takens F. (1981) Detecting strange attractors in turbulence. [in:] D. Rand, L. S. Young (eds.) *Dynamical Systems and Turbulence*. Warwick 1980, *Lecture Notes in Mathematics*, 898, 366 – 381.
- Walras, L. ((1954) (1877)) *Elements of Pure Economics*. Translated by William Jaffe, London: Allen&Unwin; Homewood, III: Irwin.

**THE ANALYSIS OF FRACTAL PROPERTIES FOR TIME SERIES  
OF SOME MARKET INDICES**

**Abstract:** In this work a few methods of experimental data analysis have been applied to identify deterministic chaos in the behaviour of some financial time series. The value of the Hurst exponent, the length of cycle, the generalized fractal dimension and the minimal number of variables, fully characterizing the given dynamical system have been estimated. The calculations have been done by use of computer algebra system Mathematica. The aim of the author was to work out the methodology of investigation for fractal properties in empirical time series using this computer programme.

**Keywords:** embedding dimension, correlation sum, fractal dimension, rescaled range analysis