

PORÓWNANIE ESTYMATORA NAJWIĘKSZEJ WIAROGODNOŚCI Z ESTYMATOREM NIEOBCIĄŻONYM ODSETKA PYTAŃ DRAŻLIWYCH W MODELU KRZYŻOWYM NIEZRANDOMIZOWANYCH ODPOWIEDZI

Stanisław Jaworski  <https://orcid.org/0000-0002-6169-2886>

Institut Ekonomii i Finansów

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

e-mail: stanislaw_jaworski@sggw.edu.pl

Streszczenie: Jednym z problemów w badaniach ankietowych jest szacowanie odsetka odpowiedzi na pytania drażliwe. Wymaga on stosowania specjalnych modeli odpowiedzi. Pierwszym tego typu modelem był model zrandomizowanych odpowiedzi [Warner 1965]. Obecnie istnieje wiele innych modeli. Wśród nich znajduje się krzyżowy model niezrandomizowanych odpowiedzi [Yu i in. 2008]. Estymator odsetka pytań drażliwych w tym modelu może przyjmować wartości spoza przedziału $\langle 0, 1 \rangle$. W pracy zostanie pokazany wpływ, jaki na własności tego estymatora ma jego zawężenie do przedziału $\langle 0, 1 \rangle$.

Słowa kluczowe: pytania drażliwe, krzyżowy model nierandomizowanych odpowiedzi

JEL classification: C83, C99

WSTĘP

W badaniach ankietowych możemy być zainteresowani oszacowaniem odsetka odpowiedzi na pytania drażliwe. Są to takie pytania, na które respondenci mogą celowo nie udzielić rzetelnej odpowiedzi. Pytania drażliwe wymagają stosowania specjalnych modeli, które pozwalają zachować anonimowość odpowiedzi respondenta przed ankierem. Pierwszym takim modelem był *model zrandomizowanych odpowiedzi* [Warner 1965]. Warner zaproponował, aby zadać respondentowi dwa przeciwstawne pytania, na przykład:

<https://doi.org/10.22630/MIBE.2022.23.2.4>

- a) *Czy był Pan uczciwy w sprawach podatkowych?*
- b) *Czy był Pan nieuczciwy w sprawach podatkowych?*

Respondent ma odpowiedzieć tylko na jedno z tych dwóch pytań, w zależności od wyniku przeprowadzonego doświadczenia losowego. Zgodnie z pomysłem Warnera wynik doświadczenia ma być znany jedynie respondentowi, przez co ankieter nie wie, na które pytanie jest udzielana odpowiedź. Ponieważ każdy respondent przeprowadza to samo doświadczenie, prawdopodobieństwo, że zostanie udzielona odpowiedź na pytanie pierwsze (albo drugie) jest znane.

W praktyce model Warnera nie zawsze daje się zastosować. Najogólniej mówiąc powodem jest natura ludzka. Po pierwsze ludzie nie chcą odpowiadać na pytania drażliwe, nawet przeciwstawne. Po drugie podejrzewają, że wynik doświadczenia jest tylko pozornie losowy. Z tego powodu model Warnera został zmodyfikowany. Pierwszą modyfikacją jest zastąpienie jednego z pytań drażliwych pytaniem neutralnym, na przykład: *Czy urodził się Pan w pierwszym kwartale roku?* Drugą modyfikacją jest sposób udzielania odpowiedzi, przez co można zrezygnować z przeprowadzania doświadczenia losowego, które nie tylko wzbudza u respondenta wspomniane powyżej podejrzenia, ale również niekorzystnie wydłuża czas przeprowadzania ankiety. W efekcie powstały *modele niezrandomizowanych odpowiedzi* [Yu i in. 2008].

Modele zrandomizowanych i niezrandomizowanych odpowiedzi zostały wprowadzone w celu lepszej współpracy z respondentem, co ma uwiarygodnić wyniki przeprowadzanych ankiet. Zwróćmy jednak uwagę na to, że zarówno randomizacja oraz zastąpienie pytania drażliwego neutralnym wprowadza do modelu odpowiedzi dodatkową niepewność. W efekcie estymatory dla odsetka pytań w takich modelach będą charakteryzować się większą wariancją, niż w przypadku, gdyby respondenci odpowiadali wprost na pytanie drażliwe w klasycznym *modelu jednej odpowiedzi*.

MODEL KRZYŻOWY NIEZRANDOMIZOWANYCH ODPOWIEDZI

W modelu krzyżowym niezrandomizowanych odpowiedzi zadawane są dwa pytania, drażliwe i neutralne. Jeżeli respondent może odpowiedzieć na oba twierdząco, wpisuje do ankiety *TAK*. Jeżeli na oba może odpowiedzieć przecząco, również wpisuje *TAK*. W przeciwnym razie wpisuje *NIE*. Przy czym ważne jest, aby oba pytania były tak dobrane, aby udzielane na nie odpowiedzi respondenta były realizacjami niezależnych zmiennych losowych.

Formalnie, niech Z oznacza zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym, która przyjmuje wartość 1, gdy respondent na oba pytania udzieliłby tej samej odpowiedzi oraz 0 w przeciwnym przypadku. Niech ρ oznacza prawdo-

podobieństwo przyjęcia przez Z wartości 1. Zatem

$$\rho = q\pi + (1 - q)(1 - \pi), \quad (1)$$

gdzie π i q oznaczają prawdopodobieństwa, że respondent odpowiedziałby twierdząco odpowiednio na pytanie drażliwe oraz neutralne. Próba niezależnych zmiennych losowych Z_1, \dots, Z_n o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa, co Z , opisuje wyniki ankiet przeprowadzonych wśród reprezentatywnej próby n respondentów. Estymatorem Największej Wiarygodności (*ENW*) prawdopodobieństwa ρ jest $\hat{\rho} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$. Jest on również estymatorem nieobciążonym dla ρ . Stąd na podstawie równania (1) można przyjąć, że

$$\hat{\pi} = \frac{\hat{\rho} - (1 - q)}{2q - 1} \quad (2)$$

jest nieobciążonym estymatorem prawdopodobieństwa π o wariancji

$$Var_{\pi}(\hat{\pi}) = \frac{\rho(1 - \rho)}{n(2q - 1)^2} = \frac{\pi(1 - \pi)}{n} + \frac{(1 - q)q}{n(2q - 1)^2}. \quad (3)$$

Zwróćmy uwagę, że estymator ten nie istnieje, gdy $q = 0.5$. Jest to przypadek, w którym $\rho = 0.5\pi + 0.5(1 - \pi) = 0.5$, co oznacza, że wyniki przeprowadzonych ankiet nie zależą od odsetka pytań drażliwych i stąd nie można go na ich podstawie oszacować. Dlatego w prezentowanym modelu zakłada się, że $q \neq 0.5$. W przypadku gdy $q = 0$ lub $q = 1$, model niezrandomizowanych odpowiedzi sprowadza się do modelu jednej odpowiedzi. Dlatego przyjmuje się założenie, że $q \in (0, 1) \setminus \{0.5\}$. Zauważmy, że wariancja estymatora odsetka pytań drażliwych w modelu niezrandomizowanych odpowiedzi, w porównaniu z modelem jednej odpowiedzi, jest większa o wartość $\frac{(1 - q)q}{n(2q - 1)^2}$. Jest to cena, jaką trzeba zapłacić za wiarygodność odpowiedzi respondenta.

Yu i in. [2008] zauważyli, że estymator $\hat{\pi}$ może przyjmować wartości mniejsze od zera, gdy $\hat{\rho} < (1 - q)$ oraz wartości większe niż jeden, gdy $\hat{\rho} > q$. Stąd zaproponowali oni dość naturalną modyfikację estymatora $\hat{\pi}$, określając tym samym *ENW* dla prawdopodobieństwa π :

$$\hat{\pi}_M = \max\{0, \min\{\hat{\pi}, 1\}\} \quad (4)$$

Udowodnili również, że estymator $\hat{\pi}$ oraz $\hat{\pi}_M$ są asymptotycznie równoważne. Stąd za podstawę konstrukcji asymptotycznych przedziałów ufności przyjęli parametry estymatora $\hat{\pi}$. W jednej wersji użyli oszacowania zarówno wartości średniej oraz wariancji, a w drugiej tylko wartości średniej. Druga wersja w

stosunku do pierwszej wymaga rozwiązywania dodatkowego równania kwadratowego.

PARAMETRY ESTYMATORA UCIEŃTEGO

Niech $[x]$ oznacza cechę górną, a $\lceil x \rceil$ część całkowitą liczby rzeczywistej x . Zgodnie z tymi oznaczeniami

$$\begin{aligned} E_{\pi}(\hat{\pi}_M) &= \sum_{k=0}^n \max \left\{ \min \left\{ \frac{k/n - (1-q)}{2q-1}, 1 \right\}, 0 \right\} \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor nq \rfloor} 1 \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} + \sum_{k=\lfloor nq \rfloor+1}^{\lceil n(1-q) \rceil-1} \frac{k/n - (1-q)}{2q-1} \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} + \\ &+ \sum_{k=\lceil n(1-q) \rceil}^n 0 \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} \end{aligned} \quad (5)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \pi &= \sum_{k=0}^{\lfloor nq \rfloor} \frac{k/n - (1-q)}{2q-1} \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} + \\ &+ \sum_{k=\lfloor nq \rfloor+1}^{\lceil n(1-q) \rceil-1} \frac{k/n - (1-q)}{2q-1} \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} + \\ &+ \sum_{k=\lceil n(1-q) \rceil}^n \frac{k/n - (1-q)}{2q-1} \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} \quad , \end{aligned} \quad (6)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} E_{\pi}(\hat{\pi}_M) - \pi &= \sum_{k=0}^{\lfloor nq \rfloor} \left(1 - \frac{k/n - (1-q)}{2q-1} \right) \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} - \\ &- \sum_{k=\lceil n(1-q) \rceil}^n \frac{k/n - (1-q)}{2q-1} \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k}. \end{aligned} \quad (7)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \sum_{k=\lceil n(1-q) \rceil}^n \frac{k/n - (1-q)}{2q-1} \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} &= \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor nq \rfloor} \frac{((n-k)/n - (1-q))}{2q-1} \binom{n}{n-k} \rho^{n-k} (1-\rho)^k, \quad (8) \end{aligned}$$

otrzymujemy równanie na obciążenie $Bias_\pi(\hat{\pi}_M)$ estymatora $\hat{\pi}_M$

$$\begin{aligned} Bias_\pi(\hat{\pi}_M) &= E_\pi(\hat{\pi}_M) - \pi = \\ &= \frac{1}{2q-1} \sum_{k=0}^{\lfloor nq \rfloor} \binom{n}{k} \left(q - \frac{k}{n} \right) \left[(1-\rho)^{n-k} \rho^k - (1-\rho)^k \rho^{n-k} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Z równania (9) wynika, że estymator $E_\pi \hat{\pi}_M$ jest obciążony. Przy założeniu że $q < 0.5$, obciążenie to jest dodatnie dla $\rho > 0.5$ i ujemne dla $\rho < 0.5$. Stąd dla $q < 0.5$ zachodzi $Bias_\pi(\hat{\pi}_M) > 0 \iff \pi < 0.5$, ponieważ z równania (1) wynika, że $\rho > 0.5 \iff \pi < 0.5$ (dla $q < 0.5$). W szczególności można pokazać, że

$$Bias_\pi(\hat{\pi}_M) = -Bias_{1-\pi}(\hat{\pi}_M) < 0 \quad (\forall \pi, q \in (0, 0.5)) \quad (10)$$

Znak obciążenia estymatora zależy więc od tego, czy wartość interesującego nas prawdopodobieństwa π jest większa, czy mniejsza od 0.5. Na przykład, jeżeli pytanie drażliwe oraz pytanie neutralne dotyczą rzadkich zjawisk, to ENW dla π będzie dawać zawyżoną wartość oszacowania. Z kolei estymator nieobciążony może w takim przypadku dawać wartości ujemne z prawdopodobieństwem $P_\pi\{\hat{\pi} < 0\} = 1 - F_{n,\rho}(\lfloor n(1-q) \rfloor)$, gdzie $F_{n,\rho}$ oznacza dystrybuantę rozkładu dwumianowego z parametrami n i ρ (prawdopodobieństwo sukcesu).

Korzystając z równości $Var_\pi(\hat{\pi}_M) = E_\pi \hat{\pi}_M^2 - (E_\pi \hat{\pi}_M)^2$ wariancję estymatora $\hat{\pi}_M$ możemy wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} Var_\pi(\hat{\pi}_M) &= F_{n,\rho}(\lfloor nq \rfloor) + \\ &+ \sum_{k=\lfloor nq \rfloor+1}^{\lceil n(1-q) \rceil-1} \left(\frac{\frac{k}{n} - 1 - q}{2q-1} \right)^2 \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-1} - (\pi + Bias(\hat{\pi}_M))^2 \end{aligned} \quad (11)$$

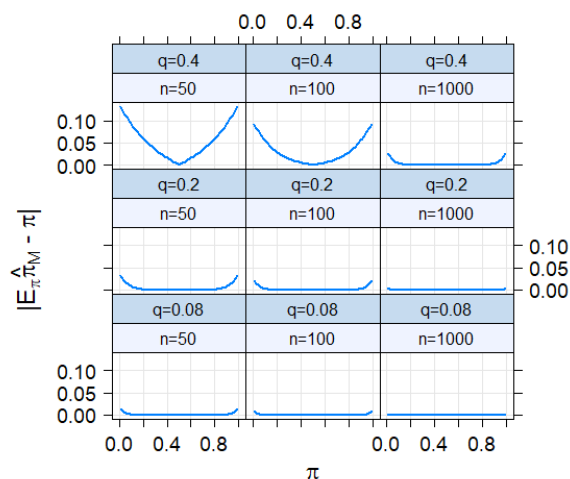
$\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x .

PORÓWNANIE PARAMETRÓW

Porównanie wartości oczekiwanych estymatorów $\hat{\pi}_M$ oraz $\hat{\pi}$ zostanie przedstawione dla kombinacji $n \in \{50, 100, 1000\}$ oraz $q \in \{0.08, 0.2, 0.4\}$ względem $\pi \in (0.1, 0.49)$. Wykres na rysunku 1 przedstawia zależność $|E_\pi \hat{\pi}_M - \pi|$ od π . Zauważmy, że $Bias_\pi(\hat{\pi}_M) = E_\pi \hat{\pi}_M - \pi = E_\pi \hat{\pi}_M - E_\pi \hat{\pi}$. Wykres na rysunku 1 jest symetryczny względem prostej $\pi = 0.5$, co wynika z równania (9). Bezwzględne obciążenie estymatora $\hat{\pi}_M$ może być problematyczne dla π bliskich wartości 0 oraz 1. To jak duży problem może stanowić takie obciążenie, zależy od badanego problemu. Z niedoszacowania lub przeszacowania

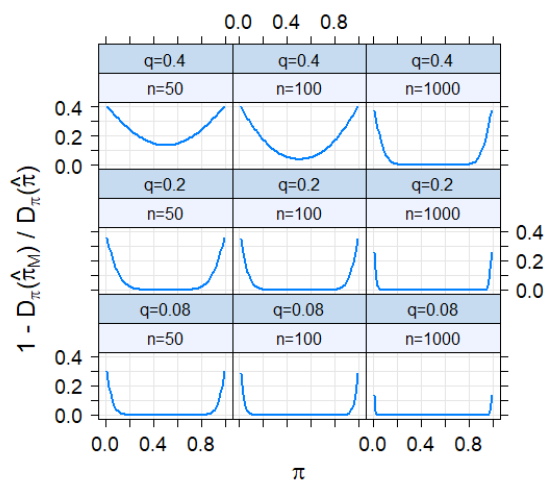
skali badanego zjawiska mogą wynikać całkiem wymierne koszty społeczne lub finansowe. Nieważne jest więc, czy obciążenie, które zostało zilustrowane na rysunku 1 wydaje się nam duże czy małe.

Rysunek 1. Wykres zbioru $\{(\pi, |E_{\pi} \hat{\pi}_M - \pi|) : \pi \in \langle 0.01, 0.99 \rangle\}$ dla $q \in \{0.08, 0.2, 0.4\}$ oraz $n \in \{50, 100, 1000\}$.



Źródło: obliczenia własne

Rysunek 2. Wykres zbioru $\{(\pi, (D_{\pi} \hat{\pi} - D_{\pi} \hat{\pi}_M) / D_{\pi} \hat{\pi}) : \pi \in \langle 0.01, 0.99 \rangle\}$ dla $q \in \{0.08, 0.2, 0.4\}$ oraz $n \in \{50, 100, 1000\}$.



Źródło: obliczenia własne

Zmodyfikowany estymator $\hat{\pi}_M$ wartości ujemne estymatora $\hat{\pi}$ zamienia na zero, a wartości powyżej jedynki na jeden. Powoduje to jego obciążenia, ale jednocześnie zmniejsza zróżnicowanie. Na rysunku 2 zilustrowano względną różnicę odchylenia standardowego $D_\pi(\hat{\pi}_M)$ estymatora uciętego względem odchylenia standardowego $D_\pi(\hat{\pi})$ estymatora nieobciążonego.

Na przykład dla wartości π zbliżonej do 0.01 lub 0.99 odchylenie standardowe estymatora ENW może być mniejsze o ok. 30% od odchylenia standardowego estymatora nieobciążonego. Mniejsze odchylenie standardowe może stanowić rekompensatę za obciążenie, co może okazać się istotne przy szacowaniu skali zjawisk rzadkich, do których często odnoszą się pytania drażliwe. Na przykład liczba zarejestrowanych w Polsce przypadków HIV w 2021 wyniosła 1173 [NIZP 2022], co stanowi ok. 3‰ populacji Polski.

PRZEDZIAŁY UFNOŚCI

Niech $CI(q, E)$ oznacza przedział ufności dla π , który jest konstruowany przy zadanym q w oparciu o estymator E . Niech $d(CI(q, E))$ oznacza długość tego przedziału oraz $\bar{d}_\pi(CI(q, E))$ jego średnią długość pod warunkiem, że przedział ten pokrywa szacowany parametr π . Dokładniej mówiąc $\bar{d}_\pi(CI(q, E))$ jest warunkową wartością oczekiwaną $E_\pi[d_\pi(CI(q, E)) | \pi \in CI(q, E)]$. W szczególności rozważymy przedziały o następującej postaci:

$$CI(0.08, \hat{\pi}) = \{\pi \in (0, 1) : (\hat{\pi} - \pi)^2 / \text{Var}_\pi(\hat{\pi}) < 1.96^2\}$$

$$CI(0.08, \hat{\pi}_M) = \{\pi \in (0, 1) : (\hat{\pi}_M - E_\pi \hat{\pi}_M)^2 / \text{Var}_\pi(\hat{\pi}_M) < 1.96^2\}.$$

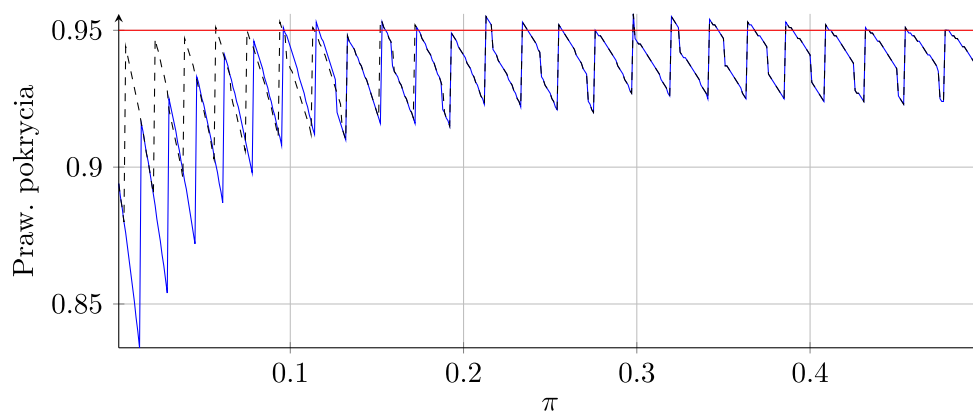
Są to asymptotyczne przedziały ufności, których konstrukcja oparta jest na Centralnym Twierdzeniu Granicznym. Jako poziom ufności przyjęto 0.95. Wartość 1.96 jest kwantylem rzędu 0.975 standardowego rozkładu normalnego. Wartość $q = 0.08$ została dobrana według przykładowego pytania neutralnego zamieszczonego w pracach takich autorów, jak Horvitz i in. [1967], Greenberg i in. [1969] oraz Yu i in. [2008].

Asymptotyczne przedziały ufności nie trzymają założonego poziomu ufności. Na rysunku 3 oraz 4 zostały pokazane rzeczywiste prawdopodobieństwa pokrycia parametru π dla rozmiaru próby $n = 50$ oraz $n = 100$.

Prawdopodobieństwa pokrycia parametru przez oba rozważane przedziały ufności są prawie identyczne od wartości ok. 0.1. Wykresy pokrycia są symetryczne względem wartości 0.5, dlatego na rysunku 3 oraz rysunku 4 przedstawiono je tylko dla $\pi \in (0, 0.5)$. Zwróćmy uwagę, że dla większości wartości prawdopodobieństwa π rzeczywiste prawdopodobieństwo pokrycia jest poniżej założonego poziomu ufności 0.95. Ma to miejsce także wtedy, gdy rozmiar próby jest stosunkowo wysoki (dla $n = 100$). Zieliński [2021] zaproponował, aby

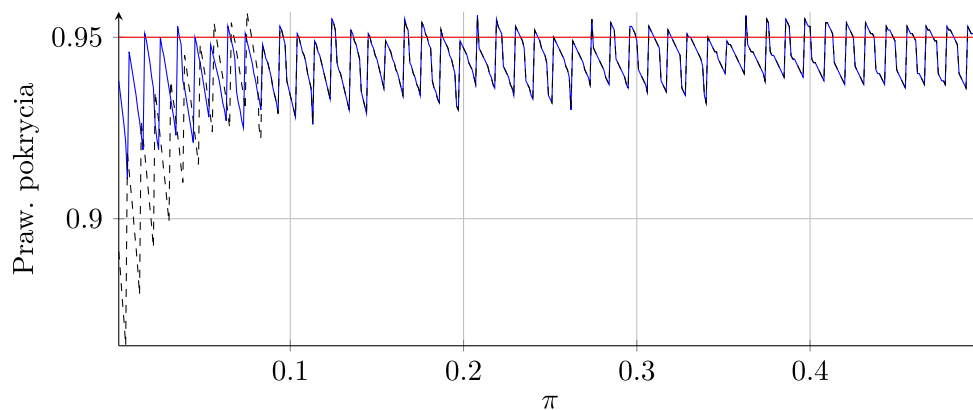
w takim przypadku stosować konstrukcję dokładnego przedziału ufności dla prawdopodobieństwa π . Ogólną konstrukcję takiego przedziału podali [Clopper i Pearson \[1934\]](#).

Rysunek 3. Prawdopodobieństwo pokrycia dla $n = 50$. Ciągła linia dla $\hat{\pi}$, przerywana dla $\hat{\pi}_M$.



Źródło: obliczenia własne

Rysunek 4. Prawdopodobieństwo pokrycia dla $n = 100$. Ciągła linia dla $\hat{\pi}$, przerywana dla $\hat{\pi}_M$.

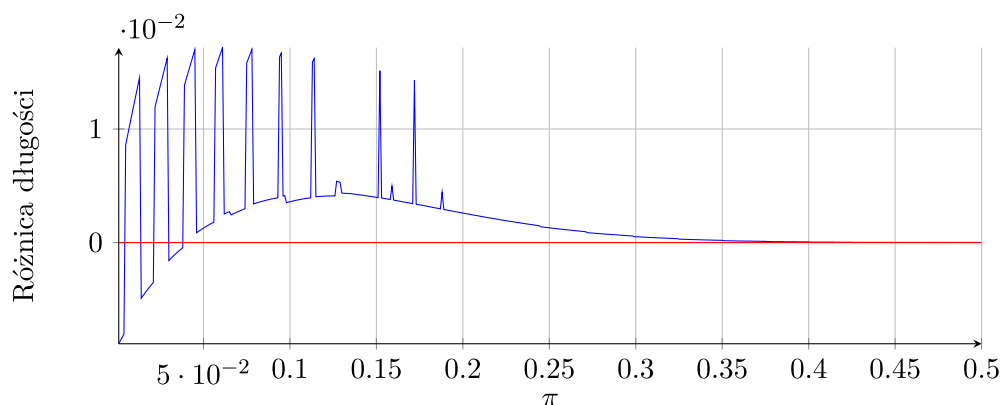


Źródło: obliczenia własne

Na rysunku 5 oraz rysunku 6 przedstawiono różnicę między średnimi długościami rozważanych przedziałów, odpowiednio dla $n = 50$ oraz $n = 100$. Średnie długości przedziałów zostały wyznaczone pod warunkiem, że dany

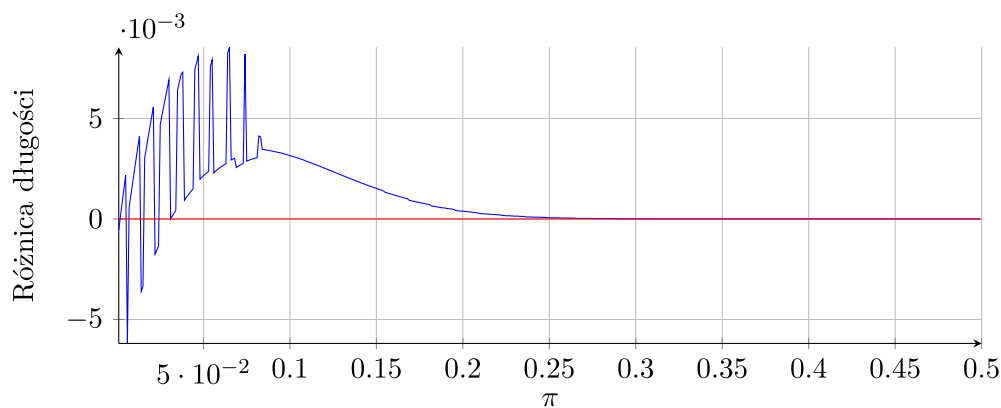
przedział pokrywa nieznaną wartość parametru π . Zauważmy, że oba przedziały dla $\pi = 0.1$ dają praktycznie to samo prawdopodobieństwo pokrycia parametru π , z tym że przedziały ufności oparte na estymatorze $\hat{\pi}_M$ dają średnio węższe przedziały niż te oparte na estymatorze $\hat{\pi}$.

Rysunek 5. Różnica $\overline{d_\pi C(0.08, \hat{\pi})} - \overline{d_\pi C(0.08, \hat{\pi}_M)}$ względem $\pi \in (0, 0.5)$, dla $n = 50$.



Źródło: obliczenia własne

Rysunek 6. Różnica $\overline{d_\pi C(0.08, \hat{\pi})} - \overline{d_\pi C(0.08, \hat{\pi}_M)}$ względem $\pi \in (0, 0.5)$, dla $n = 100$.

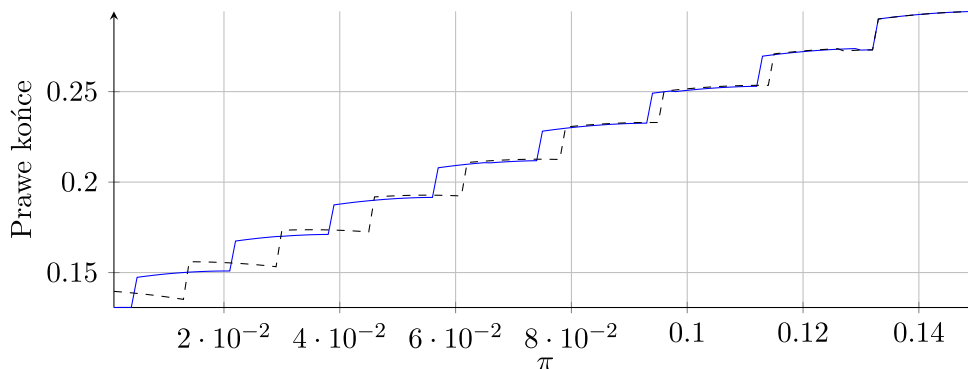


Źródło: obliczenia własne

Charakterystyczny grzebień dla różnicy przeciętnych długości wynika z tego, że mamy do czynienia z rozkładem dyskretnym. W efekcie końce przedziałów ufności obu przedziałów nie pokrywają się ze sobą w charakterystyczny

sposób (rysunek 7).

Rysunek 7. Prawe końce przedziałów ufności dla $\pi \in (0, 0.15)$ oraz dla $n = 50$. Ciągła linia dla $\hat{\pi}$, przerywana dla $\hat{\pi}_M$.



Źródło: obliczenia własne

PODSUMOWANIE

Jednym z problemów w badaniach ankietowych jest szacowanie odsetka odpowiedzi na pytania drażliwe. Respondenci albo nie chcą opowiadać na takie pytania, albo nie udzielają wiarygodnych odpowiedzi. W celu poprawy współpracy ankietera z respondentami wymyślono dla takich pytań specjalne modele. Wśród nich można wyróżnić modele zrandomizowanych i niezrandomizowanych odpowiedzi. W odróżnieniu do typowego modelu jednej odpowiedzi, w którym respondent odpowiada wprost na postawione pytanie drażliwe, respondent może ukryć swoją odpowiedź. Praca dotyczy estymatora odsetka odpowiedzi na pytania drażliwe w krzyżowym modelu niezrandomizowanych odpowiedzi. Estymator ten został zaproponowany w pracy Yu i in. [2008]. Niestety estymator ten może przyjmować wartości ujemne oraz większe od jeden, co wykracza poza zakres dopuszczalnych wartości. Naturalnym podejściem w takiej sytuacji jest obcięcie tego estymatora do przedziału wartości dopuszczalnych. W ten sposób powstaje inny estymator, którego własności mogą się różnić od jego wersji pierwotnej. Faktycznie pierwszy wymieniony estymator jest estymatorem nieobciążonym, a estymator zmodyfikowany (ucięty) jest estymatorem największej wiarygodności. W pracy wyznaczono obciążenie estymatora największej wiarygodności oraz jego wariancję. Oba estymatory zostały porównane ze względu na swoje parametry, wartość oczekiwaną oraz wariancję. Dodatkowo porównano prawdopodobieństwa pokrycia szacowanego odsetka pytań drażliwych oraz średnie długości przedziałów ufności konstruowanych

w oparciu o centralne twierdzenie graniczne. Zgodnie z oczekiwaniami *ENW* charakteryzuje się mniejszą wariancją. Dla pytań drażliwych dotyczących bardzo rzadkich zjawisk (rzadszych niż 10%) wariancja tego estymatora może być mniejsza nawet o 30% od wariancji estymatora nieobciążonego. Niestety, im rzadsze zjawisko, tym większe obciążenie *ENW*. Zmniejszenie wariancji odbywa się kosztem zwiększenia obciążenia, co może mieć zarówno korzystny, jak i niekorzystny wpływ na przedziały ufności konstruowane w oparciu o *ENW*. W pracy zbadano ten wpływ na prawdopodobieństwo pokrycia szacowanego odsetka oraz na średnią długość przedziału ufności (przy warunku, że pokrywa on szacowany parametr). Dla zjawisk drażliwych, obejmujących ok. 10% badanej populacji wpływ ten może być pozytywny, ponieważ nie zmienia prawdopodobieństwa pokrycia, za to generalnie zmniejsza długość przedziału ufności (dla próby rozmiaru $n \in \{50, 100\}$ oraz pytania neutralnego obejmującego 8% badanej populacji).

BIBLIOGRAFIA

- Clopper C. J., Pearson E. S. (1934) The Use of Confidence or Fiducial Limits Illustrated in the Case of Binomial. *Biometrika*, 26, 404-413.
- Greenberg B. G., Abu-Ela A. A., Simons W. R., Horvitz D. G. (1969) The Unrelated Question Randomized Response Model: Theoretical Framework. *Journal of the American Statistical Association*, 64, 520-539.
- NZIP (2022) Zakażenia HIV i zachorowania na AIDS w Polsce. Narodowy Instytut Zdrowia Publicznego. http://wwwold.pzh.gov.pl/oldpage/epimeld/hiv_aids/index.htm (pobrane: 27.05.2022)
- Horvitz D. G., Simons W. R. (1967) The Unrelated Question Randomized Response Model. *Proceedings of the Social Statistics Section. American Statistical Association*, 65-67.
- Warner S. L. (1965) Randomized Response: A Survey Technique for Eliminating Evasive Answer Bias. *Journal of the American Statistical Association*, 60, 63-69.
- Yu J.-W., Tian G.-L., Tang M.-L. (2008) Two New Models for Survey Sampling with Sensitive Characteristic: Design and Analysis. *Metrika* 67, 251-263.
- Zieliński W. (2021) Przedział ufności dla odsetka pytań drażliwych. *Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych*, (22)2, 51-60.

**COMPARISON OF THE MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATOR
WITH THE UNBIASED ESTIMATOR FOR THE FRACTION
OF SENSITIVE QUESTIONS IN THE NON-RANDOMIZED
CROSSWISE MODEL**

Abstract: One of the problems in surveys is estimating the fraction of responses to sensitive questions. It requires the use of special response models. The first model of this kind was the randomized response model [Warner 1965]. There are many other models nowadays. Among them is the non-randomized crosswise model [Yu i in. 2008]. The estimator of the fraction of the sensitive questions in this model can take values outside the range of the interval $\langle 0,1 \rangle$. There is shown in the paper how the truncation of the estimator to the interval is influencing its properties.

Keywords: sensitive questions, nonrandomized crosswise response model

JEL classification: C83, C99