METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XXII/4, 2021, s. 109 – 123

ANALIZA DYNAMIKI ZJAWISK: STOPA WZROSTU PROSTA I DYSKONTOWA

Mariusz Szałański https://orcid.org/0000-0001-7062-1919
Wydział Zarządzania
Uniwersytet Warszawski
e-mail: mszalanski@wz.uw.edu.pl

Streszczenie: Analiza dynamiki zjawisk opisuje teorię indeksów (wskaźników). Postaram się w artykule wykazać, że możliwe jest rozszerzenie analizy przyrostów względnych (stóp wzrostu) o podział na dwie miary: przyrost względny prosty oraz przyrost względny handlowy. Powyższe rozróżnienie stóp jest znane i powszechnie wykorzystywane w rozliczeniach gospodarczych oraz matematyce finansowej. Polega ono na naliczaniu stopy procentowej od wartości zmiennej początkowej (bazowej) lub końcowej (badanej).

Słowa kluczowe: teoria indeksów, analiza dynamiki zjawisk, stopa wzrostu prosta, stopa wzrostu handlowa

JEL classification: C02, C43

WSTĘP

Analiza dynamiki zjawisk opisuje teorię indeksów (wskaźników) oraz przyrostów względnych i absolutnych. Korzystając z dorobku matematyki finansowej postaram się w artykule wykazać, że możliwe jest rozszerzenie teorii przyrostów względnych (stóp wzrostu) o podział na dwie miary: przyrost względny prosty oraz przyrost względny handlowy. Powyższe rozróżnienie stóp jest znane i powszechnie wykorzystywane w rozliczeniach gospodarczych lub matematyce finansowej[1]. Polega ono na naliczaniu stopy procentowej od wartości zmiennej początkowej (bazowej) lub końcowej (badanej). W artykule dla określenia przyrost względny będę używać wymiennie określenia stopa (tempo) wzrostu.

---

1 Szałański M. (2001) Matematyka finansowa. Toruńska Szkoła Zarządzania.

https://doi.org/10.22630/MIBE.2021.22.4.10

Opis zmiany wartości jest bardzo ważny w zastosowaniach ekonomicznych i finansowych. Analiza miar dynamiki, jako narzędzie statystyczne, znajduje zastosowanie przede wszystkim ekonomiczne, do opisywania zmiany wartości dowolnej zmiennej w szeregach czasowych. Natomiast na rynkach finansowych używa się określenia funkcje finansowe (opisane w podrozdziale 3). Dlatego zamierzam wykazać, że zasada naliczania procentowego od wartości początkowej (bazowej) lub od wartości końcowej (badanej), znana z matematyki finansowej, może zostać użyta do modyfikacji konstrukcji miar dynamiki.

Problem z rozróżnieniem stopy wzrostu prostej i dyskontowej można wytłumaczyć na prostym przykładzie. Jeśli wartość początkową 100 jednostek podniesiemy o 20%, uzyskamy 120 jednostek. Jeśli chcielibyśmy wrócić do wartości początkowej poprzez pomnożenie 120 jednostek razy 20%, uzyskamy 24 jednostki. Odejmując od 120 otrzymane 24 jednostki, mamy 96 jednostek wartości początkowej, a to nie jest równe wyjściowym 100 jednostkom. Błąd polega w tym przypadku na zastosowaniu dwóch różnych miar, opartych na różnym sposobie procentowego naliczania zmiany wartości. Najpierw bowiem policzyliśmy stopę procentową od wartości początkowej (stopę wzrostu prostą), a następnie od wartości końcowej (stopę wzrostu dyskontową).

Przegląd literatury zagranicznej pokazuje, że zaproponowany podział przyrostów względnych na dwie miary jest obecny w teorii analizy dynamiki, nikt natomiast nie zastanawiał się nad zastosowaniami praktycznymi[2], w szczególności finansowymi. W polskiej literaturze statystycznej tematyka ta jest słabo opisana.

Zależności ekonomiczne to związek między dwiema zmiennymi X i Y, co zapisać możemy, jako Y(X). Jeżeli zmienną X jest czas, mamy wówczas do czynienia z szeregiem czasowym, czyli Y(t)[3]. Specyficznym typem szeregu czasowego jest Y_t, w którym czas jest niejako ukryty, liczy się zmianą wartości Y_t nie zaś to, kiedy ona nastąpiła. Przykładem ekonomicznym może być zmiana ceny towaru po opuszczeniu fabryki, aż do osiągnięcia ceny końcowej w sklepie.

W artykule chcę udowodnić, że zasada naliczania procentowego od wartości początkowej lub od wartości końcowej jest zasadą łączącą matematykę finansową z analizą dynamiki zjawisk, zaś do miar analizy dynamiki zjawisk dołożyć można jeszcze jedną miarę – przyrost względny dyskontowy, czyli stopę (tempo) wzrostu

[2] Törnqvist L., Vartia P., Vartia Y. O. (1985) How Should Relative Changes be Measured? The American Statistician, 39(1), 43-46; Vartia Y. O. (1976) Relative Change and Index Numbers. ETLA A, The Research Institute of the Finnish Economy, 4. Helsinki.

[3] Przyjmiemy w domyśle stałe odstępy czasu. Ważnym założeniem dla szeregów czasowych, którego nie będziemy tutaj rozstrzygać, jest rozróżnienie na szeregi czasowe momentów (dla zasobów zmiennej w danym konkretnym czasie) oraz szeregi czasowe okresów (dla strumieni, czyli wielkości zmiennej za dany okres – między wybranymi momentami).

dyskontowe[4]. Pokażę sposób zastosowania nowej miary na przykładach ekonomicznych oraz na rynkach finansowych.
Możemy liczbowo przedstawić to następująco:

$$1{,}68 = 1{,}2 \cdot 1{,}4 = (1 + 0{,}2)(1 + 0{,}4) = \left(\frac{1}{1 - 0{,}1667}\right)\left(\frac{1}{1 - 0{,}2857}\right)$$

Gdzie 1,68 to łączny wzrost wartości, 1,2 i 1,4 to iloczyn indeksów, 0,2 i 0,4 to stopy względne proste zaś 0,1667 i 0, 2857 to proponowane stopy względne dyskontowe.
Stopy 0,2 i 0,4 oraz 0,1667 i 0,2857 mają charakter symetryczny. Symetryczność stóp wzrostu można opisać nieco żartobliwie w następujący sposób: jeśli podejdziemy do lustra i podniesiemy prawą rękę (odpowiednik indeksu wzrostu), nasze odbicie lustrze podniesie rękę lewą (odpowiednik stopy wzrostu prostej i dyskontowej).

PROPOZYCJE MODYFIKACJI STÓP (TEMP) WZROSTU

Opis propozycji nowej klasyfikacji stóp wzrostu rozpocznę od zdefiniowania pojęć używanych w tym artykule.

„Miernik to kategoria ekonomiczna dająca się policzyć i wyrazić liczbą. To kategoria ekonomiczna ujmująca ilościowo fragment rzeczywistości”[5].

Do wyrażenia zmiany miernika używamy miar absolutnych lub względnych. Są to przyrosty absolutne i względne oraz wskaźniki proste i złożone.

„Różnice absolutne (bezwzględne), zwane także przyrostami absolutnymi mierzą, o ile między okresami (momentami) badanym a podstawowym powiększyła się zmienna (cecha) zależna. Są nieporównywalne dla różnych cech

Porównywalność zapewnia się, odnosząc przyrost (różnicę) absolutną do wartości liczbowej zmiennej zależnej w okresie (momencie) podstawowym. Takie konstrukcje zwie się przyrostami stosunkowymi (względnymi) lub niekiedy współczynnikami tempa, a najczęściej tempem (stopą) wzrostu. Tempo wzrostu określa, jak szybko, w jakim tempie zmienia się cecha zależna. Wskaźnik (indeks) wyraża natomiast -krotność zmiennej zależnej w okresie (momencie), badanym w odniesieniu do okresu (momentu) podstawowego.”[6]

---

[4] Należy dokonać tutaj pewnego zastrzeżenia. Otóż pojęcie stopy dyskontowej, powszechnie wykorzystywane np. w finansach przedsiębiorstw, dotyczy przekształconej postaci procentu prostego lub składanego, w celu obliczenia K_0. Niestety w literaturze i praktyce gospodarczej stopa procentowa naliczana od K_n też nosi nazwę dyskontowania. W artykule opisujemy oczywiście ten drugi przypadek.

[5] Timofiejuk I. (2002) Mierniki a wskaźniki statystyczne (indeksy). Wiadomości Statystyczne. 4, s. 2.

[6] Op. cit., s. 3.

Miary dynamiki, czyli klasyfikację indeksów i przyrostów można przedstawić następująco[7]:

Tabela 1. Klasyczny podział miar dynamiki

Przyrosty	absolutne	jednopodstawowe/łańcuchowe
	względne (stopa)	jednopodstawowe/łańcuchowe
Indeksy (wskaźniki)	proste (I)	jednopodstawowe/łańcuchowe
	złożone	jednopodstawowe/łańcuchowe

Źródło: opracowanie własne

Tabela 2. Propozycja poszerzenia miar dynamiki o stopę prostą i dyskontową

Przyrosty	absolutne		jednopodstawowe/łańcuchowe
	względne (stopy)	stopa prosta (p)	jednopodstawowe/łańcuchowe
		stopa dyskontowa (d)	
Indeksy (wskaźniki)	proste (I)		jednopodstawowe/łańcuchowe
	złożone		jednopodstawowe/łańcuchowe

Źródło: opracowanie własne

Propozycja modyfikacji dotyczy wydzielenia kategorii miar przyrostów względnych nowej stopy dyskontowej (d), przy czym indeksy (wskaźniki) pozostają niezmienne.

Zależność między indeksem prostym (I) a propozycją zmodyfikowanych stóp wzrostu przedstawiają wzory (bez podziału na łańcuchowe i jednopodstawowe).

Wzór na indeks (I_t) oraz stopę (tempo) wzrostu prostą *(*p_t*)*.

Obliczenie wartości badanej (Y_t)

$Y_t = Y_0(1 + p_t)$ (1) lub $Y_t = Y_0 \cdot I_t$ (2)

Powrót do wartości bazowej (Y_0)

$$Y_0 = \frac{Y_t}{(1+p_t)} = \frac{Y_t}{I_t} \tag{3}$$

Z powyższych wzorów wyprowadźmy pozostałe zmienne (I) oraz (p).

Ze wzoru (3) mamy indeks prosty $I_t = \frac{Y_t}{Y_0}$ (4)

Ze wzoru (1) mamy wzór na stopę (tempo) wzrostu prostą

$$p_t = \frac{Y_t}{Y_0} - 1 = \frac{Y_t - Y_0}{Y_0} = \frac{\Delta Y}{Y_0} \tag{5}$$

W przyroście dyskontowym wykorzystującym stopę (tempo) dyskontowe (d) wyprowadzenie wzorów rozpoczynamy od sposobu liczenia wartości bazowej (Y_0) – obliczania procentowego, naliczanego od wartości badanej Y_t.

$$Y_0 = Y_t - Y_t \cdot d_t = Y_t(1 - d_t) \tag{6}$$

[7] Każda z przedstawionych miar w tabeli 1 i 2 ma swój wymiar łańcuchowy lub jednopodstawowy.

Stąd wyprowadzamy wzór na badaną wartość zmiennej (Y_t)

$$Y_t = \frac{Y_0}{(1-d)} = Y_0 \frac{1}{(1-d)} \qquad (7)$$

Ze wzoru (6) wyprowadźmy wzór na stopę dyskontowa (d)

$$Y_0 = Y_t(1-d), \frac{Y_0}{Y_t} = 1-d, \frac{Y_0}{Y_t} - 1 = -d_t, \frac{Y_0 - Y_t}{Y_t} = -d_t, \frac{-(Y_t - Y_0)}{Y_t} = -d_t$$

stąd
$$d_t = \frac{Y_t - Y_0}{Y_t} = \frac{\Delta Y}{Y_t} \qquad (8)$$

Przyrost wartości z wykorzystaniem stopy dyskontowej (d) wyrazimy przy pomocy indeksu (I).
Ze wzoru (7) otrzymujemy

$$Y_t = Y_0 \frac{1}{(1-d_t)} = Y_0 \cdot I_t, \qquad \text{stąd} \qquad I_t = \frac{1}{(1-d_t)} \qquad (9)$$

Zmianę wartości możemy opisać przyrostem absolutnym lub wartością indeksu prostego (I). Mamy dwa sposoby opisu zmiany wartości (wzrostu lub spadku) – przyrost prosty lub dyskontowy – z wykorzystaniem stopy prostej (p) lub stopy dyskontowej (d). Oba przyrosty dotyczą tego samego wzrostu absolutnego zmiennej, opisanego indeksem (I)

$$\mathrm{I_t} = (1 + \mathrm{p_t}) = \frac{1}{1 - \mathrm{d_t}} \qquad (10)$$

Należy podkreślić, że zaprezentowane powyżej wzory stosować można zarówno dla miar jednopodstawowych, jak i łańcuchowych.

Modyfikacja klasyfikacji miar dynamiki przy użyciu stopy wzrostu prostej i dyskontowej (handlowej) daje możliwość opisu zmiany wartości zmiennej w szeregu w dwojaki sposób. Rodzi się pytanie: czy możliwe jest przeliczanie między stopami wzrostu prostą i dyskontową? Odpowiedź brzmi: tak. W matematyce finansowej zagadnienie to nosi nazwę stopy odpowiedniej.
Wychodząc z równoważności (10)

$$(1 + p_t) = \frac{1}{(1 - d_t)}$$

wyprowadzamy zmienne z ostatniego równania:

$$p_t = \frac{d_t}{1 - d_t} \quad (11) \qquad \text{oraz} \qquad d_t = \frac{p_t}{1 + p_t} \quad (12)$$

Wzór (11) i (12) to możliwość policzenia stopy prostej w sytuacji, kiedy dysponuje się stopą dyskontową i odwrotnie.
Wróćmy do naszego przykładu ze wstępu do artykułu, dotyczącego wzrostu i zmniejszenia wartości o 20%.
Przyjmijmy stopę (tempo) wzrostu prostą i = 0,2 (20%) i obliczmy stopę dyskontową.

$d = \frac{p}{1+p} = \frac{0,2}{1+0,2} = 0,1667$ (16,67%)

Zwiększamy wartość zmiennej Y0 = 100 jednostek przy pomocy stopy prostej $Y_t = 100(1 + 0,2) = 120.$

Teraz możemy obliczyć wartość wyjściową przy pomocy stopy odpowiedniej dyskontowej.

$Y_0 = 120(1 - 0,1667) = 100.$

Stopy wzrostu nie mają kierunku zmiany wartości. Są takie same dla wzrostu z poziomu zmiennej Y_0 do Y_t i odwrotnie z Y_t do Y_0. Przyrosty absolutne też nie mają kierunku, zawsze są takie same. W przypadku indeksów (I) kierunek obliczeń nie ma znaczenia. Jak wynika z tabeli 3 i 4 wyrażony względnie wzrost dla pojedynczych wartości opisuje I_t, natomiast powrót do wartości bazowej opisuje zależność $\frac{1}{I_t}$. To jest ta sama wartość indeksu, tylko przekształcona.

ANALIZA MATERIAŁU EMPIRYCZNEGO PRZY WYKORZYSTANIU PROPONOWANYCH MIAR

Wykorzystanie stopy wzrostu prostej i dyskontowej opiszę na prostym przykładzie liczbowym.

Przykład 1

Mamy szereg czasowy reprezentujący poziomy cen pewnego wyrobu w trzech kolejnych okresach.

Czas (t)	1	2	3
Poziom zmiennej Y_t (w zł)	10	12,3	11,07

Obliczmy wzrost (zmianę) wielkości cen, wykorzystując do opisu stopę prostą i dyskontową. Wykorzystamy wzory od (1) do (5) i od (6) do (8).

Tabela 3. Obliczenia dla przykładu 1

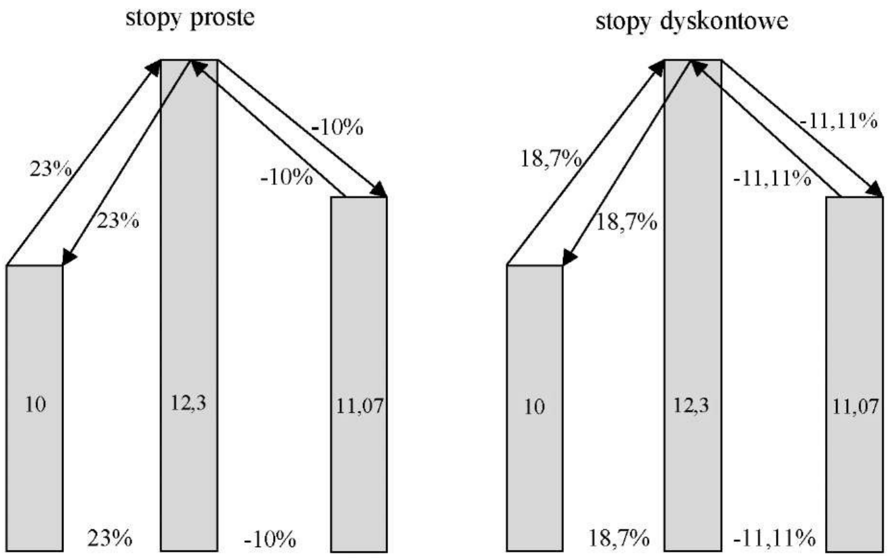
t	1	2	3
Poziom wartości (Y_t)	10	12,3	11,07
Stopa prosta (p_t)	-	$p = \frac{Y_t - Y_0}{Y_0} = \frac{12,3 - 10}{10} = 0,23 \rightleftarrows (23\%)$	$p = \frac{11,07 - 12,3}{12,3} = -0,1\ (-10\%)$
Wartość w okresie badanym (Y_t)	-	$Y_t = Y_0(1 + i) = 10(1 + 0,23) = 12,3$	$Y_t = 12,3(1 + (-0,1) = 12,3 \cdot 0,9 = 11,07$

t	1	2	3
Wartość w okresie bazowym (Y_{t-1})	$Y = \frac{12,3}{1+0,23} = 10$	$Y_0 = \frac{Y_t}{(1+i)} = \frac{11,07}{1+(-0,1)} = 12,3$	-
Stopa dyskontowa (d_t)	-	$d = \frac{Y_t - Y_0}{Y_t} = \frac{12,3-10}{12,3} = 0,187(18,7\%)$	$d = \frac{11,07-12,3}{11,07} = -0,1111 \quad (-11,11\%)$
Wartość w okresie badanym (Y_t)	-	$Y_t = Y_0 \frac{1}{(1-d)} = \frac{10}{(1-0,187)} = 12,3$	$Y_t = \frac{12,3}{(1-(-0,1111))} = 11,07$
Wartość w okresie bazowym (Y_{t-1})	$Y_0 = 12,3(1 - 0,187) = 10$	$Y_0 = Y_t(1-d) = 11,07(1-(-0,1111)) = 12,3$	-

Źródło: opracowanie własne

Powyższy przykład liczbowy można przedstawić graficznie.

Rysunek 1. Graficzne przedstawienie przykładu 1



Źródło: opracowanie własne

Problematykę rozróżnienia i zastosowania stóp wzrostu prostej i dyskontowej spróbuję wyjaśnić na przykładzie 23-procentowej stawki podatkowej VAT.

Przykład 2

Wartości liczbowe z przykładu 1. Przyjmijmy, że 10 zł to cena netto towaru. Do ceny doliczony został VAT przy stawce 23%, po czym cenę brutto obniżono o 10%. Dokonajmy analizy zastosowanych stóp (temp) prostej i dyskontowej.

Zinterpretujmy pierwsze działanie, czyli doliczenie VAT-u. Jeżeli towar w cenie netto kosztuje 10 zł, z podatkiem VAT jego cena (brutto) wynosi 10(1+0,23) = 12,3 zł. Ile wynosi cena bez podatku, czyli netto? Często popełniany błąd, to liczenie VAT-u od ceny brutto 12,30 × 0,23 = 2,83 zł. Odejmując od ceny sprzedaży, mamy 9,47 zł, co nie daje ceny netto. Powinniśmy policzyć następująco 12,3/ (1+0,23) = 10 zł.

Policzmy kwotę podatku VAT, wykorzystując stopę dyskontową 18,7%. Licząc procent od kwoty brutto, otrzymamy 12,3 × 0,187 = 2,3 zł. Odejmując 2,3 zł od 12,3 zł, uzyskamy 10 zł, czyli cenę netto. Obliczenia możemy zapisać też inaczej, 12,3 (1 – 0,187) = 10 zł.
Z przykładu wynika, że mamy dwa sposoby obliczania ceny netto (wzór 3 i 6)

$Y_0 = \frac{12{,}3}{1+0{,}23} = 12{,}3\ (1 - 0{,}187) = 10$ zł[8].

Zgodnie z przedstawioną w tym artykule teorią dwóch stóp (tempa) zmiany wartości, mamy też dwa sposoby liczenia ceny brutto (wzór 1 i 7)

$Y_t = 10(1 + 0{,}23) = 10\frac{1}{1-0{,}187} = 12{,}3$ zł

Jak wynika z przykładu, 18,7% to stopa wzrostu dyskontowa, odpowiadająca stopie prostej 23%.

Nieporozumienia terminologiczne związane z rozróżnieniem stóp wzrostu między dwoma wartościami pojawiają się z różnych powodów. Po pierwsze ze względu na kierunek dokonywanej analizy dla wartości Y_0 i Y_t. Jeżeli opisujemy zmianę wartości z Y_0 do Y_t, wartość może wzrosnąć lub zmniejszyć się, co generalnie nazywane jest przyrostem dodatnim lub ujemnym (ponieważ stopa wzrostu może być ujemna). W pierwszym przykładzie w pierwszym przedziale dodatni przyrost opisany jest stopą prostą (23%) i dyskontową (18,7%), zaś zmniejszenie się wartości, w drugim przedziale, stopami prostą (10%) i dyskontową (11,11%). Kolejne nieporozumienia pojawiają się przy nazwaniu powrotu do wartości Y_t-1 z poziomu Y_t, przy cofaniu się do poprzedniej wartości. Obliczenie ceny netto nie jest zmniejszeniem wartości, a raczej powrotem do wartości wyjściowej (bazowej). W matematyce finansowej to działanie nosi nazwę dyskontowania.

Zaprezentuję przykład liczbowy pokazujący pełną teorię miar dynamiki.

[8] Stopa dyskontowa VAT w tym przykładzie wynosząca 18,7% ma swoje zastosowanie praktyczne. Otóż handlowcy, aby policzyć wielkość podatku VAT w fakturze mnożą cenę brutto przez stawkę 18,7%.

Przykład 3

Mamy prosty szereg czasowy zawierający hipotetyczne poziomy PKB w mld zł w pięciu kolejnych latach:

Czas (t)	1	2	3	4	5
Poziom zmiennej Y - PKB	100	120	132	118,8	154,44

Obliczmy indeksy i stopy wzrostu jednopodstawowe i łańcuchowe dla t = 1 oraz dla t = 5.

Ze względu na dużą liczbę obliczeń podzielimy oddzielnie tabele na miary łańcuchowe i jednopodstawowe.

Tabela 4. Obliczenia zmiany PKB przy pomocy indeksu łańcuchowego dla t = 1 oraz stopy prostej i dyskontowej łańcuchowych

t	Poziom zmiennej Y_t (1)	Stopa łańcuchowa prosta $p_{t/t-1}$ (2)	Stopa łańcuchowa dyskontowa $d_{t/t-1}$ (3)	Obliczenie indeksu $I_{t/t-1}$ łańcuchowego (4)	Zależność między przyrostami prostym i dyskontowym a indeksem łańcuchowym (5)	Zmiana wartości a indeks i stopa prosta łańcuchowe (6)
1	100	-	-	-	-	-
2	120	$p_{2/1} = \frac{120-100}{100} = 0{,}2$ ⇄ (20%)	$d_{2/1} = \frac{120-100}{120} = 0{,}1667$ ⇄ (16,67%)	$I_{2/1} = \frac{120}{100} = 1{,}2$	$(1+0{,}2) = \left(\frac{1}{1-0{,}16667}\right) = 1{,}2$	$100 \rightleftarrows (1+0{,}2) = 100\left(\frac{1}{1-0{,}16667}\right) = 100 \cdot 1{,}2 = 120$
3	132	$p_{3/2} = \frac{132-120}{120} = 0{,}1$ ⇄ (10%)	$d_{3/2} = \frac{132-120}{132} = 0{,}0909$ (9,09%)	$I_{3/2} = \frac{132}{120} = 1{,}1$ ⇄	$(1+0{,}1) = \left(\frac{1}{1-0{,}0909}\right) = 1{,}1$	$120(1+0{,}1) = 120\left(\frac{1}{1-0{,}0909}\right) = 120 \cdot 1{,}1 = 132$
4	118,8	$p_{4/3} = \frac{118{,}8-132}{132} = -0{,}1$ ⇄ (10%)	$p_{4/3} = \frac{118{,}8-132}{118{,}8} = -0{,}1111$ ⇄ (11,11%)	$I_{4/3} = \frac{118{,}8}{132} = 0{,}9$	$(1+(-0{,}1)) = \left(\frac{1}{1-(-0{,}1111)}\right) = 0{,}9$	$132\ (1+(-0{,}1)) = 132\left(\frac{1}{1-(-0{,}111}\right. = 132 \cdot 0{,}9 = 118{,}8$
5	154,44	$p_{5/4} = \frac{154{,}44-118{,}8}{118{,}8} = 0{,}3$ ⇄ (30%)	$p_{5/4} = \frac{154{,}44-118{,}8}{154{,}44} = 0{,}2308$ (23,08%)	$I_{5/4} = \frac{154{,}44}{118{,}8} = 1{,}3$	$(1+0{,}3) = \left(\frac{1}{1-0{,}2308}\right) = 1{,}3$	$118{,}8(1+0{,}3) = 118{,}8\left(\frac{1}{1-0{,}2308}\right) = 118{,}8 \cdot 1{,}3 = 154{,}44$

Źródło: opracowanie własne

W tabeli 4 w kolumnie 2 i 3 pokazane jest wyliczenie stóp prostej i dyskontowej łańcuchowych dla kolejnych przedziałów wartości PKB (Y_t) poczynając od pierwszej wartości w szeregu (t = 1). W kolumnie 4 obliczone zostały indeksy łańcuchowe. W kolumnie 5 widzimy względną zmianę wartości, opisaną indeksem (I) z przyrostów prostego i handlowego (wzór (10) i (11)). Z obliczeń w tej kolumnie wynika też, że każda zmiana wartości w szeregu opisana jest odpowiednią stopą prostą (p) i dyskontową (d) łańcuchowymi. Ostatnia kolumna to sprawdzenie zmiany wartości PKB wyrażonych wartościami bezwzględnymi.

Korzystając z obliczeń w kolumnie 5 dla wartości t = 1, 2, 3 możemy powiedzieć, że indeks wzrostu PKB w pierwszym roku wyniósł 1,2, czyli wzrost liczony przy pomocy stopy prostej wyniósł 20%, liczony przy pomocy stopy dyskontowej 16,67%. Natomiast w drugim roku wzrost wyniósł odpowiednio 10% i 9,09%.

Tabela 5. Obliczenia zmiany PKB przy pomocy indeksu łańcuchowego dla t = 5 oraz stopy prostej i dyskontowej łańcuchowych

t	Poziom zmiennej Y_t (1)	Obliczenie indeksu $I_{t/t-1}$ łańcuchowego t =5 (2)	Zależność między przyrostami a indeksem łańcuchowym (3)	Zmiana wartości a indeks i stopa prosta łańcuchowe (4)
1	100	$I_{1/2} = \frac{100}{120} = 0{,}8333$	$(\frac{1}{1+(0{,}2)}) =$ $= (1-(0{,}1667)) =$ $= 0{,}8333$	$120(\frac{1}{1+(0{,}2)}) =$ $= 120(1-(0{,}1667)) =$ $= 120 \cdot 0{,}8333 = 110$
2	120	$I_{2/3} = \frac{120}{132} = 0{,}9091$	$(\frac{1}{1+(0{,}1)}) =$ $= (1-(0{,}0909)) =$ $= 0{,}90$	$132(\frac{1}{1+(0{,}1)}) =$ $= 132(1-(0{,}0909)) =$ $= 132 \cdot 0{,}90 = 120$
3	132	$I_{3/4} = \frac{132}{118{,}8} = 1{,}1111$	$(\frac{1}{1+(-0{,}1)}) =$ $= (1-(-0{,}1111)) =$ $= 1{,}1111$	$118{,}8(\frac{1}{1+(-0{,}1)}) =$ $= 118{,}8(1-(-0{,}1111)) =$ $= 118{,}8 \cdot 1{,}1111 = 132$
4	118,8	$I_{4/5} = \frac{118{,}8}{154{,}44} = 0{,}7692$	$(\frac{1}{1+0{,}3}) =$ $= (1-0{,}2308) =$ $= 0{,}7692$	$154{,}44 \rightleftarrows (\frac{1}{1+0{,}3}) =$ $= 154{,}44(1-0{,}2308) =$ $= 154{,}44 \cdot 0{,}7692 = 118{,}8$
5	154,44	-	-	-

Źródło: opracowanie własne

Tabela 5 pokazuje obliczenia PKB - powrót do wartości badanej (Y_{t-1}). Obliczenia zaczynamy od wartości końcowej (t = 5) i przechodzimy do wartości początkowej w szeregu, wykorzystując stopy proste i dyskontowe łańcuchowe. Zaczynamy od wyliczeń indeksu łańcuchowego (t = 5) - w kolumnie drugiej. W kolejnej kolumnie obliczamy powrót do wartości bazowych (Y_0), wykorzystując przekształcone przyrosty prosty i dyskontowy oraz odpowiednie stopy (tempa) wzrostu (p_t) i (d_t). Należy zwrócić uwagę, że powrót do wartości bazowej wymaga przekształcenia indeksu. Wytłumaczmy to następująco: wzrost wartości PKB ze 100 mld zł do 120 mld zł, opisany w tabeli 4 w drugim wierszu, to

$$100 \rightleftarrows (1+0{,}2) = 100\left(\frac{1}{1-0{,}16667}\right) = 100 \cdot 1{,}2 = 120.$$

Powrót do wartości 100 ze 120 mld zł, czyli cofnięcie się z roku drugiego do pierwszego, musimy przekształcić indeks (stopy prosta i dyskontowa pozostają bez zmian) – tabela 5 wiersz pierwszy

$$120\left(\frac{1}{1+(0{,}2)}\right) = 120\big(1-(0{,}1667)\big) = 120\frac{1}{1{,}2} = 120 \cdot 0{,}8333 = 100$$

Tabela 6. Obliczenie zmiany PKB przy pomocy indeksu jednopodstawowego dla t = 1 oraz stopy prostej i dyskontowej jednopodstawowych

t	Poziom zmiennej Y (1)	Stopa łańcuchowa prosta (2)	Stopa łańcuchowa dyskontowa (3)	Obliczenie indeksu jednopodstawowego t = 1 (4)	Zależność między przyrostami prostym i dyskontowym a indeksem jednopodstawowym (5)	Zmiana wartości a indeks i stopa prosta jednopodstawowa (6)
1	100	-	-	-	-	-
2	120	$p_{2/1} = \frac{120-100}{100} = 0{,}2 \rightleftarrows (20\%)$	$d_{2/1} = \frac{120-100}{120} = 0{,}1667 \rightleftarrows (16{,}67\%)$	$I_{2/1} = \frac{120}{100} = 1{,}2$	$(1+0{,}2) = \left(\frac{1}{1-0{,}16667}\right) = 1{,}2$	$100 \rightleftarrows (1+0{,}2) = 100\left(\frac{1}{1-0{,}16667}\right) = 100 \cdot 1{,}2 = 120$
3	132	$p_{3/2} = \frac{132-120}{120} = 0{,}1 \rightleftarrows (10\%)$	$d_{3/2} = \frac{132-120}{132} = 0{,}0909\ (9{,}09\%)$	$I_{3/1} = \frac{132}{100} = 1{,}32 \rightleftarrows$	$(1+0{,}2)(1+0{,}1) = \left(\frac{1}{1-0{,}1667}\right)\left(\frac{1}{1-0{,}0909}\right) = 1{,}2 \cdot 1{,}1 = 1{,}32$	$100(1+0{,}2)(1+0{,}1) = 100\left(\frac{1}{1-0{,}1667}\right)\left(\frac{1}{1-0{,}0909}\right) = 100 \cdot 1{,}1 = 132$
4	118,8	$p_{4/3} = \frac{118{,}8-132}{132} = -0{,}1 \rightleftarrows (10\%)$	$p_{4/3} = \frac{118{,}8-132}{118{,}8} = -0{,}1111 \rightleftarrows (11{,}11\%)$	$I_{4/1} = \frac{118{,}8}{100} = 1{,}1188$	$(1+0{,}2)(1+0{,}1) \cdot (1+(-0{,}1)) = \left(\frac{1}{1-0{,}1667}\right)\left(\frac{1}{1-0{,}0909}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-(-0{,}0909)}\right) = 1{,}2 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}9 = 1{,}1188$	$100(1+0{,}2)(1+0{,}1) \cdot (1+(-0{,}1)) = 100\left(\frac{1}{1-0{,}1667}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-0{,}0909}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-(-0{,}0909)}\right) = 100 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}9 = 111{,}8$
5	154,44	$p_{5/4} = \frac{154{,}44-118{,}8}{118{,}8} = 0{,}3 \rightleftarrows (30\%)$	$p_{5/4} = \frac{154{,}44-118{,}8}{154{,}44} = 0{,}2308\ (23{,}08\%)$	$I_{5/1} = \frac{154{,}44}{100} = 1{,}5444$	$(1+0{,}2)(1+0{,}1) \cdot (1+(-0{,}1))(1+0{,}3) = \left(\frac{1}{1-0{,}1667}\right)\left(\frac{1}{1-0{,}0909}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-(-0{,}0909)}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-0{,}2324}\right) = 1{,}2 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}3 = 1{,}5444$	$100(1+0{,}2)(1+0{,}1)\big(1+(-0{,}1)\big) \cdot (1+0{,}3) = 100\left(\frac{1}{1-0{,}1667}\right)\left(\frac{1}{1-0{,}0909}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-(-0{,}0909)}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-0{,}2324}\right) = 100 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}3 = 154{,}44$

Źródło: opracowanie własne

W tabeli 6 w kolumnach 2 i 3 mamy wyliczenie stóp prostej i dyskontowej dla każdej zmiany wartości szeregu (Y_t) dla t = 1. W 4 kolumnie obliczone zostały indeksy jednopodstawowe zmian PKB w kolejnych latach. W kolumnie 5 widzimy względną zmianę wartości, opisaną indeksem jednopodstawowym. Ostatnia kolumna to sprawdzenie zmiany wartości PKB dla miar jednopodstawowych, wyrażonych wartościami bezwzględnymi.

Tabela 7. Obliczenie zmiany PKB przy pomocy indeksu jednopodstawowego dla t = 5 oraz stopy prostej i dyskontowej jednopodstawowych

t	Poziom zmiennej	Obliczenie indeksu jednopodstawowego t = 5	Zależność między przyrostami a indeksem jednopodstawowym	Zmiana wartości a indeks i stopa prosta jednopodstawowa
1	100	$I_{1/5} = \frac{100}{150} = 0{,}6475$	$\left(\frac{1}{1+0{,}3}\right)\left(\frac{1}{1+(-0{,}1)}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+0{,}1}\right)\left(\frac{1}{1+0{,}2}\right) = (1-0{,}2308)(1-(-0{,}1111)) \cdot (1-0{,}0909)(1-0{,}1667) = 0{,}6475$	$154{,}44\left(\frac{1}{1+0{,}3}\right)\left(\frac{1}{1+(-0{,}1)}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+0{,}1}\right)\left(\frac{1}{1+0{,}2}\right) = 154{,}44(1-0{,}2308)\cdot(1-(-0{,}1111)) \cdot (1-0{,}0909) \cdot (1-0{,}1667) = 154{,}44 \cdot 0{,}6475 = 100$
2	120	$I_{2/5} = \frac{120}{150} = 0{,}777$	$\left(\frac{1}{1+0{,}3}\right)\left(\frac{1}{1+(-0{,}1)}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+0{,}1}\right) = (1-0{,}2308)(1-(-0{,}1111))(1-0{,}0909) = 0{,}777$	$154{,}44\left(\frac{1}{1+0{,}3}\right)\left(\frac{1}{1+(-0{,}1)}\right)\left(\frac{1}{1+0{,}1}\right) = 154{,}44(1-0{,}2308)\cdot(1-(-0{,}1111)) \cdot (1-0{,}0909) = 154{,}44 \cdot 0{,}777 = 120$
3	132	$I_{3/5} = \frac{132}{150} = 0{,}8547$	$\left(\frac{1}{1+0{,}3}\right)\left(\frac{1}{1+(-0{,}1)}\right) = (1-0{,}2308) \cdot (1-(-0{,}1111)) = 0{,}8547$	$154{,}44\left(\frac{1}{1+0{,}3}\right)\left(\frac{1}{1+(-0{,}1)}\right) = 154{,}44(1-0{,}2308)(1-(-0{,}1111)) = 154{,}44 \cdot 0{,}8547 = 132$
4	118,4	$I_{4/5} = \frac{118{,}8}{154{,}44} = 0{,}7692$	$\left(\frac{1}{1+0{,}3}\right) = (1-0{,}2308) = 0{,}7692$	$154{,}44\left(\frac{1}{1+0{,}3}\right) = 154{,}44(1-0{,}2308) = 154{,}44 \cdot 0{,}7692 = 118{,}8$
5	154,44	-	-	-

Źródło: opracowanie własne

Tabela 7 pokazuje obliczenie wartości badanej (Y_0) PKB dla indeksów jednopodstawowych. Obliczenia zaczynamy od wartości końcowej (t = 5) szeregu wartości PKB i przechodzimy do wartości początkowej w szeregu, wykorzystując stopy proste i dyskontowe jednopodstawowe (p_t) i (d_t). W 2 kolumnie obliczamy wartości względne indeksu jednopodstawowego (t = 5). W kolumnie 3 pokazana jest zależność między indeksem jednopodstawowym (t = 5) a przekształconymi przyrostami prostym i dyskontowym oraz stopami (p_t) i (d_t). W ostatniej kolumnie mamy obliczenia kolejnych wartości PKB, począwszy od ostatniej aż do pierwszej w szeregu.

STOPY PROSTA I DYSKONTOWA – ZASTOSOWANIE W PRAKTYCE FINANSOWEJ I GOSPODARCZEJ

Zasada liczenia stopy procentowej od kapitału początkowego (K0) - „z dołu” lub od kapitału końcowego (Kn) jest powszechnie wykorzystywane w rozliczeniach

gospodarczych[9]. Jest także podstawą konstrukcji czterech głównych funkcji finansowych.
Przedstawmy na schemacie podstawowe funkcje finansowe, używając oznaczeń przyjętych w matematyce finansowej

Stopa prosta	$K_n = K_0(1+i)$ →	Procent prosty	$K_n = K_0\left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)$
	↘	Procent składany	$K_n = K_0(1+i)^n$
Stopa dyskontowa	$K_n = \frac{K_0}{(1-d)}$ →	Dyskonto handlowe	$K_n = \frac{K_0}{\left(1-d\cdot\frac{t}{360}\right)}$
	↘	Procent składany	$K_n = \frac{K_0}{(1-d)^n}$
		kapitalizacja z góry	

Uważny obserwator zauważy, że funkcje różnią się między sobą sposobem dopisania czynnika czasu, który może być dopisany w sposób liniowy lub nieliniowy.

Ważnym zastosowaniem stopy (tempa) wzrostu prostego i dyskontowego jest narzut i marża. Pojęcia te są bardzo często mylone i uważane za tożsame. Rzeczywiście narzut i marża w sensie bezwzględnym, w jednostkach pieniężnych, są takie same. Różnią się sposobem procentowego liczenia. Narzut to stopa prosta liczona procentowo od wartości początkowej (Y_0), marża liczona jest procentowo od wartości końcowej (Y_n). W literaturze przedmiotu używa się pojęcia „od sta” dla narzutu handlowego lub „w stu” dla marży handlowej. Przykładem liczenia narzutu jest podatek VAT, narzut zysku w przedsiębiorstwie, Przykładem liczenia marży (z góry) jest podatek obrotowy, ale też wszystkie obniżki i przeceny.
Innym przykładem zastosowania stopy prostej i dyskontowej są obliczenia procentowe. Narzut handlowy, liczony jako stopa prosta, opiera się na zasadzie powiększonej, czyli powiększeniu zasady procentowej o sumę procentową wyliczaną ze wskaźnika procentowego. Marża dyskontowa, liczona jako stopa dyskontowa, opiera się na zasadzie zmniejszonej i polega na obniżeniu wartości o sumę procentową wyliczoną ze wskaźnika procentowego. Odwrócona zasada procentowa pozwala na wyliczenie pozostałych zmiennych – sumy procentowej i wskaźnika procentowego.

Kolejnym przykładem praktycznego zastosowania dyskontowej stopy wzrostu są rabat i skonto. W sensie praktycznym oblicza się je tak samo, jako procent liczony od kwoty brutto. Jednak w sensie finansowym są to dwa różne zagadnienia, zastosowanie dwóch różnych wzorów. Rabat to obniżenie ceny związane z ilością zakupionego towaru i stosujemy tutaj wzór (6). Natomiast

[9] Podgórska M., Klimkowska J. (2005) Matematyka finansowa. PWN, Warszawa; Sobczyk M. (1995) Matematyka finansowa. Placet, Warszawa; Kellison S. G. (1991) The Theory of Interest Rate. IRWIN, Boston.

skonto to rezygnacja z odsetek kredytu kupieckiego, więc pojawia się tu czynnik czasu i stopa dyskontowa. Na schemacie 1 odpowiada temu funkcja dyskonta handlowego.

PODSUMOWANIE

W artykule starałem się wykazać, że analizę miar dynamiki (teorię indeksów) można wzbogacić o nowy podział w przyroście względnym: na stopę wzrostu prostą i dyskontową. Pokazanie różnorodnych zastosowań wskazuje, iż zasada ta leży u podstaw obliczania zmiany wartości zmiennej w dowolnych zastosowaniach. Na gruncie statystki jest to nowe podejście, natomiast na gruncie praktyki gospodarczej czy finansowej naliczanie procentowe od kwoty netto (z dołu) – stopa prosta i naliczanie procentowe od kwoty brutto (z góry) – stopa dyskontowa są powszechnie stosowane.

W ostatnich latach bardzo zyskała na znaczeniu teoria złożoności, która pokazuje, że są dziedziny[10] w naukach społecznych, biologicznych, fizycznych czy matematycznych, które redukują się do kilku prostych zasad. Dlatego moim głównym celem jest pokazanie, że dychotomiczny podział stóp wzrostu, powszechnie stosowany w praktyce gospodarczej czy finansowej, może też mieć zastosowanie w statystyce.

BIBLIOGRAFIA

Aczel A. (2000) Statystyka w zarządzaniu. PWN, Warszawa.

Jóźwiak J., Podgórski J. (1997) Statystyka od podstaw. PWE, Warszawa.

Kellison S. G. (1991) The Theory of Interest Rate. IRWIN, Boston.

Podgórska M., Klimkowska J. (2005) Matematyka finansowa. PWN, Warszawa.

Puławska-Turyna B. (2011) Statystyka dla ekonomistów. Difin, Warszawa.

Sobczyk M. (1995) Matematyka finansowa. Placet, Warszawa.

Sobczyk M. (2002) Statystyka. PWN, Warszawa.

Szałański M. (2001) Matematyka finansowa. Toruńska Szkoła Zarządzania.

Timofiejuk I. (2002) Mierniki a wskaźniki statystyczne (indeksy). Wiadomości Statystyczne, 4, 1-7.

Törnqvist L., Vartia P., Vartia Y. O. (1985) How Should Relative Changes be Measured? The American Statistician, 39(1), 43-46.

Vartia Y. O. (1976) Relative Change and Index Numbers. ETLA A, The Research Institute of the Finnish Economy, 4. Helsinki.

[10] Np. algorytmy komórkowe w naukach społecznych czy fraktale w biologii.

TIME SERIES ANALYSIS: SIMPLE AND COMPOUND GROWTH RATE

Abstract: The analysis of the dynamics of phenomena describes the theory of indices (indicators). In the article I will try to show that it is possible to extend the analysis of relative increments (growth rates) by dividing them into two measures: simple growth rate and commercial growth rate. The above differentiation of rates is known and commonly used in economic settlements and financial mathematics. It consists in calculating the interest rate on the value of the initial (base) or final (tested) variable.

Keywords: time series analysis, index theory, dynamics analysis, simple growth rate, compound growth rate

JEL classification: C02, C43