

Warsaw University of Life Sciences – SGGW  
Institute of Economics and Finance  
Department of Econometrics and Statistics

**QUANTITATIVE METHODS  
IN ECONOMICS**

**METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH  
EKONOMICZNYCH**

**Volume XXI, No. 2**

Warsaw 2020

## **EDITORIAL BOARD**

Editor-in-Chief: Bolesław Borkowski

Vice-Editor-in-Chief: Hanna Dudek

Managing Editor: Grzegorz Koszela

Theme Editors:

Econometrics: Bolesław Borkowski

Multidimensional Data Analysis: Wiesław Szczesny

Mathematical Economy: Zbigniew Binderman

Analysis of Labour Market: Joanna Landmesser

Financial Engineering: Monika Krawiec

Data Science: Michał Gostkowski

Theory of Risk: Marek Andrzej Kociński

Statistical Editor: Wojciech Zieliński

Technical Editors: Jolanta Kotlarska, Elżbieta Saganowska

Language Editor: Agata Cienkusz

Native Speaker: Yochanan Shachmurove

Editorial Assistant: Luiza Ochnio

## **SCIENTIFIC BOARD**

Adnene Ajimi (University of Sousse, Tunisia)

Heni Boubaker (University of Sousse, Tunisia)

Vasily Dikussar (Doradnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Russia)

Peter Friedrich (University of Tartu, Estonia)

Paolo Gajo (University of Florence, Italy)

Agnieszka Gehringer (University of Göttingen, Germany)

Anna Maria Gil-Lafuente (University of Barcelona, Spain)

Jaime Gil-Lafuente (University of Barcelona, Spain)

Vasile Glavan (Moldova State University, Moldova)

Francesca Greselin (The University of Milano-Bicocca, Italy)

Ana Kapaj (Agriculture University of Tirana, Albania)

Jirawan Kitchaicharoen (Chiang Mai University, Thailand)

Yuriy Kondratenko (Black Sea State University, Ukraine)

Vassilis Kostoglou (Alexander Technological Educational Institute of Thessaloniki, Greece)

Karol Kukula (University of Agriculture in Krakow, Poland)

Kesra Nermend (University of Szczecin, Poland)

Nikolas N. Olenev (Doradnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Russia)

Alexander N. Prokopenya (Brest State Technical University, Belarus)

Yochanan Shachmurove (The City College of The City University of New York, USA)

Mirbulat B. Sikhov (al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan)

Marina Z. Solesvik (Nord University, Norway)

Ewa Syczewska (Warsaw School of Economics, Poland)

Achille Vernizzi (University of Milan, Italy)

Andrzej Wiatrak (University of Warsaw, Poland)

Dorota Witkowska (University of Lodz, Poland)

ISSN 2082-792X

e-ISSN 2543-8565

© Copyright by Department of Econometrics and Statistics WULS – SGGW  
(Katedra Ekonometrii i Statystyki SGGW)

Warsaw 2020, Volume XXI, No. 2

The original version is the paper version


Journal homepage: [qme.sggw.pl](http://qme.sggw.pl)

Published by Warsaw University of Life Sciences Press

## CONTENTS

Czech Katarzyna – The Risk Premium in the Foreign Exchange Market. The Application of ARCH-In-Mean Model .....	71
Sielska Agata, Nojszewska Ewelina – Analysis of the Similarities and Differences between Poviats in the Małopolskie Voivodeship in Terms of SARS-Cov-2 Infections .....	80
Kisielińska Joanna – Wpływ asymetrii rozkładu na dobór bootstrapowego estymatora kwartyli .....	90
Kowalczyk Małgorzata, Ochnio Luiza – Wybrane koncepcje zarządzania projektami IT oparte na metodyce PMI – studium przypadku .....	102
Zielińska-Kolasińska Zofia – Maksymalna potęga ogólna grupy państw .....	113

## THE RISK PREMIUM IN THE FOREIGN EXCHANGE MARKET. THE APPLICATION OF ARCH-IN-MEAN MODEL

Katarzyna Czech  <https://orcid.org/0000-0002-0660-7124>  
Institute of Economics and Finance  
Warsaw University of Life Sciences – SGGW  
e-mail: katarzyna\_czech@sggw.edu.pl

**Abstract:** Forward premium anomaly is one of the most popular puzzles in the theory of international finance. The phenomenon is explained by, among others, the existence of non-zero risk premium in the foreign exchange market. The paper applies ARCH-in-mean models to assess whether there exists a time-varying risk premium in the USD/PLN and AUD/JPY foreign exchange markets. The results indicate the existence of a non-zero risk premium in the analyzed markets. As far as the USD/PLN is concerned, the risk premium takes negative values when the risk measured by conditional variance rises. The results suggest that when there is a surge in risk, the US dollar's appreciation and Polish zloty depreciation increases. The results confirm the US dollar as a safe-haven currency that tends to appreciate during high-volatility and crisis periods. Moreover, the study shows that the risk premium in the AUD/JPY market takes positive values when the risk measured by conditional variance rises. It implies that when there is a mount in risk, the appreciation of Japanese yen increases. Furthermore, research results reveal the positive and significant relationship between stock market uncertainty and exchange rates conditional volatility.

**Keywords:** foreign exchange market, risk premium, ARCH-M model, forward premium puzzle, VIX

**JEL classification:** C22, D84, E44, F31, G15

### INTRODUCTION

Uncovered interest rate parity (UIP) states that interest rate differential is equal to the expected change in exchange rates. One of the most puzzling features of the foreign exchange market is the tendency of low interest-yielding currencies to

<https://doi.org/10.22630/MIBE.2020.21.2.7>

depreciate rather than appreciate as UIP suggests. The UIP puzzle is generally known as the forward premium puzzle. Literature provides several explanations of the phenomenon. One possible reason is the existence of a risk premium. Other explanations involve invalidity of the rational expectations hypothesis, peso problems and market inefficiency. The paper is focused on risk premium inherent in the uncovered interest rate parity condition. The time-varying risk premium is one of the most frequently cited reasons for the existence of UIP failure [e.g. Froot, Thaler 1990; McCallum 1994; Chinn, Meredith 2004; Li et al. 2012; Kumar 2019].

In the paper, we presume the rationality of market participants expectations. We assume that the forward premium puzzle results from the existence of a non-zero, time-varying risk premium. The research is carried out for two currency pairs, i.e. AUD/JPY and USD/PLN from June 2006 to November 2020. The paper aims to assess whether there exists a significant and time-varying risk premium in the foreign exchange market. The article applies ARCH-in-mean (ARCH-M) models. Engle, Lilien and Robins [1987] are among the first who described ARCH-M models' use in explaining risk premiums in the financial market. Berk and Knot [2001] applied ARCH-M models to analyse the risk premium in the currency market.

The remainder of the paper is organised as follows. Section 2 reviews the relevant literature. The subsequent one presents methodology and data. The empirical results are described in section 4. The last section provides concluding remarks.

## MODELING THE RISK PREMIUM IN THE FOREIGN EXCHANGE MARKET

Uncovered interest rate parity (UIP) states that interest rate differential equals to the expected change in exchange rates:

$$E_t(s_{t+k}|\Omega_t) - s_t = i_t - i_t^* \quad (1)$$

where  $E_t(s_{t+k}|\Omega_t)$  denotes the expectation of natural logarithm of the spot exchange rate at time  $t+k$ , based on information known at time  $t$ ;  $s_t$  denotes the natural logarithm of the spot exchange rate at time  $t$  (quote currency units per unit of base currency);  $i_t$  and  $i_t^*$  are nominal interest rates of a quote and base currency, respectively. Assuming Covered Interest Parity (CIP) holds ( $f_t^{(k)} - s_t = i_t - i_t^*$ ), the UIP can be expressed as follows:

$$E_t(s_{t+k}|\Omega_t) - s_t = f_t^{(k)} - s_t \quad (2)$$

where  $f_t^{(k)}$  is the natural logarithm of the  $k$ -period forward exchange rate.

Market expectations of future spot exchange rates are hardly observable. Therefore, the UIP hypothesis is tested jointly with the assumption of rational expectations in the exchange rate market. Under the assumption of rational expectations, the future value of spot exchange rate ( $s_{t+k}$ ) is equal the expected spot

exchange rate at time  $t+k$  ( $E_t(s_{t+k}|\Omega_t)$ ) plus a white-noise error term ( $\eta_{t+k}$ ) which is uncorrelated with information available at time  $t$ :

$$s_{t+k} = E_t(s_{t+k}|\Omega_t) + \eta_{t+k} \quad (3)$$

Many researchers have tested UIP by using the equation (4):

$$s_{t+k} - s_t = \alpha + \beta (f_t^{(k)} - s_t) + \varepsilon_{t+k} \quad (4)$$

where  $s_{t+k}$  and  $s_t$  are natural logarithms of spot exchange rate at time  $t+k$  and time  $t$  respectively;  $f_t^{(k)}$  is the logarithm of the  $k$ -period forward exchange rate and  $\varepsilon_{t+k}$  is a disturbance term which is uncorrelated with information available at time  $t$ . If an agent is endowed with rational expectations and risk-neutral, we should expect the slope parameter  $\beta$  to be equal to unity ( $\beta = 1$ ) and the coefficient  $\alpha$  to be equal to zero ( $\alpha = 0$ ). A well-known empirical regularity is that  $\beta$  in equation (4) is significantly less than one, and very often closer to minus unity than plus unity [Froot, Thaler 1990]. According to Fama [1984], the negativity of the  $\beta$  parameter results from the risk premium required by risk-averse market participants. They demand a higher profit than the interest rate differential in return for the risk of holding foreign currency.

If market participants are risk-averse, then the forward rate will differ from the expected spot exchange rate by a risk premium. Froot and Frankel [1989] define a risk premium ( $p_{t+k}$ ) as the difference between the forward exchange rate at time  $t$  for  $k$  periods ahead ( $f_t^{(k)}$ ) and the expected spot exchange rate at time  $t+k$  ( $E_t(s_{t+k}|\Omega_t)$ ):

$$p_{t+k} = f_t^{(k)} - E_t(s_{t+k}|\Omega_t) \quad (5)$$

Under risk neutrality, forward exchange rate at time  $t$  for  $k$  periods ahead ( $f_t^{(k)}$ ) should equal to the expected spot exchange rate at time  $t+k$  ( $E_t(s_{t+k}|\Omega_t)$ ). If  $f_t^{(k)} \neq E_t(s_{t+k}|\Omega_t)$  then the investors incur a premium from buying the currency forward at time  $t$  for  $k$  periods ahead relative to its expected spot price at time  $t+k$  [Engel, 1996]. Under the assumption of rational expectations (3) we define the risk premium ( $p_{t+k}$ ) as the difference between the forward exchange rate at time  $t$  for  $k$  periods ahead ( $f_t^{(k)}$ ) and the future value of spot exchange rate ( $s_{t+k}$ ) [Czech 2016]:

$$p_{t+k} = f_t^{(k)} - s_{t+k} \quad (6)$$

Although the risk premium in the foreign exchange market has been examined in many papers before, the article focuses mainly on works that apply autoregressive conditional heteroscedasticity models (ARCH). According to Hodrick [1987, p. 67] "modelling the conditional variance may be a fruitful direction to pursue to understand the nature of the rejection of the unbiasedness hypothesis and to determine whether the rejection is due to a time-varying risk premium". Domowitz and Hakkio [1985] are the first who modelled the risk premium based on the ARCH specification of Engle [1982]. They assume that risk premium has a constant

component ( $\alpha$ ) and a time-varying component, i.e. the conditional variance of the error term ( $h_{t+k}$ ):

$$p_{t+k} = \alpha + \delta h_{t+k} \quad (7)$$

There is no risk premium if  $\alpha$  and  $\delta$  are insignificantly different from zero. There is a constant risk premium if  $\alpha \neq 0$  and  $\delta = 0$ . There is a time-varying risk premium when  $\alpha \neq 0$  and  $\delta \neq 0$ . Domowitz and Hakkio [1985] provide evidence of non-zero constant risk premium for the United Kingdom and Japan's currencies. However, they cannot reject the null hypothesis of no risk premium for the currencies of Germany, France and Switzerland.

In 1987 Engle et al. [1987] introduced ARCH-in-mean (ARCH-M) models where the conditional variance is a determinant of the risk premium. These models allow conditional variance to affect the mean. By applying ARCH-M, they modelled the interest rate time series. Berk and Knot [2001] apply the ARCH-M model to estimate the UIP relationship with a time-varying risk premium. Malliaropoulos [1997] uses multivariate generalised autoregressive conditional heteroscedasticity in mean model (GARCH-M) to explain the risk premium as a function of cross-currency conditional covariance. Following Bollerslev [1990] and Baillie and Bollerslev [1990], he employs a particular parametrisation of the multivariate GARCH process to model the conditional covariance matrix of unforecastable components of deviation from uncovered interest rate parity. Malliaropoulos [1997] provides evidence of a time-varying risk premium for all currencies studied. His model suggests that time-variation in risk premium results from the time-varying conditional second moments determining conditional betas in the capital asset pricing model and fluctuations in expected excess market returns.

## METHODOLOGY AND DATA

The forward premium puzzle can be reflected by assuming that the forward exchange rate does not provide an unbiased forecast of the future spot rate. One possible explanation for the forward discount bias is the existence of a non-zero risk premium. In the paper, the GARCH-M( $q,p$ ) model is applied to test the risk premium in the USD/PLN and AUD/JPY exchange rate markets. The class of GARCH-M are often used to test for the risk premium in financial time series. Based on the equations (6) and (7) the applied GARCH-M model is described as follows:

$$\begin{cases} f_t^{(k)} - s_{t+k} = \alpha + \delta h_{t+k} + \varepsilon_{t+k} \\ \varepsilon_{t+k} = \sqrt{h_{t+k}} \vartheta_{t+k} \\ h_{t+k} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^q \varphi_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \varphi_j h_{t-j} + \gamma VIX_t \\ \vartheta_{t+k} \sim GED(0,1, \omega) \end{cases} \quad (8)$$

The difference between logarithmic values of forward exchange rate at time  $t$  for  $k$  periods ahead ( $f_t^{(k)}$ ) and the logarithmic values of spot exchange rate in time  $t+k$  ( $s_{t+k}$ ) reflects the risk premium ( $p_{t+k}$ ). The risk premium is described by the linear function of conditional variance with a constant component ( $\alpha$ ) and a time-varying component ( $\delta h_{t+k}$ ). The conditional variance is parameterised as a function of the information set available to investors [Engle et al. 1987]. The variance equation contains previous innovations or surprises ( $\varepsilon_{t-i}^2$ ) and the VIX Index (S&P 500 option-implied volatility index) that is treated as a benchmark for the uncertainty level in the financial markets. The VIX Index, created by Whaley [2009], is perceived as the popular measure of investors' attitude towards risk [Coudert, Gex 2008] and is widely used as a barometer for financial market uncertainty. The increase in the VIX Index might be associated with an appreciation of safe haven (e.g. US dollar) or low-yielding (e.g. Japanese yen) currencies [Clarida et al. 2009]. The model captures the conditional distribution's fat tails by applying the generalised error distribution (GED). The series stationarity is checked based on the augmented Dickey-Fuller (ADF) test [1979]. The orders  $q$  and  $p$  in GARCH-M ( $q,p$ ) are selected based on the Akaike Information Criterion (AIC) [1979]. The models are estimated with the maximum likelihood method. The log-likelihood function was maximised using Marquardt's algorithm [1963].

Data set consists of weekly AUD/JPY and USD/PLN spot exchange rates, weekly AUD/JPY and USD/PLN 1-week forward exchange rates and weekly VIX Index logarithmic changes. Non-overlapping weekly data with 1-week forward exchange rates are applied to avoid possible estimation biases in standard errors arising from overlapping data. The study covers the period from 13 June 2006 to 24 November 2020. The time range results from the availability of data on forward exchange rates. Data are obtained from Refinitiv Datastream.

## EMPIRICAL RESULTS

ARCH-M model (8) is built based on the stationarity time series, i.e. the difference between logarithmic values of forward exchange rate at time  $t$  for  $k$  periods ahead ( $f_t^{(k)}$ ) and the logarithmic values of spot exchange rate in time  $t+k$  ( $s_{t+k}$ ), and the logarithmic changes of the VIX Index ( $\ln(\frac{VIX_{t+k}}{VIX_t})$ ). The model is built for  $k$  equals 1 week. The Augmented Dickey-Fuller tests indicate that the null hypothesis of a unit root is rejected for all considered time series, at the 1% significance level. Based on the Akaike information criterion (AIC), the ARCH-M(1) model is selected. The sign and bias test for asymmetric GARCH effects does not reveal any asymmetry; thus, the application of asymmetric GARCH models such as threshold GARCH or exponential GARCH is not justified.

Table 1 presents the results of the ARCH(1)-M models for USD/PLN and AUD/JPY exchange rates. The intercept  $\alpha$  is significant at the 1% level, which means



that there is a constant risk premium both in the USD/PLN and AUD/JPY markets (table 1). The coefficient of the time-varying risk premium  $\delta$  is significant at the 1% level for both analysed exchange rates; however, it takes negative values for USD/PLN exchange rate and positive values for AUD/JPY exchange rate. The USD/PLN represents the exchange rates where base currency, i.e. the US dollar is a lower-yielding currency and Polish zloty a higher-yielding currency. When there is an increase of risk in the market, the US dollar appreciates against Polish zloty and the USD/PLN exchange rate increases. It is worth emphasising the US dollar is an example of a safe-haven currency that tends to appreciate during high-volatility, crisis periods [Hossfeld, MacDonald 2015; Wen, Cheng 2018]. Thus, the risk premium  $f_t^{(k)} - s_{t+k}$  in the USD/PLN market takes negative values when the risk measured by conditional variance increases. Estimated negative coefficient  $\delta$  implies that when there is an increase in risk, the appreciation of base currency (US dollar) and depreciation of quote currency (PLN) increases. The results confirm the US dollar as a safe-haven currency that tends to appreciate during high-volatility and crisis periods.

Table 1. ARCH(1)-M model results

Exchange rates	Parameters	Estimated Coefficients	P-values
USD/PLN	$\alpha$	0.004	0.002
	$\delta$	-10.209	0.007
	$\varphi_0$	0.001	<0.001
	$\varphi_1$	0.296	<0.001
	$\gamma$	0.001	<0.001
	$\omega$	1.289	<0.001
AUD/JPY	$\alpha$	-0.027	<0.001
	$\delta$	75.666	<0.001
	$\varphi_0$	0.001	<0.001
	$\varphi_1$	0.022	0.003
	$\gamma$	0.001	<0.001
	$\omega$	1.029	<0.001

Source: own calculation based on data from Refinitiv Datastream

The AUD/JPY represents the exchange rates where base currency, i.e. the Australian dollar is a higher-yielding currency and Japanese yen a lower-yielding currency. When there is an increase of risk in the market, the Japanese yen appreciates against the Australian dollar and the AUD/JPY exchange rate decreases. The Japanese yen is an example of funding currency in the well-known currency strategies carry trade and tends to appreciate during high-volatility, crisis periods

[Liu et al. 2012; Czech 2020]. Thus, the risk premium  $f_t^{(k)} - s_{t+k}$  in the AUD/JPY market takes positive values when the risk measured by conditional variance increases. Estimated positive coefficient  $\delta$  implies that when there is an increase in risk, the appreciation of quote currency (Japanese yen) increases. The significantly different than zero coefficient  $\delta$  suggests that there are risk-averse market participants in the market, and they require more return when they face a higher risk. The research results indicate the existence of a statistically significant, non-zero risk premium in the analyzed currency markets. The results are in line with Froot and Thaler [1990], Li et al. [2012], Kumar [2019], among other.

Variance equation coefficients are positive and significant in both estimated ARCH-M(1) models (table 1). The variance equation includes an additional independent variable, i.e. S&P 500 option-implied volatility index VIX, that reflects the stock market uncertainty. The results show that the VIX Index has a positive and significant impact on the USD/PLN and AUD/JPY conditional variance. It means that when the stock market uncertainty rises the volatility in the analysed foreign exchange markets increases.

## SUMMARY

One of the most puzzling features of the foreign exchange market is the tendency of low interest-yielding currencies to depreciate rather than appreciate as the uncovered interest rate parity suggests. One possible reason for the UIP failure is the existence of a risk premium. The paper is focused on risk premium inherent in the uncovered interest rate parity condition. It aims to assess whether there exists a significant and time-varying risk premium in the foreign exchange market. The research is carried out for two currency pairs, i.e. AUD/JPY and USD/PLN from June 2006 to November 2020. The paper applies ARCH-M models.

The results reveal a significantly different than zero risk premium in the USD/PLN and AUD/JPY foreign exchange markets. The time-varying risk premium coefficient is significant at the 1% level for both analysed exchange rates; however, it takes negative values for USD/PLN exchange rate and positive values for AUD/JPY exchange rate. The USD/PLN market's risk premium takes negative values when the risk measured by conditional variance increases. The estimated negative coefficient of the time-varying risk premium implies that when there is a surge in risk, the appreciation of the US dollar and depreciation of Polish zloty increases. The results confirm the US dollar as a safe-haven currency that tends to appreciate during high-volatility and crisis periods. The risk premium in the AUD/JPY market takes positive values when the risk measured by conditional variance increases. The estimated positive coefficient of the time-varying risk premium implies that when there is a mount in risk, the appreciation of lower-yielding Japanese yen increases. The Japanese yen is an example of funding currency

in the well-known currency strategies carry trade and tends to appreciate during high-volatility periods.

Moreover, the study shows that the VIX Index has a positive and significant impact on the conditional variance of USD/PLN and AUD/JPY. It means that when the stock market uncertainty rises the volatility in the analysed foreign exchange markets increases. The results suggest that there exist non-zero risk premium in the foreign exchange market, and it might contribute to the existence of UIP failure.

## REFERENCES

- Akaike H. (1976) Canonical Correlation Analysis of Time Series and the Use of an Information Criterion. *Mathematics in Science and Engineering*, 126, 27-96.
- Berk J. M., Knot K. H. (2001) Testing for Long Horizon UIP using PPP-based Exchange Rate Expectations. *Journal of Banking & Finance*, 25(2), 377-391.
- Bollerslev T. (1990) Modelling the Coherence in Short-run Nominal Exchange Rates: a Multivariate Generalised ARCH Model. *The Review of Economics and Statistics*, 72(3), 498-505.
- Chinn M. D., Meredith G. (2004) Monetary Policy and Long-horizon Uncovered Interest Parity. *IMF staff papers*, 51(3), 409-430.
- Clarida R., Davis J., Pedersen N. (2009) Currency Carry Trade Regimes: Beyond the Fama regression. *Journal of International Money and Finance*, 28(8), 1375-1389.
- Coudert V., Gex M. (2008) Does Risk Aversion Drive Financial Crises? Testing the Predictive Power of Empirical Indicators. *Journal of Empirical Finance*, 15(2), 167-184.
- Czech K. (2016) Anomalia premii terminowej na rynku jena japońskiego, Wydawnictwo SGGW, Warszawa (in Polish).
- Czech K. (2020) Speculative Trading and its Effect on the Forward Premium Puzzle: New Evidence from Japanese Yen Market. *Bank i Kredyt*, 51(2), 167-188.
- Dickey D., Fuller W. A. (1979) Distribution of the Estimators for Time Series Regressions with a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association*, 74(366), 427-431.
- Domowitz I., Hakkio C. S. (1985) Conditional Variance and the Risk Premium in the Foreign Exchange Market. *Journal of International Economics*, 19(1-2), 47-66.
- Engel C. (1996) The Forward Discount Anomaly and the Risk Premium: A Survey of Recent Evidence. *Journal of Empirical Finance*, 3(2), 123-192.
- Engle R. F. (1982) Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4), 987-1007.
- Engle R. F., Lilien D. M., Robins R. P. (1987) Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model. *Econometrica*, 55(2), 391-407.
- Fama E. F. (1984) Forward and Spot Exchange Rates. *Journal of Monetary Economics*, 14(3), 319-338.
- Froot K. A., Thaler R. H. (1990) Anomalies: Foreign Exchange. *Journal of Economic Perspectives*, 4(3), 179-192.
- Hodrick R. J. (1987) *The Empirical Evidence on the Efficiency of Forward and Futures Foreign Exchange Markets*, Harwood Academic Publishers, Chur, Switzerland.

- Hossfeld O., MacDonald R. (2015) Carry Funding and Safe Haven Currencies: A Threshold Regression Approach. *Journal of International Money and Finance*, 59, 185-202.
- Kumar, S. (2019). Does Risk Premium Help Uncover the Uncovered Interest Parity Failure?. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 63, 101135.
- Li D., Ghoshray A., Morley B. (2012) Measuring the Risk Premium in Uncovered Interest Parity using the Component GARCH-M Model. *International Review of Economics & Finance*, 24, 167-176.
- Liu M. H., Margaritis D., Tourani- Rad A. (2012) Risk Appetite, Carry Trade and Exchange Rates. *Global Finance Journal*, 23(1), 48-63.
- Malliaropulos D. (1997) A Multivariate GARCH Model of Risk Premia in Foreign Exchange Markets. *Economic Modelling*, 14(1), 61-79.
- Marquardt D. W. (1963) An Algorithm for Least-squares Estimation of Nonlinear Parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2), 431-441.
- McCallum B. T. (1994) A Reconsideration of the Uncovered Interest Parity Relationship. *Journal of Monetary Economics*, 33(1), 105-132.
- Wen X., Cheng H. (2018) Which is the Safe Haven for Emerging Stock Markets, Gold or the US Dollar?. *Emerging Markets Review*, 35, 69-90.
- Whaley R. E. (2009) Understanding the VIX. *The Journal of Portfolio Management*, 35(3), 98-105.

## ANALYSIS OF THE SIMILARITIES AND DIFFERENCES BETWEEN POWIATS IN THE MAŁOPOLSKIE VOIVODESHIP IN TERMS OF SARS-COV-2 INFECTIONS

Agata Sielska  <https://orcid.org/0000-0001-6880-8899>

Ewelina Nojszewska  <https://orcid.org/0000-0003-3176-0240>

Department of Applied Economics, Collegium of Management and Finances  
SGH Warsaw School of Economics

e-mail: asiels@sgh.waw.pl; ewelina.nojszewska@sgh.waw.pl

**Abstract:** The purpose of the paper is to study the genesis of SARS-CoV-2 infections in poviats in Małopolskie voivodeship from June 29 2020 till September 7 2020. At the beginning of September Małopolskie voivodeship was characterized by one of the highest numbers of confirmed cases of Covid-19 in Poland. It is a region of diversified structure. That fact can be reflected by the results of the study. The paper aims to verify whether the structure of infections is diversified in the region and to analyze the changes of these patterns in the studied period.

**Keywords:** SARS-CoV-2, Covid-19, hierarchical clustering, Ward's method

**JEL classification:** C38, I10

### INTRODUCTION

Coronavirus SARS-CoV-2 pandemic began at the end of 2019 in China. First cases were reported in the city Wuhan, capital of the Hubei province. In 2020 the virus spread throughout the globe, hitting Europe at first, then Americas. In Poland the first case of Covid-19 (disease caused by SARS-CoV-2 coronavirus) was reported on 4 of March in Lubuskie voivodship. In the paper we focus on Małopolskie voivodship where according to official statistics the disease reached on 9 of March. There are several reasons behind our decision. Firstly, at the time of preparing this study Małopolskie voivodeship was characterized by one of the highest numbers of confirmed cases of Covid-19 in Poland. Secondly, it is a region of diversified structure. It consists 22 poviats of different characteristics, including urban, urban-rural and rural communes and there is a question whether this structure

<https://doi.org/10.22630/MIBE.2020.21.2.8>

would be reflected by the results of the study. For example we may assume that in the poviats characterized by higher population density we may come across more cases. We aim to verify whether the structure of infections is diversified in the region and to analyze the changes of these patterns in the studied period.

The paper is organized as follows: in the first part we describe the evolution of SARS-CoV-2 pandemic in Małopolskie voivodship. Second part describes the methodology, while the third is dedicated to the presentation and discussion of the results. The paper ends with conclusions.

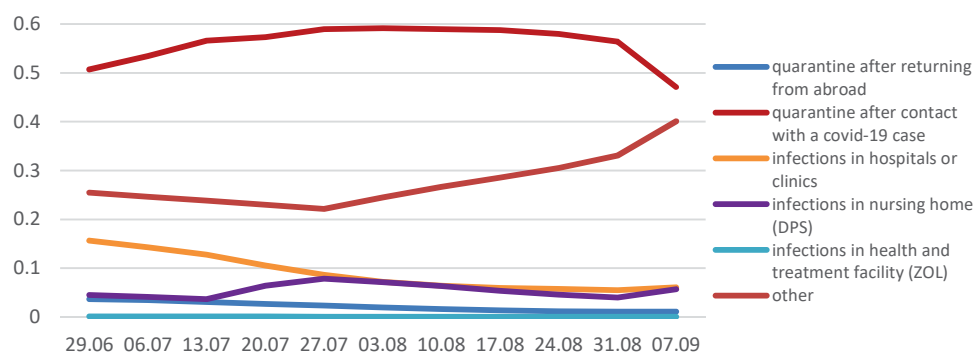
### SARS-COV-2 IN MAŁOPOLSKIE VOIVODSHIP

Poviats of Małopolska are diversified not only in terms of socio-economic conditions but also in terms of the number of cases and the structure of their sources.

First case of covid-19 in Małopolskie voivodship was reported on 09.03.2020, shortly after the virus reached Poland. In the study we focus on the cumulated (from March 9th) shares of infections from given sources.

As shown in Figure 1, in the analysed period we may notice that the infections after the contact and subsequent quarantine dominated. It is important to mention that the shares of people ill after the quarantine after returning from abroad were falling down despite the holiday season. This trend is very likely a result of changes in tourist traffic caused by restrictions. The initial high share of infections from this group results from numerous quarantines of people returning from abroad at beginning of the pandemic. The share of people infected in hospitals and clinics was decreasing as well. That can be related to developing effective procedures by both medical personnel and patients. The share of other sources of infection was increasing which may result from the summer season and family meetings, etc. Despite the described tendencies, the median ranks calculated for the sources of infections show that during the whole analysed period 3 sources dominated: *Quarantine after contact*, *Infection in hospitals or clinics* and *Other*.

Figure 1. Shares of sources of Covid-19 cases in Małopolskie voivodeship



Source: authors' own work based on provincial sanitary and epidemiological station (Wojewódzka Stacja Sanitarno-Epidemiologiczna – WSSE) in Kraków data

## METHODOLOGY

### Time period

The study covers period 29.06.2020-07.09.2020. This period was chosen as a consequence of data availability. Data on the number of cases by different source of contagion are publicly available for Małopolskie voivodeship since 26 of June 2020. We don't use data from September due to the fact that the situation might have changed with the beginning of the school year. Because of the long incubation period, the effect of opening of schools might not yet be seen on 07.09.2020.

### Variables

Following variables were selected as the socio-economic characteristics of the poviats: number of hospital beds, doctors and nurses (midwives included; working personnel) per 10,000 population, gross remuneration, population density, unemployment rate, healthcare expenditures from regional budget (1,000 PLN per 10,000 population – sphere 851), share of population over 60 years old, number of stationary social care facilities per 10,000 population, number of nursing homes per 10,000 population, inhabitants of stationary social care facilities per 10,000 population, large enterprises (over 1000 employees) per 10,000 population.

We include healthcare related variables in order to represent possible places of infection (as one of the sources is *infection in hospitals or clinics*) and, at the same time, treatment opportunities for other disease which affects the populations' health condition. We assume that high population density facilitates the transmission of the virus and in consequence the number of cases. Situation on the labor market may be also of importance as high labor market participation goes in relation with more contacts and moving within or outside cities. Large share of older population may also contribute towards more cases. Older people have usually other health problems which may burden their bodies and immune systems making it easier not only to catch the virus, but also to develop the symptoms which increases the probability of being tested and confirming the disease (compare [Ioannidis et. al 2020]). It is related to the number of nursing homes and other care and treatment facilities. The residents of such places are often older, ill and grouped together which makes it easier to spread the virus. What is important the staff is often employed in several facilities at the same time (including clinics and hospitals), which also facilitates the spread in case of even a single outbreak.

### Data sources

We use two main data sources. Data on the number of cases and sources of infections come from provincial sanitary and epidemiological station (Wojewódzka Stacja Sanitarno-Epidemiologiczna – WSSE) in Kraków, available on [<https://wsse.krakow.pl/page/>]. Data we use has weekly intervals, i.e. the



observations from following days were taken into account: 29.06, 06.07, 13.07, 20.07, 27.07, 03.08, 10.08, 17.08, 24.08, 31.08 and 07.09.

Until the end of August the following groups of infection sources were reported: *Quarantine after returning from abroad*, *Quarantine after contact*, *Infection in hospitals or clinics*, *Infection in a nursing home* (DPS – Dom Pomocy Społecznej), *Infection in a care and treatment facility* (ZOL – Zakład Opiekuńczo-Lecznicy), *Other*. Since September the group *Other* has been presented in more detailed form and the sources of contagion previously grouped under this label have been divided into: *Workplace*, *School*, *University (and dormitory)*, *Wedding*, *Pubs/cafes/restaurants/clubs*, *Other*. In the study for 07.09.2020 we still use the 7 abovementioned sources aggregated into a group named *Other* in order to be consistent with the previous months.

Data on socio-economic variables come from Local Data Bank of Statistics Poland (Bank Danych Lokalnych Głównego Urzędu Statystycznego - BDL GUS) [bdl.stat.gov.pl]. We used the most current data, i.e. those for 2019. Only in case of the hospital beds data for 2018 were used.

## Method

Before the clustering the data on sources of Covid-19 cases in poviats of Małopolskie voivodship were standardized according to the formula:

$$z_i = \frac{x_i - \min(x_i)}{\max(x_i) - \min(x_i)}, \quad (1)$$

where  $x_i$  denotes the value of variable  $x$  for  $i$ -th poviat.

In the next step poviats were clustered based on the similarities in the sources of infections using the Ward's method (Ward 1963). Assuming maximum number of clusters equal to 10, optimal number of clusters was identified based on Dunn index [Dunn 1974]. The calculations were done using R Software [R Core Team 2020], packages NbClust [Charrad et al. 2014] and cluster [Maechler et al. 2019].

## RESULTS

### Identified clusters – Covid-19 characteristics

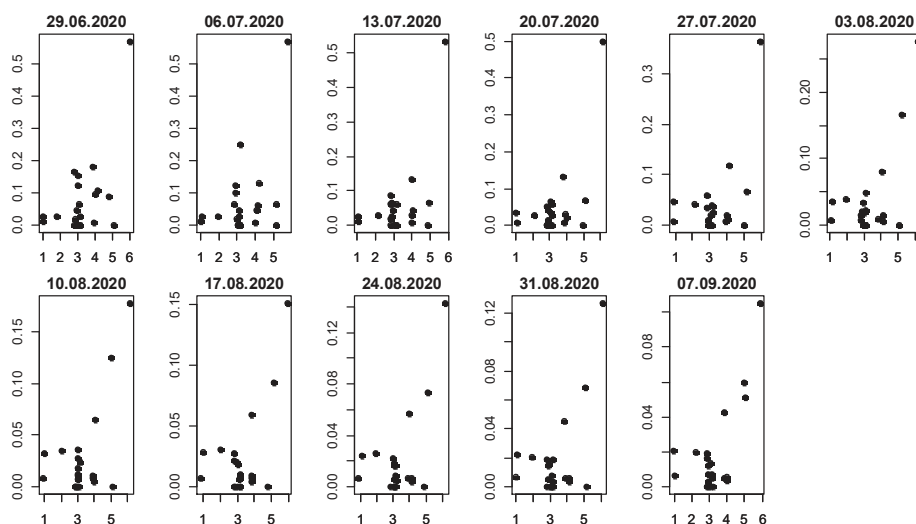
Ward's method with Dunn index resulted in identification of 6 clusters. First cluster consisted of poviats: bocheński and tarnowski. Second cluster included only one poviat: brzeski, while third one was the largest and included poviats: chrzanowski, miechowski, suski, myślenicki, oświęcimski, nowotarski, krakowski, Kraków, gorlicki, tatrzański, limanowski and wadowicki. Dąbrowski, nowosądecki, wielicki and Nowy Sącz made up the fourth group. Fifth cluster was made of poviats: oluski and proszowicki, while Tarnów was identified as a separate cluster.

The share of infections from the group: *quarantine after returning from abroad*, was high in Tarnów (6th cluster), in 5th group (olkuski and proszowicki) it



was relatively high since the beginning of August (at first in one poviát, on 7<sup>th</sup> of September in both – Figure 2).

Figure 2. Comparison of groups of poviát with respect to shares of Covid-19 cases, source: quarantine after returning from abroad



Source: authors' own work based on provincial sanitary and epidemiological station (Wojewódzka Stacja Sanitarno-Epidemiologiczna – WSSE) in Kraków data

The share of infections from the group: quarantine *after contact with a Covid-19 case* (Figure 3) was lowest in groups 2 (brzeski) and fifth (olkuski and proszowicki). It was relatively highest in 4<sup>th</sup> cluster, made up of dąbrowski, nowosądecki, wielicki and Nowy Sącz. In clusters 1 and 3 these shares were on a medium level.

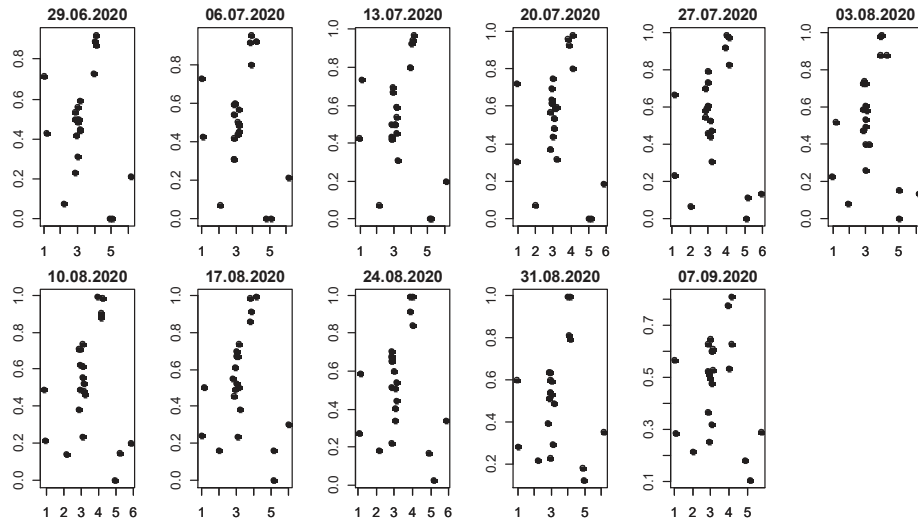
As shown in Figure 4, the share of infections in hospitals or clinics was highest in 2<sup>nd</sup> cluster (brzeski) and relatively high in the fifth one (olkuski and proszowicki).

Infections in nursing homes were reported rarely, at first only in poviát from the first group (bocheński and tarnowski – Figure 5), since the end of July also in the fifth group (proszowicki poviát). In September also three poviát from the fourth cluster (wadowicki, Nowy Sącz and nowosądecki) reported such cases.

As shown in Figure 6, *infections in a care and treatment facility (ZOL – Zakład Opiekuńczo-Leczniczy)* were reported only in second cluster which consists only of poviát brzeski.

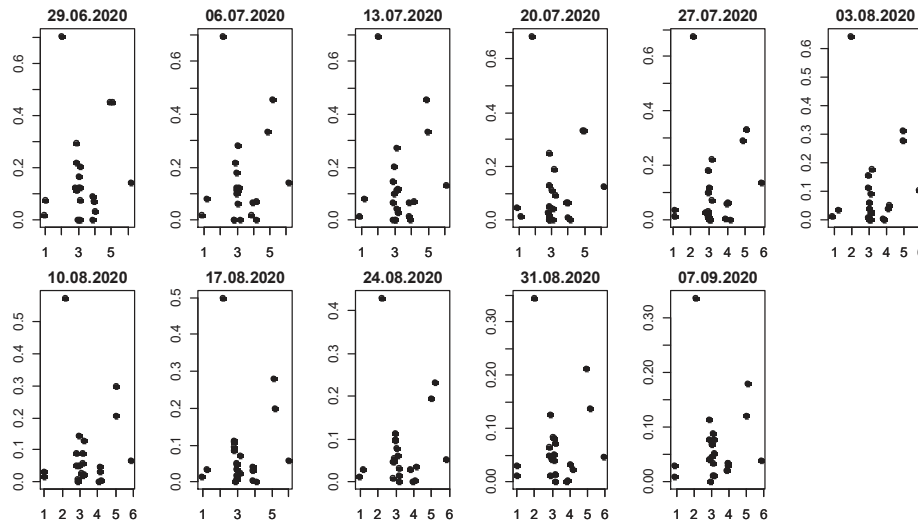
Throughout the period relatively highest share of infections coming from other sources (Figure 7) was reported in fifth group (olkuski and proszowicki) and the lowest – in fourth group (till September). This source was of growing relative importance in all the groups, while in groups 2 (brzeski) and sixth (Tarnów) this tendency was most visible. In the third group, the largest one, the share was also relatively high as compared with other clusters.

Figure 3. Comparison of groups of poviats with respect to shares of Covid-19 cases, source: quarantine after contact with a Covid-19 case



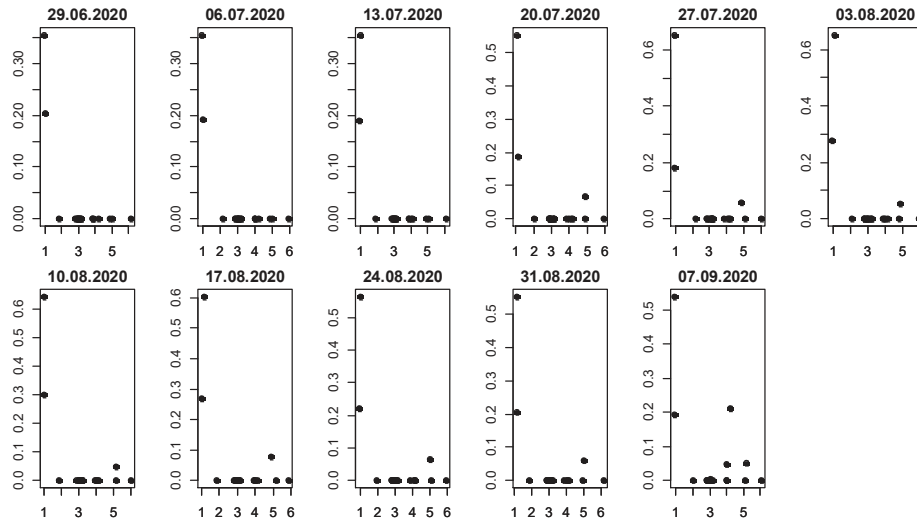
Source: authors' own work based on provincial sanitary and epidemiological station (Wojewódzka Stacja Sanitarno-Epidemiologiczna – WSSE) in Kraków data

Figure 4. Comparison of groups of poviats with respect to shares of Covid-19 cases, source: hospitals or clinics



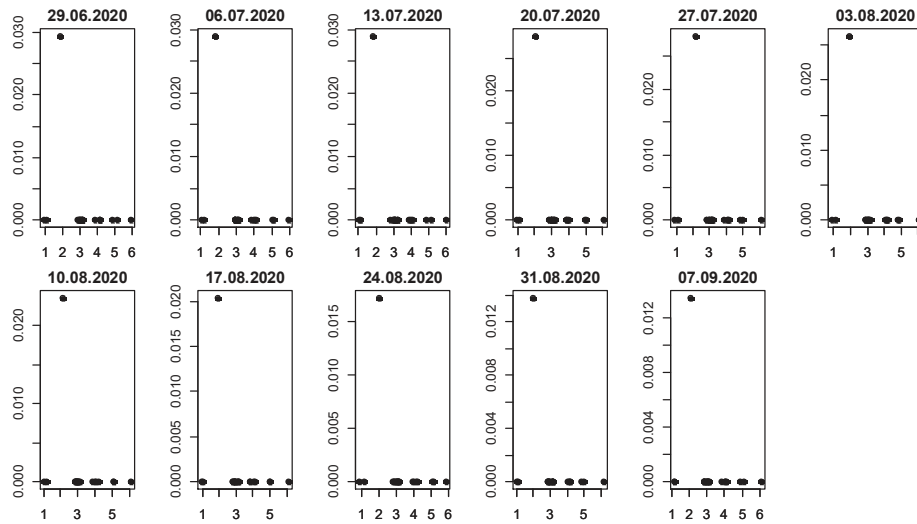
Source: authors' own work based on provincial sanitary and epidemiological station (Wojewódzka Stacja Sanitarno-Epidemiologiczna – WSSE) in Kraków data

Figure 5. Comparison of groups of poviats with respect to shares of Covid-19 cases, source: nursing homes (DPS)



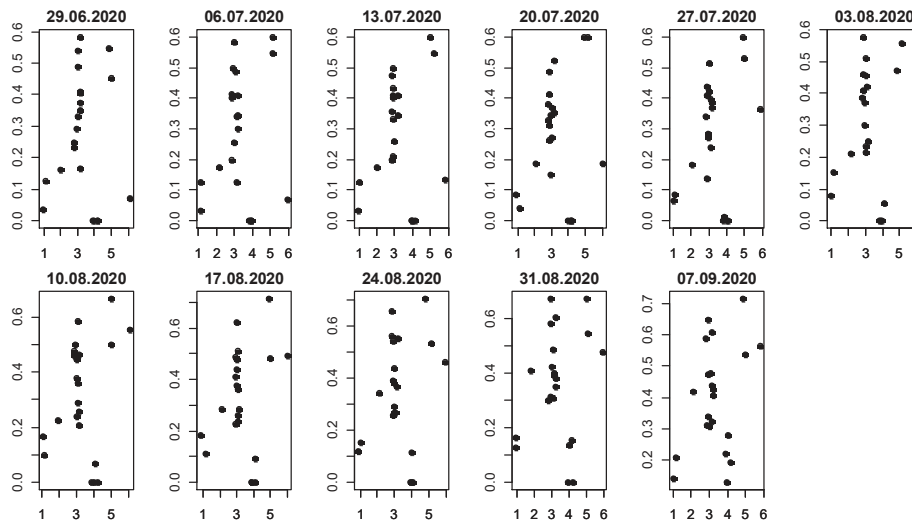
Source: authors' own work based on provincial sanitary and epidemiological station (Wojewódzka Stacja Sanitarno-Epidemiologiczna – WSSE) in Kraków data

Figure 6. Comparison of groups of poviats with respect to shares of Covid-19 cases, source: care and treatment facilities (ZOL)



Source: authors' own work based on provincial sanitary and epidemiological station (Wojewódzka Stacja Sanitarno-Epidemiologiczna – WSSE) in Kraków data

Figure 7. Comparison of groups of poviats with respect to shares of Covid-19 cases, source: other



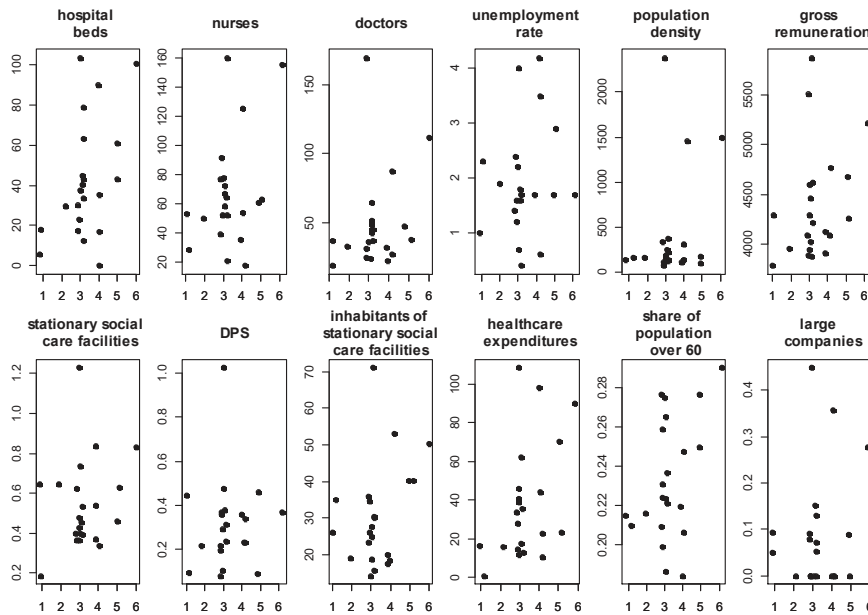
Source: authors' own work based on provincial sanitary and epidemiological station (Wojewódzka Stacja Sanitarno-Epidemiologiczna – WSSE) in Kraków data

### Identified clusters – socio-economic characteristics

Socio-economic differences between poviats of Małopolskie voivodship are a background of Covid-19 pandemic and our analysis. In this part of the paper we present the differences and similarities between cluster identified in the previous step in terms of their socio-economic characteristics (Figure 8). As for the number of beds per 10,000 population clear differences may be seen. Values of this variable are relatively low in case of groups 1, 2 and most of the poviats classified into 4<sup>th</sup> cluster (all except for Nowy Sącz). Relatively (medium-) high values may be noticed in poviats olkuski and proszowicki (fifth group) and high in Tarnów (sixth cluster). In case of the unemployment rate, the differences are not so clear. With few exceptions most of the poviats are characterized by medium levels that are not differentiated clearly between clusters. Clusters are more differentiated in terms of gross remuneration. Relatively low values may be noticed in first two clusters and in 3 out of 4 poviats classified into the fourth one. In case of proszowicki and olkuski poviats (i.e. fifth group), values were on a relatively (medium-)high level. Similar statement can be made in case of Tarnów (sixth group). The spread in the third group is the highest which results from high values in krakowski and Kraków. Taking into account the number of stationary social care facilities it can be noticed that the only group which may be clearly different from the others is the sixth one, but it is made up of only one poviat. Low values of this ratio may be found in bocheński, but this poviat was classified together with tarnowski, characterized by medium values. Similarly with DPSs. Most poviats was characterized by similar values. As for the

inhabitants of these facilities, the situation is more clear. High values can be found (apart from sixth group – Tarnów) in the fifth cluster i.e. poviats olkuski and proszowicki. Healthcare expenditures are low in groups 1-2 and high in 6th, while share of population over 60 is relatively low in groups 1-2 and high in 5-6.

Figure 8. Comparison of groups of poviats with respect socio-economic characteristics



Source: authors' own work based BDL GUS data

## CONCLUSIONS

Social and economic environment is diverse in the Małopolskie Voivodeship. Despite the differences it is possible to find cluster characterized by similar structure of the sources of infection in summer 2020.

First cluster can be described by relatively low shares of infections after quarantine after returning from abroad. Apart from the fact that infections in nursing homes were reported rarely, they were reported by both poviats from this group. Second cluster consists only of one poviat, and therefore it's characteristics are more clear. Poviat Brzeski is characterized by the lowest share of cases from the group: quarantine *after contact with a Covid-19 case*. On the other hand the share of infections in hospitals or clinics was highest. It was also the only poviat which reported *infections in a care and treatment facility (ZOL – Zakład Opiekuńczo-Leczniczy)*. The share of infections coming from other sources was of clearly growing relative importance. Third cluster is the largest one and the poviats assigned to it are differentiated. However we may conclude, that in this group the share of

cases from the last group: *other* was relatively high as compared with other clusters. The fourth group was characterized by the relatively high share of infections from the group: quarantine *after contact with a Covid-19 case*. In September also three poviats from the fourth cluster (wadowicki, Nowy Sącz and nowosądecki) reported cases of infections in nursing homes. Till September relatively lowest share of infections coming from other sources was reported in fourth group. In the fifth cluster the share of infections from the quarantine *after returning from abroad*, was relatively high since the beginning of August. The share of infections in hospitals or clinics was also relatively high. This group is also characterized by the highest share of infections coming from other sources throughout the period. In case of the sixth cluster, the share of infections from the quarantine *after returning from abroad*, was high. The growing importance of other sources of infections was clearly visible.

Finally, it is worth emphasizing that the division into groups is diverse. On the one hand, there is a fourth group with 12 poviats, and on the other hand, there are two groups with one poviat. However, sometimes the similarities between the groups are greater than in one group of several poviats.

There is no linkage between Covid-19 and socio-economic characteristics for the created clusters.

Current study has some limitations. Firstly socioeconomic data come from 2019. Secondly, in August 2019 additional restrictions were introduced in some of the Małopolska poviats. Limited volume of the paper does not allow us to include those in the study, however, due to the weekly data intervals, we believe, that some of that impact is included, even if it is not directly addressed.

## REFERENCES

- Charrad M., Ghazzali N., Boiteau V., Niknafs A. (2014) NbClust: An R Package for Determining the Relevant Number of Clusters in a Data Set. *Journal of Statistical Software*, 61(6), 1-36. URL: <http://www.jstatsoft.org/v61/i06/>
- Dunn J. (1974) Well Separated Clusters and Optimal Fuzzy Partitions. *Journal Cybernetics*, 4(1), 95-104.
- Ioannidis J., Axfors C., Contopoulos-Ioannidis D. G. (2020) Population-level COVID-19 Mortality Risk for Non-elderly Individuals overall and for Non-elderly Individuals without Underlying Diseases in Pandemic Epicenters. *Environmental Research*, 188, 109890. <https://doi.org/10.1016/j.envres.2020.109890>
- Maechler M., Rousseeuw P., Struyf A., Hubert M., Hornik K. (2019) cluster: Cluster Analysis Basics and Extensions. R package version 2.1.0.
- R Core Team (2020) R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL: <https://www.R-project.org/>
- Ward J. H. (1963) Hierarchical Grouping to Optimize an Objective Function, *Journal of the American Statistical Association*, 58, 236-244.  
<https://wsse.krakow.pl/page/> (in Polish).  
<https://bdl.stat.gov.pl/BDL/start>

## WPLYW ASYMETRII ROZKŁADU NA DOBÓR BOOTSTRAPOWEGO ESTYMATORA KWARTYLI

Joanna Kisielińska  <https://orcid.org/0000-0003-3289-1525>

Instytut Ekonomii i Finansów

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

e-mail: joanna\_kisielinska@sggw.edu.pl

**Streszczenie:** Badania dotyczą estymacji kwartyli (pierwszego, drugiego i trzeciego) w sytuacji gdy brak jest informacji o rozkładzie, z którego wylosowana została próba, zaś iloczyn  $np$  ma wartość całkowitą (gdzie  $n$  jest liczebnością próby, a  $p$  rzędem kwantyla). Jeśli  $np$  nie jest całkowite jako estymator kwantyla rzędu  $p$  wybierana jest zwykle statystyka pozycyjna rzędu  $[np]+1$ . Jeśli  $np$  nie jest całkowite rozwiązań jest znacznie więcej. W niniejszej pracy porównane zostały dwa dokładne bootstrapowe estymatory kwartyli w postaci pojedynczych statystyk pozycyjnych rzędu  $np$  i  $np + 1$ . Do oceny wykorzystane zostały obciążenie i wariancja estymatora oraz szerokość przedziałów ufności i zliczeniowy poziom ufności. Przedziały ufności wyznaczone zostały dokładną metodą percentyli. Próby losowano z rozkładów o asymetrii prawo i lewostronnej oraz symetrycznych, co umożliwiło wybór estymatora najbardziej odpowiedniego w danej sytuacji.

**Słowa kluczowe:** estymacja kwantyli, estymator bootstrapowy, dokładna metoda bootstrapowa, dokładna metoda percentyli

**JEL classification:** C13, C14

### WSTĘP

Dana jest zmienna losowa  $X$  o dystrybuancie  $F$  i funkcji gęstości  $f$ . Kwantylem rzędu  $p$  (lub  $p$ -kwantylem) rozkładu zmiennej  $X$  nazywamy  $\xi_p$ , takie że:

$$\xi_p = \inf \{x : F(x) \geq p\}. \quad (1)$$

Bahadur [1966] pokazał, że do estymacji kwantyli mogą być wykorzystywane kwantyle z próby:

<https://doi.org/10.22630/MIBE.2020.21.2.9>

$$\xi_{pn} = \inf \{x : F_n(x) \geq p\}. \quad (2)$$

gdzie  $F_n$  jest dystrybuantą empiryczną, a  $n$  liczebnością próby.

Kwantyle próbkowe przedstawiane są (a nawet utożsamiane [Pekasiewicz 2015, 14]) ze statystykami pozycyjnymi. Statystyką pozycyjną rzędu  $j$ ,  $n$  elementowej próby ( $X_{nj}$ ), nazywamy najmniejszy  $j$ -ty element próby. Funkcja gęstości tej statystyki (gdy  $X$  jest zmienną ciągłą) dana jest wzorem (np. Evans, Leemis, Drew [2006, 20]):

$$f_{X_{nj}}(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} f(x)[F(x)]^{j-1}[1-F(x)]^{n-j}. \quad (3)$$

Ze wzoru tego nie można skorzystać, jeśli nie jest znany rozkład, z którego pobrano próbę. Można natomiast zastosować metodę bootstrapową.

Jeśli do estymacji kwantyli wykorzystywane są statystyki pozycyjne, pojawia się pytanie o wartość  $j$  – czyli o rząd statystyk jaki należy wybrać. W przypadku, gdy  $np$  nie jest całkowite wybór jest jednoznaczny - zwykle przyjmowane jest  $j = [np]+1$ . Dla całkowitego  $np$  natomiast możliwości jest wiele. Ogólny zapis podają Hyndman i Fan [1996, 361]:

$$\hat{\xi}_{pn} = (1-\gamma)X_{nj} + \gamma X_{n,j+1}, \quad (4)$$

gdzie  $\frac{j-m}{n} \leq p < \frac{j-m+1}{n}$  dla  $m \in \mathbb{R}$  i  $0 \leq \gamma \leq 1$ . Parametr  $\gamma$  jest funkcją  $j$  i  $g$ , gdzie  $j = [pn+m]$  a  $g = pn + m - j$ .

W niniejszej pracy rozważania ograniczone zostaną do estymatorów kwantyli w postaci pojedynczych statystyk pozycyjnych.

Badania przedstawione w artykule dotyczą estymacji kwantyli (pierwszego, drugiego i trzeciego) w sytuacji, gdy brak jest informacji o rozkładzie, z którego wylosowana została próba, zaś iloczyn  $np$  ma wartość całkowitą. Celem ich jest porównanie dwóch estymatorów kwantyli w postaci statystyk pozycyjnych rzędu  $np$  i  $np + 1$  dla różnych rodzajów asymetrii rozkładów, z których losowana jest próba. Estymatory porównywane będą na podstawie wartości obciążenia i wariancji estymatora oraz szerokości przedziałów ufności i zliczeniowego poziomu ufności.

Jako metodę estymacji wybrano metodę bootstrapową w wersji dokładnej, której zastosowanie w przypadku kwantyli jest prostsze, niż w wersji klasycznej. Badania symulacyjne prowadzono metodą Monte Carlo. Obliczenia wykonane zostały w Excelu z wykorzystaniem języka VBA for Application.

## METODA BADAWCZA

Zakładamy, że dana jest próba pierwotna  $(x_1, \dots, x_n)$  wylosowana z nieznanego rozkładu  $F$ . Z próby tej losowanych jest ze zwracaniem  $B$  prób zwanych wtórnymi,



które oznaczone są przez  $(X_1^*, \dots, X_n^*)$ . Zmienne  $X_i^*$  mają jednakowy rozkład - rozkład empiryczny. Efron [1979] przyjmował, że wylosowanie każdego elementu próby pierwotnej jest jednakowe i równe  $1/n$ . Jednak, ze względu na skończoną dokładność pomiarów, w próbie losowej elementy mogą się powtarzać mimo, że  $X$  jest zmienną ciągłą. W takim przypadku rozkład empiryczny dany jest prawdopodobieństwami  $p_i$  wylosowania  $x_i$ , dla  $i=1, \dots, k$ , gdzie  $k$  jest liczbą różnych elementów próby. Suma wszystkich prawdopodobieństw  $p_i$  musi być równa 1.

Na podstawie każdej wylosowanej próby wtórnej wyznaczana jest wartość estymatora. W ten sposób otrzymywane jest  $B$  jego realizacji. Realizacje te określają bootstrapowy rozkład estymatora.

Liczba wszystkich możliwych do wylosowania prób wtórnych  $N$  jest równa liczbie wariacji z powtórzeniami, czyli  $n^n$ , przy czym liczba prób różnych jest mniejsza i wynosi  $\binom{2n-1}{n}$ . Każda unikalna próba wtórna może być następnie permutowana, ale jedynie na pozycjach o nie powtarzających się elementach. Metoda wykorzystująca wszystkie próby wtórne zwana jest w literaturze dokładną metodą bootstrapową (exact bootstrap method). Na możliwość jej stosowania zwrócili uwagę Fisher i Hall [1991], a algorytm pozwalający na jej użycie przedstawiony został między innymi w pracy Kisielińska [2014].

W przypadku, gdy estymatorem jest pojedyncza statystyka pozycyjna zastosowanie metody dokładnej jest prostsze niż klasycznej (z losowaniem), ponieważ znany jest rozkład dowolnej statystyki pozycyjnej określony na podstawie wszystkich prób wtórnych.

Bootstrapowy rozkład  $j$ -tej statystyki pozycyjnej dany jest formułą [Evans i in. 2006, 23] (przypadek losowania ze zwracaniem z populacji o rozkładzie dyskretnym):

$$P(X_{nj}^* = x_l) = \begin{cases} \text{dla } l = 1 \\ \sum_{w=0}^{n-j} \binom{n}{w} [f_n(x_1)]^{n-w} [S_n(x_2)]^w \\ \text{dla } l = 2, 3, \dots, k-1 \\ \sum_{u=0}^{j-1} \sum_{w=0}^{n-j} \binom{n}{u, n-u-w, w} [F_n(x_{l-1})]^u [f_n(x_l)]^{n-u-w} [S_n(x_{l+1})]^w, \\ \text{dla } l = k \\ \sum_{u=0}^{j-1} \binom{n}{u} [F_n(x_{k-1})]^u [f_n(x_k)]^{n-u} \end{cases}, \quad (5)$$

gdzie:  $f_n(x) = P(X_i^* = x)$ ,  $F_n(x) = P(X_i^* \leq x)$ ,  $S_n(x) = P(X_i^* \geq x)$ .

Realizacjami estymatora w postaci pojedynczej statystyki pozycyjnej mogą być jedynie elementy próby pierwotnej. Ponadto prawdopodobieństwa określone wzorem (5), w przypadku, gdy w próbie nie było powtórzeń, mają bardzo przydatną

własność – zależą jedynie od wielkości próby, a nie od jej elementów. Pozwala to na stworzenie gotowych tablic dla prób nawet bardzo dużych. Mając obliczone prawdopodobieństwa poszczególnych realizacji bez trudu można wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję estymatora<sup>1</sup>:

$$E(X_{nj}^*) = \sum_{l=1}^k x_l \cdot P(X_{nj}^* = x_l), \quad (6)$$

oraz:

$$V(X_{nj}^*) = \sum_{l=1}^k (x_l - E(X_{nj}^*))^2 \cdot P(X_{nj}^* = x_l). \quad (7)$$

To, że prawdopodobieństwa (5) zależą jedynie od  $n$  oznacza również, że z góry wiadomo, które elementy próby pierwotnej stanowią granice przedziałów ufności. Dla zadanego poziomu ufności  $1-\alpha$ , lewą granicę przedziału stanowi  $x_d$ , takie że  $d = \inf \left\{ m : \sum_{l=1}^m P(X_{nj}^* = x_l) \geq \alpha/2 \right\}$ , prawą zaś  $x_g$ , takie że  $g = n - m = \inf \left\{ m : \sum_{l=0}^m P(X_{nj}^* = x_{n-l}) \geq \alpha/2 \right\}$ .

Granice przedziałów ufności w przypadku estymatorów bootstrapowych wyznacza się metodą percentyli. W metodzie tej (opisanej np. w pracy Wilcox [2001, 88]),  $B$  wartości estymatora wyznaczonych na podstawie  $B$  prób wtórnych porządkujemy i wyznaczamy realizacje o numerach  $[\alpha/2 \cdot B]$  oraz  $B - [\alpha/2 \cdot B] + 1$ .

Metodę wyznaczania granic przedziałów ufności bazującą na rozkładzie dokładnego estymatora bootstrapowego (5) nazwać można dokładną metodą percentyli przez analogię do dokładnej metody bootstrapowej (metoda ta zastosowana do estymacji mediany została przedstawiona w pracy Kisieleńska [2016, 418]).

Ponieważ w przypadku bootstrapowych estymatorów w postaci pojedynczych statystyk pozycyjnych z góry wiadomo, które elementy próby stanowią granicę przedziałów ufności, metoda w wersji dokładnej jest wygodniejsza niż w wersji klasycznej (nie wymaga sortowania).

Dodać jeszcze należy, że jeżeli w próbie pierwotnej występują powtórzenia można również bez problemu zastosować metodę dokładną - wystarczy wówczas prawdopodobieństwa dla powtarzających się realizacji zsumować.

<sup>1</sup> Znajomość rozkładu nie jest konieczna do wyznaczenia wartości oczekiwanej i wariancji. Wzory pozwalające miary te obliczyć dla dowolnego L-estymatora podają Hudson i Ernst [2000, 91].

## ORGANIZACJA BADAŃ

Do estymacji kwartyli – pierwszego  $p=0.25$ , drugiego  $p=0.5$  (mediany) i trzeciego  $p=0.75$ , zastosowano dwa rodzaje bootstrapowych estymatorów:  $E_1 = X_{n,np}^*$  oraz  $E_2 = X_{n,np+1}^*$ . Estymatory te porównane zostały ze względu na obciążenie, wariancję oraz szerokość przedziałów ufności i zliczeniowy poziom ufności. Szacowanie tych miar przeprowadzono metodą symulacji Monte Carlo (MC). W każdym eksperymencie losowano po  $R$  prób losowych o zadanej liczebności z populacji o wybranych rozkładach. Ponieważ w eksperymentach symulacyjnych wiadomo z jakiego rozkładu losowana jest próba, bez trudu można oszacować obciążenie estymatora. Oszacowanie obciążenia i wariancji metodą MC jest następujące:

$$\begin{aligned} \hat{bias}_{MC} &= \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R E^r(X_{nj}^*) - \xi_p \\ \hat{V}_{MC} &= \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R V^r(X_{nj}^*) \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie  $E^r(X_{nj}^*)$  jest wartością oczekiwaną estymatora uzyskaną w  $r$ -tej replikacji, zaś  $V^r(X_{nj}^*)$  wariancją.

Podobnie szacowana jest średnia szerokość przedziałów ufności:

$$\hat{d}_{MC} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R (x_g^r - x_d^r), \quad (8)$$

gdzie  $x_g^r$  i  $x_d^r$  są granicami przedziału ufności uzyskanego w  $r$ -tej replikacji.

Zliczeniowy poziom ufności wyznaczany jest na podstawie wszystkich  $R$  replikacji jako:

$$\varphi_R = \frac{\#\{[x_d^r, x_g^r] : \xi_p \in [x_d^r, x_g^r]\}}{R}. \quad (9)$$

W eksperymentach symulacyjnych przedstawionych w niniejszym artykule, losowano po  $R=2000$  prób o liczebnościach od 20 do 60 ze wzrostem po 4 elementy. Liczebności dobrano tak, aby spełniony był warunek całkowitej wartości  $np$  dla wszystkich kwartyli.

Generatory liczb pseudolosowych zwracają liczby losowe  $\varphi_i$  z przedziału  $[0,1]$ , które były traktowane jako dystrybuanta. Wówczas  $i$ -ty element próby można wyznaczyć jako  $x_i = F^{-1}(\varphi_i)$ . Dla zapewnienia porównywalności wyników przyjęto jednakowe wartości dystrybuant dla obydwu estymatorów i wszystkich rozkładów, co uniezależnia wyniki obliczeń dla poszczególnych przypadków od jakości generatora.

Próby losowano z sześciu rozkładów: dwóch o asymetrii prawostronnej: (LogNorm(1,0.75) i Gamma(2,2)), dwóch o asymetrii lewostronnej (-LogNorm(1,0.6)+5 i Gamma(1.25,2.5)+5) oraz dwóch symetrycznych (N(3,0.5) i N(3,2)).

## WYNIKI BADAŃ

W celu oszacowania miar (7) i (8) wyznaczono rozkłady estymatorów E1 i E2 dla  $p = 0,25$ ,  $p = 0,5$  i  $p = 0,75$  i wybranych liczebności prób. W celu ilustracji właściwości rozkładów tych estymatorów sporządzono tabele 1 i 2.

Tabela 1. Prawdopodobieństwa poszczególnych realizacji estymatorów E1 i E2 dla przypadku  $p = 0,25$  i  $n = 20$

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E1	0,0026	0,0406	0,1270	0,2002	0,2148	0,1773	0,1193	0,0672	0,0321	0,0130
E2	0,0003	0,0109	0,0561	0,1285	0,1870	0,2008	0,1710	0,1198	0,0703	0,0346
$i$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
E1	4,4E-03	1,2E-03	2,7E-04	4,4E-05	5,2E-06	3,7E-07	1,4E-08	1,7E-10	3,3E-13	6,1E-18
E2	1,4E-02	4,8E-03	1,3E-03	2,7E-04	3,9E-05	3,6E-06	1,8E-07	3,2E-09	9,5E-12	3,7E-16

Uwagi:  $i$  oznacza numer określający element uporządkowanej próby pierwotnej

Źródło: opracowanie własne

Tabela 2. Numery elementów próby pierwotnej stanowiące granice przedziałów w ufności dla  $1-\alpha = 0,95$ , wyznaczone dokładną metodą percentyli

$n$	$p = 0,25$				$p = 0,5$				$p = 0,75$			
	E1		E2		E1		E2		E1		E2	
	$xd$	$xg$	$xd$	$xg$	$xd$	$xg$	$xd$	$xg$	$xd$	$xg$	$xd$	$xg$
20	1	10	2	11	5	15	6	16	10	19	11	20
24	2	12	3	13	6	18	7	19	12	22	13	23
28	2	13	3	14	8	20	9	21	15	26	16	27
32	3	14	4	15	10	22	11	23	18	29	19	30
36	4	16	5	17	11	25	12	26	20	32	21	33
40	5	17	5	18	13	27	14	28	23	36	24	36
44	5	18	6	19	15	29	16	30	26	39	27	40
48	6	19	7	21	16	32	17	33	28	42	30	43
52	7	21	8	22	18	34	19	35	31	45	32	46
56	8	22	8	23	20	36	21	37	34	49	35	49
60	8	23	9	24	22	38	23	39	37	52	38	53

Uwagi: Podane w tabeli wartości to kolejne element uporządkowanej próby pierwotnej stanowiące granice przedziałów ufności

Źródło: opracowanie własne

W tabeli 1 przedstawiono prawdopodobieństwa poszczególnych realizacji obydwu bootstrapowych estymatorów kwartyli pierwszego (którymi są kolejne elementy uporządkowanej próby pierwotnej) dla prób o liczebności  $n = 20$ . Przypomnieć należy, że wartości te są jednakowe dla wszystkich dwudziesto-elementowych prób i nie zależą od tego, z którego rozkładu próba została wylosowana. Rozkład ten ma jedynie wpływ na wartości poszczególnych realizacji – czyli elementy próby pierwotnej. Dzięki tym własnościom z góry wiadomo, które elementy próby pierwotnej są granicami przedziałów ufności. Numery te dla dwóch estymatorów kwartyli przedstawiono w tabeli 2 dla  $n$  od 20 do 60 z przyrostem po 4 elementy. Wyniki te potwierdzają stwierdzenie, że w przypadku estymacji kwantyli, dokładna metoda percentyli jest znacznie prostsza do zastosowania niż klasyczna (z losowaniem prób). Dodatkowo jest z pewnością dokładniejsza – analizy prowadzone na całej populacji prób wtórnych są pewniejsze niż prowadzone jedynie na wylosowanej z niej próbie, nawet badzo licznej.

Oszacowane obciążenie estymatora E1 zastosowanego do estymacji trzech kwartyli było w przypadku wszystkich rozkładów i niemal wszystkich liczebności prób ujemne, zaś estymatora E2 dodatnie, czego należało się spodziewać.

W tabeli 3 przedstawiono porównanie oszacowanych miar, uzyskanych bootstrapowymi estymatorami kwartyli - E1 i E2 oraz wybranych sześciu rozkładów. Przedziały szacowano przyjmując dla wszystkich kwartyli poziom ufności równy 0.95.

Na przewagę jednego estymatora nad drugim wskazuje niższe co do wartości bezwzględnej oszacowane obciążenie, mniejsza oszacowana wariancja i węższe oszacowane przedziały ufności. W przypadku zliczeniowego przedziału ufności przyjęto, że korzystniejsza jest wyższa jego wartość, choć nie jest to do końca stwierdzenie poprawne. Idealna sytuacja ma miejsce gdy zliczeniowy poziom ufności jest równy założonemu. Ze względu na dyskretny charakter rozkładów estymatorów bootstrapowych przeciwdziedzina dystrybuanty nie zawiera wszystkich wartości z przedziału  $[0,1]$ . Dlatego wyznaczone przedziały są zwykle nieco szersze niż wynikałoby to z przyjętego poziomu ufności, czego konsekwencją może być zawyżony zliczeniowy poziom ufności.

Dla wszystkich kwartyli, ze względu na wartość bezwzględną obciążenia oraz wariancję w przypadku prób z rozkładów o asymetrii prawostronnej, przewagę ma estymator E1 (wyjątek stanowi obciążenie estymatora kwartyli trzeciego dla dwóch liczebności prób). W przypadku prób z rozkładów o asymetrii lewostronnej zdecydowaną przewagę wykazywał (bez wyjątków) estymator E2. Jeśli próby losowano z rozkładów symetrycznych wariancję miał zwykle mniejszą estymator E2, zaś wartość bezwzględną obciążenia dla kwartyli pierwszego i drugiego zwykle estymator E1, a dla trzeciego E2. Dla przypadku rozkładów symetrycznych uznać można, że są obydwa estymatory niemal równoważne.

Jeśli chodzi o szerokość oszacowanych przedziałów ufności to oceny są podobne do tych sformułowanych dla wariancji (choć występują nieliczne wyjątki dla niektórych liczebności prób).

W przypadku zliczeniowego poziomu ufności, dla rozkładów asymetrycznych oceny są przeciwne niż dokonane na podstawie szerokości przedziałów ufności. Dla rozkładów symetrycznych i kwartyła pierwszego oraz drugiego przewagę wykazuje estymator E2 zarówno ze względu na szerokość przedziałów jak i zliczeniowy poziom ufności. W przypadku rozkładów symetrycznych i kwartyła trzeciego węższe przedziały pozwala budować zwykle estymator E1, czemu jednak towarzyszy niższy zliczeniowy poziom ufności.

Tabela 3. Porównanie estymatorów E1 i E2 zastosowanych do estymacji kwartyli, ze względu na obciążenie, wariancję, szerokość przedziałów ufności oraz zliczeniowy poziom ufności

$p = 0,25$	LogNorm (1,0.75)	Gamma (2,2)	-LogNorm (1,0.6)+5	-Gamma (1.25,2.5)+5	N(3,0.5)	N(3,2)
obciążenie	E1	E1	E2	E2	E1/E2	E1/E2
wariancja	E1	E1	E2	E2	E2	E2
szer. przedz. ufn.	E1/E2	E1/E2	E2/E1	E2/E1	E2/E1	E2/E1
zlicz. poziom ufn.	E2/E1	E2/E1	E1/E2	E1/E2	E2/E1	E2/E1

$p = 0,5$	LogNorm (1,0.75)	Gamma (2,2)	-LogNorm (1,0.6)+5	-Gamma (1.25,2.5)+5	N(3,0.5)	N(3,2)
obciążenie	E1	E1	E2	E2	E1/E2	E1/E2
wariancja	E1	E1	E2	E2	E2/E1	E2/E1
szer. przedz. ufn.	E1	E1	E2	E2	E2/E1	E2/E1
zlicz. poziom ufn.	E2/E1	E2/E1	E2/E1	E2/E1	E2/E1	E2/E1

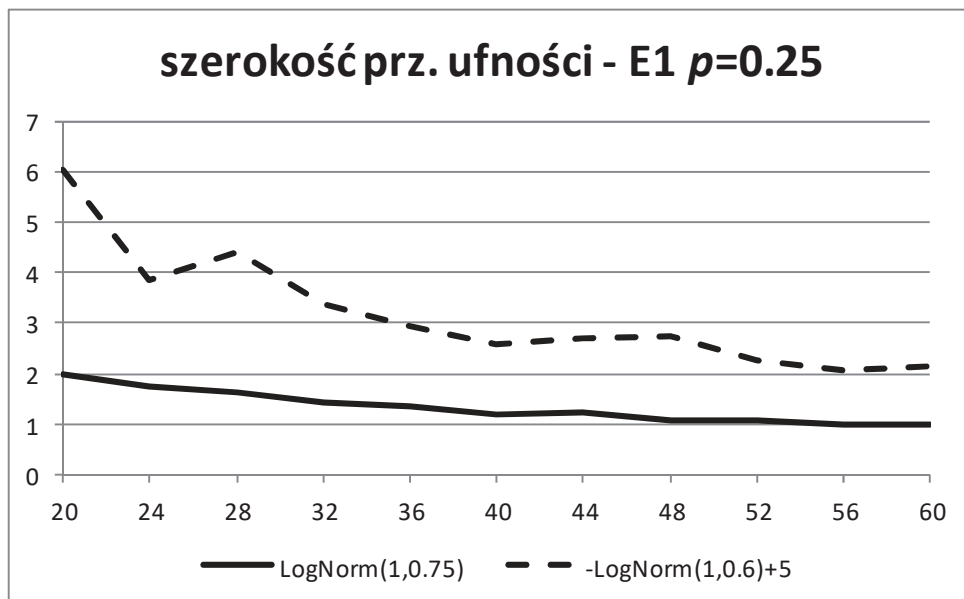
$p = 0,75$	LogNorm (1,0.75)	Gamma (2,2)	-LogNorm (1,0.6)+5	-Gamma (1.25,2.5)+5	N(3,0.5)	N(3,2)
obciążenie	E1	E1/E2	E2	E2	E2/E1	E2/E1
wariancja	E1	E1	E2	E2	E1	E1
szer. przedz. ufn.	E1/E2	E1/E2	E1/E2	E2	E1/E2	E1/E2
zlicz. poziom ufn.	E2/E1	E2/E1	E2/E1	E2/E1	E2/E1	E2/E1

Uwagi: Zapis E1 lub E2 oznacza, że miara dla danego estymatora dla wszystkich liczebności miała wartość korzystniejszą. Zapis E1/E2 oznacza, że miara ta dla większej liczby przypadków była korzystniejsza dla estymatora E1 niż E2, zapis E2/E1 odwrotnie.

Źródło: opracowanie własne

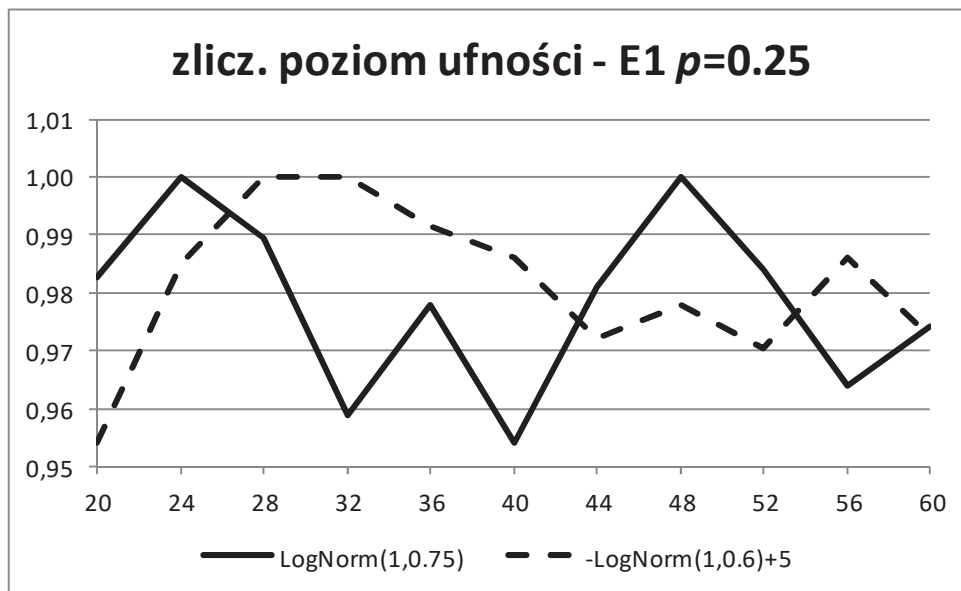
Jak wspomniano wcześniej, eksperymenty symulacyjne prowadzono dla różnych liczebności prób. Wzrostowi liczebności próby towarzyszy zwykle zmniejszanie się oszacowanych miar: obciążenia, wariancji oraz szerokości przedziałów ufności. Na rysunku 1 przedstawiono przykładowy wpływ zmian liczebności próby na szerokość 0,95 przedziałów ufności dla kwartyli pierwszego, oszacowanych za pomocą estymatora E1 dla dwóch rozkładów – jednego o asymetrii prawostronnej i drugiego o asymetrii lewostronnej. Dla pozostałych estymatorów, rozkładów i kwartyli wykresy były bardzo podobne. Podkreślić należy, że w niektórych przypadkach wzrostowi liczebności próby o 4 może towarzyszyć wzrost wykorzystanych w badaniach miar, co wynika z jakości użytego generatora liczb pseudolosowych. Jeszcze silniejszy jest wpływ jakości generatora na zliczeniowy poziom ufności. Przy zmianach liczebności prób występują bardzo silne fluktuacje tej miary, co pokazano na rysunku 2. Aby sprawdzić, czy zwiększenie liczby losowanych prób zmniejszy obserwowane fluktuacje, kilkakrotnie losowano po 4 000, 8 000 i 16 000 prób. Okazało się, że różnice w oszacowanych wartościach zliczeniowego poziomu ufności w poszczególnych eksperymentach były duże. W literaturze można znaleźć przykłady porównań różnych generatorów liczb pseudolosowych (np. [Sulewski 2019, Koziół i Zieliński]).

Rysunek 1. Wpływ zmian liczebności próby na szerokość 0,95 przedziałów ufności kwartyli pierwszego wyznaczonych za pomocą estymatora E1



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 2. Wpływ zmian liczebności próby na zliczeniowy poziom ufności 0,95 przedziałów ufności kwartyła pierwszego, wyznaczonych za pomocą estymatora E1



Źródło: opracowanie własne

## PODSUMOWANIE

Przeprowadzone badania dotyczyły estymacji trzech kwartyli metodą dokładnego bootstrapu dla przypadku, gdy iloczyn  $np$  jest całkowity. Pokazały one, że w przypadku gdy próba losowana jest z rozkładu o asymetrii prawostronnej lepsze rezultaty (ocena na podstawie obciążenia, wariancji i szerokości przedziałów ufności) uzyskuje się stosując estymator E1, czyli statystykę pozycyjną rzędu  $np$ . Jeśli próba pochodzi z rozkładu o asymetrii lewostronnej lepsze wyniki daje zastosowanie estymatora E2, czyli statystyki pozycyjnej rzędu  $np+1$ , w przypadku rozkładów symetrycznych estymatory są niemal równoważne. W literaturze przedmiotu najczęściej wykorzystywany jest estymator E1, co można tłumaczyć faktem, że częściej rozważane są rozkłady o asymetrii prawostronnej. Jednak zastosowania praktyczne mogą często dotyczyć cech o rozkładach z asymetrią lewostronną, co stanowi potwierdzenie celowości przeprowadzonych badań.

Metodę bootstrapowa stosuje się, jeśli brak jest informacji o rozkładzie, z którego wylosowano próbę. Jednak z próby można obliczyć współczynnik asymetrii, co stanowić może wskazówkę co do rodzaju asymetrii rozkładu.

W artykule pokazano, że w przypadku estymacji kwantyli zastosowanie dokładnej metody bootstrapowej oraz dokładnej metody percentyli jest znacznie prostsze, niż użycie metod tych w wersji klasycznej. Zwrócono uwagę na wpływ jakości generatorów liczb pseudolosowych na wyniki estymacji. Wpływ ten jest



szczególnie wyraźny dla zliczeniowego poziomu istotności. W przeprowadzonych eksperymentach symulacyjnych metodą Monte Carlo, nawet jeśli losowano wiele prób, zliczeniowy poziom ufności znacznie różni się dla każdego uruchomienia procedury losowania prób. Miarę to należy więc traktować jedynie orientacyjnie.

## BIBLIOGRAFIA

- Bahadur R.R. (1966) A Note on Quantiles in Large Samples. *The Annals of Mathematical Statistics*, 37(3), 577-580.
- Efron B. (1979) Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. *The Annals of Statistics*, 7(1), 1-26.
- Evans D. L., Leemis L. M., Drew J. H. (2006) The Distribution of Order Statistics for Discrete Random Variables with Applications of Bootstrapping. *Journal on Computing*, 18(1), 19-30.
- Fisher N. I., Hall P. (1991) Bootstrap Algorithms for Small Samples. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 27, 157-169.
- Hutson A. D., Ernst M. D. (2000). The Exact Bootstrap Mean and Variance of an L-estimator. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 62(1), 89-94.
- Hyndman R. J., Fan Y. (1996) Sample Quantiles in Statistical Packages. *The American Statistician*, 50(4), 361-365.
- Kisielińska J. (2014) Szacowanie mediany przy użyciu dokładnej metody bootstrapowej. *Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych*, XV(3), 232-242.
- Kisielińska J. (2016) Rozkłady wybranych bootstrapowych estymatorów mediany oraz zastosowanie dokładnej metody percentyli do jej przedziałowego szacowania. *Przegląd Statystyczny*, 63(4), 411-429.
- Koziół D., Zieliński W. A Comparison of Random Number Generators (publikacja internetowa: [wojtek.zielinski.statystyka.info](http://wojtek.zielinski.statystyka.info) [dostęp: 1.10. 2020])
- Sulewski P. (2019) Porównanie generatorów liczb pseudolosowych. *Wiadomości Statystyczne*, 64, 5-31.
- Wilcox R. R. (2001) *Fundamentals of Modern Statistical Methods*. Springer, New York.

## THE INFLUENCE OF THE ASYMMETRY OF THE DISTRIBUTION ON THE SELECTION THE BOOTSTRAP QUARTILE ESTIMATOR

**Abstract:** The research concerns the estimation of quartiles (first, second and third) in a situation where there is no information about the distribution from which the sample was drawn, and the product  $np$  is integer (where  $n$  is the sample size and  $p$  is the quantile order). If  $np$  is not an integer the order statistic of order  $[np] + 1$  is chosen as the  $p$ -quantile estimator. If  $np$  is not integer, there are many more solutions. In this paper, two exact bootstrap quartile estimators in the form of single order statistics of  $np$  i  $np + 1$  order, were compared. The estimator's bias and variance as well as the width of the confidence intervals and the coverage probability were used for the assessment. Confidence

intervals were determined with the exact percentile method. The samples were drawn from the distributions with right and left asymmetry as well as symmetrical, which made it possible to select the most appropriate estimator in a given situation.

**Keywords:** quartile estimation, bootstrap estimator, exact bootstrap method, exact percentile method

**JEL classification:** C13, C14

## WYBRANE KONCEPCJE ZARZĄDZANIA PROJEKTAMI IT OPARTE NA METODYCE PMI – STUDIUM PRZYPADKU

**Małgorzata Kowalczyk**

Wydział Zastosowań Informatyki i Matematyki  
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie  
e-mail: gs.kowalczyk@gmail.com

**Luiza Ochnio**  <https://orcid.org/0000-0001-8875-7945>

Instytut Ekonomii i Finansów  
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie  
e-mail: luiza\_ochnio@sggw.edu.pl

**Streszczenie:** Na całym świecie projekty dotyczące fuzji oraz przejęć instytucji o różnym charakterze działalności charakteryzują się dużym stopniem skomplikowania i mają swoją specyfikę zarządzania. Są to przedsięwzięcia, przy realizacji których napotyka się liczne trudności oraz ich wykonanie jest bardzo złożone, głównie ze względu na ograniczenia czasowe oraz liczbę zadań, ale także relacje pomiędzy ludźmi. W niniejszej publikacji zwrócono uwagę na różne aspekty zarządzania projektami w podmiotach sektora finansowego (banki oraz biura maklerskie) z udziałem firmy świadczącej kompleksowe usługi doradcze. Zasadniczym celem analizy było porównanie trzech projektów zarządzanych zgodnie z PMI z zakresu IT związanych z transformacją (połączeniem dwóch podmiotów) zrealizowanych różnymi technikami w ostatnich 5 latach. W badaniu źródło danych stanowiła specjalistyczna dokumentacja z poszczególnych projektów oraz materiały stosowane w jednym z największych przedsiębiorstw consultingowych, a także wiedza praktyczna i umiejętności specjalistów pracujących w tej firmie. Niezależnie od przyjętej strategii migracji realizacja projektów przebiegała bez większych zakłóceń, a zdefiniowane wcześniej cele zostały osiągnięte.

**Słowa kluczowe:** zarządzanie projektami, projekt, projekt IT, fuzja, migracja, PMI, consulting, sektor finansowy, banki, biura maklerskie

**JEL classification:** G2, G3, O22

## WSTĘP

Zmiany w systemach społecznych, a także gospodarczych towarzyszą ludziom od wieków. Heraklit opisywał zmiany stwierdzeniem „nie można wejść dwa razy do tej samej rzeki”, natomiast Marek Aureliusz w II w. n.e. twierdził, że „życie to zmiana, a świat to wyobrażenie”. W XXI wieku zmiany nabrały szaleńczego tempa, a ponadto systemy otaczające społeczeństwo stały się bardziej złożone niż dotychczas [Stawicki 2019].

Wiele przedsiębiorstw w czasach współczesnych staje przed wyzwaniem adaptacji do dynamicznie rozwijającego się otoczenia oraz jego międzynarodowego ujednoczenia ich działalności. Zważywszy na systematycznie zmieniające się i trudne do przewidzenia warunki otaczającego je świata, przedsiębiorstwa poszukują stale sposobów, by spełniać oczekiwania klientów jednocześnie dostosowując swoje oferty do ich specyficznych wymagań, a także by skutecznie i wydajnie radzić sobie z kolejnymi wyzwaniami rynkowymi [Walczak 2009].

Głównym motywem, jakim kierują się podmioty decydujące się na przeprowadzenie konsolidacji jest fakt wskazujący na wzrost wartości łączonej instytucji, czyli osiągnięcia większych korzyści poprzez rozszerzenie zakresu swojej działalności, a także uzyskanie synergii kosztowej bądź przychodowej [Wieczorek 2018]. Kluczowe znaczenie dla odniesienia sukcesu w kontekście przedsięwzięć transformacyjnych jest profesjonalne zarządzanie tym procesem na każdym etapie przeprowadzanej transakcji w zależności od wybranej metody.

W dzisiejszym świecie istnieje mnóstwo projektów, które charakteryzują się kompleksową transformacją przedsiębiorstw. Współczesne zarządzanie projektami IT, jak i tymi związanymi z zarządzaniem zmianą wymagają coraz większego wysiłku intelektualnego, są bardziej skomplikowane i niosą ze sobą wiele wyzwań [Erdmańska 2015].

Specyficznymi projektami, jakie obecnie są prowadzone na całym świecie są przejścia oraz fuzje różnych przedsiębiorstw i instytucji. Są to przedsięwzięcia, przy realizacji których napotyka się liczne trudności oraz ich wykonanie jest bardzo złożone, głównie ze względu na ograniczenia czasowe oraz liczbę zadań, które należy wykonać w jego ramach, ale także relacje pomiędzy ludźmi, biorąc też pod uwagę możliwe wystąpienie różnic kulturowych w firmie [Machciński 2017].

Skomplikowana natura przedsięwzięć, jakimi są wszelkiego rodzaju transformacje są wyzwaniem (dla każdego), na które składa się wiele różnych czynników, tj. czynnik ludzki [Erdmańska 2015], umiejętność przekazania swojej koncepcji zmiany przez kadrę zarządzającą innym pracownikom w firmie [Erdmańska 2015], czy czas trwania potrzebny na realizację danego przedsięwzięcia.

Niezaprzeczalnie, połączenie dwóch organizacji zawsze stanowi olbrzymie wyzwanie, lecz poprzez zarządzanie i planowanie zakresu projektu oraz prac zespołu projektowego, analizę interesariuszy, określenie sposobu komunikowania między wszystkimi osobami zaangażowanymi do pracy, definiowanie na bieżąco ryzyk, czy

podjęcie się procesu usprawniającego podejmowanie decyzji, problemy, z jakimi będzie zmagał się zarówno project manager, jak i pozostała część zespołu będą minimalizowane dzięki odpowiedniemu przygotowaniu do wszelkich nadzwyczajnych sytuacji [Machciński 2017]. W celu wspomnianej minimalizacji jakiegokolwiek ryzyka pojawiają się coraz nowe zagadnienia związane z zarządzaniem tego typu skomplikowanych przedsięwzięć i są one stale udoskonalane oraz dostosowywane do aktualnie panujących warunków i zmieniającego się świata.

## PODEJŚCIE DO ZARZĄDZANIA PROJEKTAMI

Projekty wybrane do analizy są przedsięwzięciami bazującymi na metodologii PMI oraz wykorzystującymi certyfikowane metody stworzone na potrzeby danego Przedsiębiorstwa. Dwa opisywane w niniejszej pracy projekty dotyczą fuzji banków, zaś Projekt3 dotyczył połączenia dwóch biur maklerskich działających na rynku polskim.

W ramach strategii migracji tych trzech projektów zbadane zostały dwa główne podejścia:

- Wdrożenie typu „Big Bang” (większe ryzyko wizerunkowe, lepsze synergie kosztowe)
  - Wdrożenie sfazowane (mniejsze ryzyko, długi okres koegzystencji systemów).
- Podejście drugie, czyli sfazowane zostało wykorzystane do realizacji Projektu3, zaś wdrożenie „Big Bang” wprowadzono do Projektu1 i Projektu2.

## CHARAKTERYSTYKA PROJEKTU1

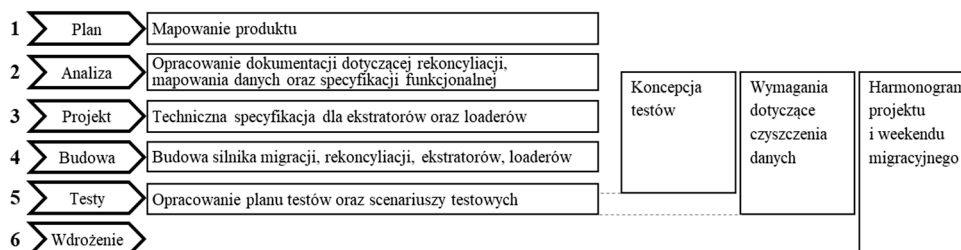
Projekt1 obejmował nabycie wydzielonej działalności Bank2 wraz z Biurem Maklerskim2 przez Bank1. W zakres przejmowanych usług wchodziły: bankowość detaliczna oraz Private Banking, bankowość biznesowa, sieć oddziałów oraz dom maklerski.

Przy realizacji Projektu1 Założono realizację prawnej (w tym rebranding), biznesowej, operacyjnej (migracja danych i reintegracja systemów) fuzji w ciągu jednego weekendu z 11-miesięcznym okresem przygotowawczym między zawarciem umowy transakcyjnej a weekendem Go-Live.

Ramy prawne, które zostały ustanowione dla tego rodzaju transakcji sprawiły, że migracja danych była procesem typu „tylko do przodu” (forward only). Zastosowany proces forward only spowodował zwiększenie idealnego przygotowania, a także wykonania procesu migracji danych z systemów Banku2 do Banku1 oraz sprawnego wdrożenia wraz z funkcjonalnym zamykaniem luk oraz wieloma wewnętrznymi projektami po stronie Banku1 dotyczącymi architektury.

W ramach Projektu1 wyróżniane było 5 głównych faz projektu migracji. Fazy wraz z ogólnym zarysem czynności wykonywanych w ich ramach zaprezentowano na Rys. 1.

Rysunek 1. Fazy Projektu1



Źródło: opracowanie własne

Zespół projektowy Przedsiębiorstwa1 działał jako jeden zespół (One-Team) wspierający oba banki w trakcie prowadzenia czynności w ramach projektu.

Po stronie Banku1 zespół projektowy był odpowiedzialny m.in. za: doradztwo strategiczne oraz ogólne zarządzanie, a także masterplanning, zaangażowanie w zarządzanie i organizowanie operacyjne w zakresie wertykalnego przenoszenia danych (produkty i usługi) oraz tzw. horizontal teams (architektura migracji, archiwizacja danych, rekonyliacja, PMO, zarządzanie dostawcami), dostarczanie funkcjonalnej analizy oraz projektowanie przepływów migracji danych, rekonyliacji, komunikacji z klientem, zarządzania kryzysem, projektowanie i wdrażanie silnika migracji, i rekonyliacji, planowanie, uruchomienie i zarządzanie próbami migracyjnymi oraz pięcioma próbami generalnymi, wsparcie po przeprowadzeniu migracji (Post Go-Live).

Po stronie Banku2 zespół projektowy wspierał następujące czynności: projektowanie oraz implementacja podziału portfela dla celów transakcji na poziomie eksportu danych, projektowanie oraz wdrażanie narzędzi do eksportu danych oraz rekonyliacji, wsparcie po przeprowadzeniu migracji (Post Go-Live).

Program migracji danych przy zaangażowaniu zespołu projektowego Przedsiębiorstwa1 został dostarczony zgodnie z założonym planem oraz w ramach określonego wcześniej budżetu w ciągu 11 miesięcy, co umożliwiło klientowi korzystanie z oszczędności pieniężnych zaplanowanych w Business Case.

Podczas migracji nie zanotowano żadnych problemów oraz nie wystąpił żaden niepożądany i negatywny wpływ na klientów.

## CHARAKTERYSTYKA PROJEKTU2

Celem Projektu2 było połączenie działalności maklerskiej prowadzonej przez spółkę zewnętrzną – Biuro Maklerskie2 z działalnością maklerską prowadzoną przez Biuro Maklerskie1 będące w strukturach Banku1. Zainicjowanie fuzji było skutkiem

konieczności utrzymywania zdublowanych struktur dla działalności maklerskiej w ramach działalności Grupy, do której przynależy Bank1.

Integracja dwóch biur maklerskich wymagała ścisłej współpracy z zewnętrznymi instytucjami regulacyjnymi. Podejście do migracji papierów wartościowych było opracowane w ścisłej współpracy z Krajowym Depozytem Papierów Wartościowych (KDPW), który był również uczestnikiem w próbach generalnych oraz podczas weekendu migracyjnego (Go-Live). Urzędowi Ochrony Konkurencji i Konsumentów (UOKiK) został przedstawiony projekt ujednoczonego Regulaminu, a także wpływ fuzji na klienta. W związku z tym, że rynek papierów wartościowych jest mocno regulowany przez Komisję Nadzoru Finansowego (KNF), Projekt2 wymagał też ścisłej współpracy z wybraną przez Bank1 kancelarią prawną.

Zespół projektowy składający się z 8-10 osób w ramach Projektu2 był odpowiedzialny m.in. za:

- Ogólne doradztwo strategiczne, zarządzanie i masterplanning
- Ścisłe zaangażowanie w zarządzanie i organizowanie operacyjne w zakresie wertykalnego przenoszenia danych (produkty i usługi) oraz PMO, zarządzanie dostawcami, architekturę migracji, archiwizację danych, rekonyliację.
- Zaprojektowanie i wdrożenie mechanizmu rekonyliacji bez użycia dedykowanego narzędzia stosowanego w projektach o szerszym zakresie. W związku z taką sytuacją opracowane zostało nowe narzędzie służące do rekonyliacji, które w przyszłości będzie można wykorzystać do małych projektów
- Dostarczanie funkcjonalnej analizy oraz projektowanie przepływów migracji danych, rekonyliacji, komunikacji z klientem, zarządzania kryzysem lub defektami, przygotowanie do obrotu instrumentami online
- Planowanie i realizacja 15 migracji próbnych oraz 3 migracji generalnych
- Wsparcie po weekendzie migracyjnym (Post Go-Live) w zakresie tworzenia kluczowych wskaźników wydajności, procesu monitorowania.

Wykreślenie spółki z KRS zakończyło niemal rok prac nad fuzją Biura Maklerskiego2 z Biurem Maklerskim1. Do dnia połączenia były to dwie odrębne instytucje, które prowadziły działalność maklerską w ramach jednej Grupy. Skonsolidowanie wszystkich usług w ramach jednego podmiotu spowodowało: utworzenie jednego centralnego podmiotu w Grupie, ujednoczenie oferty zarówno produktów, jak i usług, określenie spójnego podejścia do klientów oraz uproszczenie wszelkich procedur i procesów.

### CHARAKTERYSTYKA PROJEKTU3

W przypadku Projektu3 mającym na celu integrację po fuzji dwóch banków – Bank3 oraz Bank4, połączenie zostało podzielone na kilka etapów: Dzień 2.0, Dzień



2.5 oraz Dzień 3.0, zaś w zakres przejmowanych usług wchodziły dane klientów korporacyjnych.

Dzień 2.0 obejmował zadania związane z połączeniem prawnym obu organizacji oraz jednoczesne spełnienie wszelkich wymagań regulacyjnych. Działania zmierzające do ujednoczenia oferty produktowej oraz przygotowanie wspólnego charakteru postępowania wobec klientów tzw. „jedna twarz do klienta” miały miejsce w etapie Dzień 2.5. W stosunku do poprzednich etapów połączenia, Dzień 3.0 był programem o większym komponentie zadań IT, ponieważ zawierał w sobie migracje danych między systemami obu banków.

W procesie migracji zostało wykorzystane standardowe narzędzie ETL, jakim jest Ab Initio jako platforma technologiczna dla silnika ze względu na wykorzystanie tego narzędzia przez klienta.

Ogólnie, zespół był odpowiedzialny za gromadzenie wymagań, projektowanie oraz rozwój silnika migracji oraz rekonyliacji dla obszaru Retail oraz małych, średnich przedsiębiorstw.

Kontraktowe przypisanie odpowiedzialności w projekcie dla 15-21 osobowego zespołu Przedsiębiorstwa przedstawiało się w następujący sposób:

- definiowanie standardów zarządzania programem, zarządzanie gromadzeniem wymagań
- wdrażanie narzędzi projektowych oraz zarządzanie partnerami
- wypracowanie strategii migracji oraz przygotowanie planu migracji
- koordynacja analizy migracji i rekonyliacji, standardów profilowania i czyszczenia danych oraz opracowywania tabel mapowania danych
- wypracowanie podejścia do testów i koordynacja wypracowania planów
- wykonanie silnika migracji i rekonyliacji, opracowanie szczegółowego planu przeprowadzenia migracji.

W efekcie połączenia dwóch banków powstał trzeci co do wielkości bank w Polsce pod względem aktywów, depozytów i portfela kredytowego.

## ANALIZA PORÓWNAWCZA PROJEKTÓW

We wszystkich trzech projektach zastosowano metody dedykowane do projektu z obszaru IT dotyczącego przeprowadzenia transformacji. Projekty przeprowadzono w oparciu o klasyczne ujęcie zarządzania projektami zaprezentowane przez Project Management Institute (PMI).

Znaczącą różnicą w zarządzaniu tymi projektami było wykorzystanie odmiennych podejść do strategii migracji, określenia charakteru wdrożenia przedsięwzięcia. Do dwóch projektów wykorzystano tzw. podejście „Big Bang”, które wykorzystywane jest zwykle w przypadku, gdy migracja danych dotyczy klientów indywidualnych, których zazwyczaj jest bardzo dużo, a także są posiadaczami dużej ilości produktów, które można uznać za standardowe i niezbyt skomplikowane tudzież posiadające jednakowe cechy. Ze względu na te aspekty



możliwe jest wykorzystanie automatycznego narzędzia, dzięki któremu można „przerzucić” klientów wraz z ich produktami z jednego systemu do drugiego podczas jednego weekendu.

Przy Projekcie3 zaś skorzystano z wdrożenia pilotażowego, które polega na jednoczesnym wdrażaniu pewnych części systemu oraz koegzystencji nowego i starego systemu. W przypadku tego projektu miała miejsce migracja klientów korporacyjnych, gdzie fazowe podejście okazuje się najbardziej odpowiednie. Dzieje się tak, ponieważ klienci korporacyjni są klientami posiadającymi większą ilość produktów, np. kredytowych typu kredyt obrotowy, niż klienci indywidualni. Istotny jest także fakt, że produkty dla tych klientów są bardziej spersonalizowane, czyli zawierają dużo więcej detali i są specjalnie dopasowywane do danego klienta (innymi słowy: im większy jest klient, tym posiada bardziej sztyłą na miarę ofertę).

Przeniesienie klientów korporacyjnych zwykle odbywa się w sposób ręczny tzn. patrząc jednocześnie na jeden ekran ze starym systemem i drugi z nowym, bądź półautomatycznie, czyli na przykład przy pomocy makr w MS Excel.

Wybór między strategią migracji w podejściu „Big Bang”, a sfazowanym zależy głównie od tego, na ile skomplikowana okazuje się być struktura produktowo-uprawnieniowa (produkty, procesy, uprawnienia). Im bardziej strona produktowa jest standardowa w danej populacji klientów, tym częściej można wykorzystać narzędzia automatyczne i istnieje możliwość przeniesienia większej liczby klientów w trakcie jednego weekendu migracyjnego. Ważna kwestia to także potrzeba określenia odpowiedniego okna czasowego na wykonanie wszystkich prac związanych z danym przedsięwzięciem, ale także wskazanie ryzyk – w przypadku podejścia „wszystko w jeden weekend” jest więcej czasu na przygotowanie się poprzez wielokrotne próby i testy, podczas których można wszystko dopracować.

W analizowanych projektach mimo sukcesu, jakim było połączenie dwóch podmiotów wystąpiło kilka negatywnych zdarzeń, które w ostatecznym rozrachunku nie spowodowały zawieszenia/opóźnienia projektu z powodu stałego monitorowania sytuacji i reagowania na niepożądane sytuacje.

W ramach Projektu2 stosowane były najlepsze praktyki, które zostały wypracowane w ramach Projektu1. W niektórych obszarach spowodowało to przerost formy nad treścią.

Z początkiem Projektu2 zostały utworzone zbędne role, które przypisywano tym samym osobom. Pojawiła się także kwestia tzw. runbooka, który okazał się być zbyt skomplikowany i obszerny do małego projektu. Zamiast oczekiwanego porządku, wprowadzał niepotrzebne zamieszanie oraz niechęć ludzi do tworzenia dokumentacji. Rozbudowany schemat komunikacyjny (powielony po Projekcie1) również okazał się zbyteczny ze względu na możliwość komunikacji bezpośredniej z całym zespołem po stronie klienta. Niemniej jednak rozbudowana struktura organizacyjna, komunikacyjna, czy szablonów dokumentów pozwalają w trakcie samego projektu na wycinanie zbędnych elementów i dostosowywanie ich do skali przedsięwzięcia.

Podczas jednego z projektów zauważono brak możliwości wykonania testów walidacji biznesowej z powodu niedostępności środowisk, konieczność zorganizowania kolejnej próby dla procesu migracji w jednej z instytucji zewnętrznych, a także pojawienie się błędów w rekoncepcji wynikające z nowych przypadków w danych po odświeżeniu bazy. W związku z tymi sytuacjami zasugerowano by pomiędzy próbami generalnymi, poza testowaniem oprogramowania migracyjnego (migracje testowe), równie istotne jest wykonanie testów krytycznych procesów w obszarach IT i innych tj. rekoncepcja, zadania krytyczne należące do zespołu operacji, ładowanie ręczne danych, walidacja biznesowa, czy też zadania prowadzone z udziałem zewnętrznych instytucji. Szczególnie istotne okazuje się to w przypadku, gdy Prób Generalnych w trakcie projektu jest mniej niż cztery.

Problemem w ramach Projektu3 okazał się brak jednego oficjalnego źródła danych, na którym wszelkie dokumenty byłyby stale aktualizowane, a także dostępne dla wszystkich stron – zarówno dla Przedsiębiorstwa1, jak i klienta. Zazwyczaj takim źródłem w projektach są Teams, SharePoint oraz e-maile, co może powodować wykonywanie różnych prac na podstawie nieaktualnych danych.

W innych projektach, również dotyczących migracji również często pojawiał się temat runbooka. Jest on znaczącym dokumentem podczas weekendu migracyjnego w przypadku niepojawienia się kluczowych osób na swoich stanowiskach i konieczności zastąpienia ich kimś innym. Brak wiedzy, jak poprawnie wprowadzać zmiany, problemy z aktualizacją związane z nieaktualnymi komentarzami, listami dotyczącymi ekstraktów, czy też skomplikowana ścieżka dostępu (lokalizacja) mogą powodować komplikacje w czasie trwania każdego projektu. Ścisłe monitorowanie dokumentacji powiązanej z harmonogramem weekendu migracyjnego, przypisanie odpowiedniej ilości zasobów do wskazanych zadań może stać się rozwiązaniem problemu z runbookami. Istotną kwestią w tym temacie okazuje się także odpowiednia klasyfikacja zadań – na te, do których runbook jest niezbędny oraz te, które go nie potrzebują.

Do wymienianych w literaturze działań niepożądanych zaliczane są również: brak wsparcia sponsora, błędnie oszacowany czas trwania projektu, czyli nierealny harmonogram, problemy z technologią, zła komunikacja w zespole, źle zdefiniowane ryzyka lub brak zarządzania nimi, błędy szacowania wartości projektu, brak wiedzy o statusie projektu, niekontrolowany rozrost zakresu projektu, brak woli współpracy, długi czas podejmowania decyzji [Frączkowski 2003, Goździewska- Nowicka et al. 2018, Munns, Bjeirimi 1996].

## PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W przypadku projektów informatycznych początkowe fazy projektu są zarówno bardzo kosztowne, jak i wymagające z tego względu, że cały ciężar przebiegu projektu koncentruje się na kilku końcowych dniach, gdzie istotne jest, by wszelkie zadania wykonywane były bez większych problemów. Wynika z tego fakt,

iż należy poświęcić wiele uwagi na gruntowne określenie szczegółów dotyczących przede wszystkim harmonogramu, ale także innych wymagań dla projektu oraz na przygotowanie i przeprowadzenie wielu testów funkcjonalnych wewnątrz przedsiębiorstwa, jak i w porozumieniu z instytucjami zewnętrznymi.

Niepowodzenia projektów, czy też ich sukces zależą od wielu czynników. Uważa się, że czynniki ludzkie stanowią największy odsetek przyczyn awarii projektów [Skalik and Strzelczyk 2013]. Zarówno brak prawidłowej komunikacji między pracownikami stanowiący około 20%, niechęć do wprowadzanych zmian 15%, słaba komunikacja z kierownictwem projektu – 18%. Problemem stanowiącym niemalże 40% jest brak jasno sprecyzowanych oraz możliwych do osiągnięcia kamieni milowych [Succes Rates Rise 2017].

Niemniej jednak przedsiębiorstwa coraz częściej odnoszą sukcesy z uwagi na fakt dotrzymywania terminu realizacji przedsięwzięć zgodnie z określonym budżetem oraz spełnianiem zakresu projektu o wysokim standardzie jakości [Project Management Statistics 2019]. Dane liczbowe wskazują na kilkuprocentowe stale rosnące zaangażowanie sponsorów w realizację projektów [Succes Rates Rise 2017]. Na sukces projektów ma również znaczący wpływ rozwój kwalifikacji i umiejętności zarówno technicznych, jak i przywódczych wszystkich zaangażowanych w przedsięwzięcie.

Z analizy porównawczej wynika, że wszystkie trzy przedstawione projekty charakteryzują się tym, że ich rezultat mimo że we wszystkich przypadkach oznaczał sukces, jest unikatowy. Każdy realizowany projekt jest poniekąd inny. Składa się na to wiele czynników, m.in.: branża klienta, rodzaj projektu i jego cel, zaangażowanie zespołu oraz jego wiedza i umiejętności, wykorzystywana technologia, czy też sam przebieg projektu. Uważa się, że im bardziej cały proces zarządzania projektami jest konstruktywny, tym bardziej jego wartość jest wyższa i lepiej postrzegana przez przedsiębiorstwa z różnych branż.

Niezależnie od przyjętej strategii migracji realizacja Projektów: 1, 2 oraz 3 przebiegała bez większych zakłóceń, a zdefiniowane wcześniej cele zostały osiągnięte. Nasuwa się więc wniosek, że jeśli spełnione są warunki: dobry harmonogram, umiejętne zaangażowanie zespołu w prace projektowe przez kierownika, przeprowadzenie co najmniej kilku testów na poszczególnych etapach, to bez względu na charakter wdrożenia i obszar działań istnieje szansa, że realizacja tego konkretnego przedsięwzięcia zakończy się sukcesem.

Kompetencje członków zespołu, oraz ich fachowa wiedza, a także dobrze ułożone relacje z klientami pozwoliły na osiąganie dobrych wyników biznesowych (usług najwyższej jakości) w poszczególnych etapach realizacji projektu.

Do sukcesu wszystkich trzech przedsięwzięć przyczynili się również kierownicy projektów z ramienia banku, którzy jasno określili swoje oczekiwania i aktywnie współpracowali przy jego realizacji, dzięki czemu pracownicy mieli świadomość sensu prowadzonych działań.

Kierownicy i pracownicy zespołów na bieżąco monitorowali poziom ryzyka w zakresie: działania systemu i usług, prawa, operacji, reklamacji, migracji danych,

testów, regulatorów zewnętrznych, bezpieczeństwa, dostawców i w miarę potrzeb podejmowali działania minimalizujące wpływ ryzyka na projekt, czyli tzw. działania mitygujące.

W czasach tak szybkiego rozwoju technologii, umiejętność konsensualnej pracy w zespole staje się kluczową kwestią. Odpowiednia komunikacja oraz budowanie atmosfery swobodnej wymiany myśli wzmacnia w zespole świadomość otaczającej go przestrzeni projektowej i sprawia, że w trakcie realizacji projektu członkowie zespołu wiedzą dokładnie, jakie zadania mają do wykonania oraz mogą liczyć na pomoc innych. Na podstawie powyższych analiz można zarekomendować stosowanie zwartych metod zarządzania projektami, które mają ścisły związek z powodzeniem tego typu przedsięwzięć.

Cytując Stephena Hawkinga: „Największe osiągnięcia ludzkości tworzone są w rozmowie, a jej największe niepowodzenia są skutkiem braku rozmowy. Nie musi tak być. Nasze największe marzenia mogą stać się rzeczywistością. Z technologią, którą dysponujemy możliwości są nieograniczone. Wszystko, co musimy zrobić, to upewnić się, że wciąż rozmawiamy” można odnieść wrażenie, że sukces danego przedsięwzięcia (w tym przypadku projektów) zależy w głównej mierze od nas samych, zaś podejście zespołowe do dylematów, jakie pojawiają się podczas zarządzania projektem pozwala na wspólne wypracowanie rozwiązań i odniesienie sukcesu.

## BIBLIOGRAFIA

- Erdmańska A. (2015) Czym jest Transition Management i jakie niesie wyzwania? Z doświadczeń własnych słów kilka. *Strefa PMI*, 10, 22-23. <https://strefapmi.pl/wydania/> [dostęp: 05.03.2020].
- Frączkowski K. (2003) Zarządzanie projektem informatycznym. Projekty w środowisku wirtualnym. Czynniki sukcesu i niepowodzeń projektów. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- Goździewska-Nowicka A., Janicki T., Popławski W., Słupska U. (2018) Zarządzanie innowacyjnymi projektami w warunkach współczesnych zmian otoczenia. *Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania*, 52(2), 429-442.
- Machciński Ł. (2017) Integracja w IT poprzez tranzycję - mission impossible? *Strefa PMI*, 19, 43-45. <https://strefapmi.pl/wydania/> [dostęp: 20.03.2020].
- Munns A. K., Bjeirmi B. F. (1996) The Role of the Project Management in Achieving Project Success. *International Journal of Project Management*, 14(2), 81-87.
- Project Management Statistics (2019) <https://learn.g2.com/project-management-statistics> [dostęp: 22.06.2020].
- Skalik J., Strzelczyk A. (2013) Kluczowe czynniki sukcesu w zarządzaniu projektami informatycznymi. *Prace i Materiały Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Gdańskiego*, 1, 263-276.

- Stawicki J. (2019) Czy to już przewrót kopernikański? Zarządzanie projektami w świecie VUCA, cz. I. Strefa PMI, 26, 12-13.  
<https://strefapmi.pl/wydania/> [dostęp: 08.03.2020].
- Success Rates Rise (2017) Transforming the High Cost of Low Performance, PMI's Pulse of the Profession, <https://www.pmi.org//media/pmi/documents/public/pdf/learning/thought-leadership/pulse/pulse-of-the-profession-2017.pdf> [dostęp:21.06.2020].
- Walczak W. (2009) Orientacja na cele w zarządzaniu projektami. Master of Business Administration, (4), 46-55.
- Wieczorek A. (2018) Charakterystyka fuzji i przejęć w polskim sektorze bankowym. Bank i Kredyt, 49(2), 169-190.

#### SELECTED APPROACHES OF IT PROJECT MANAGEMENT IN BASED ON PMI METHODOLOGY – CASE STUDY

**Abstract:** All over the world, projects related to mergers and acquisitions of institutions of various types of activity are characterized by a high degree of complexity and have their own specific management. These are projects that face numerous difficulties and their execution is very complex, mainly due to time constraints and the number of tasks, but also due to relationships between people. This publication highlights various aspects of project management in financial sector entities (banks and brokerage houses) with the participation of a company providing comprehensive consulting services. The main purpose of the analysis was to describe and to compare three PMI projects related to transformation (merger of two entities) implemented in the last 5 years. The main source of data was specialized documentation from individual projects and general materials used in one of the largest consulting companies, as well as practical knowledge and skills of specialists working in this company.

**Keywords:** project management, project, IT project, merger, PMI, consulting, financial sector, banks, brokerage houses

**JEL classification:** G2, G3, O22

## MAKSYMALNA POTĘGA OGÓLNA GRUPY PAŃSTW

Zofia Zielińska-Kolasińska  <https://orcid.org/0000-0001-8845-758X>

Instytut Matematyki

Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

e-mail: zofia.zielinska-kolasinska@uph.edu.pl

**Streszczenie:** Jednym z aspektów badań politologicznych jest analiza potęgi grupy państw. Zagadnienie to należy do zakresu metod ilościowych analizy politycznej [King 1991]. W niniejszej pracy udowodniono, jak powinny rozkładać się udziały grupy państw w poszczególnych czynnikach uwzględnionych w modelu potęgi ogólnej (inaczej: gospodarczej) Sułka, aby łączna siła tej grupy była maksymalna. Wskazano także górne oszacowanie łącznej potęgi, zależne od liczebności grupy. W modelu Sułka kluczową rolę odgrywa produkt krajowy brutto, liczba ludności oraz powierzchnia państwa. Ogólna potęga grupy państw jest sumą potęg państw wchodzących w skład analizowanej grupy.

**Słowa kluczowe:** potęgomertria, potęga ogólna, potęga gospodarcza

**JEL classification:** C00, C02

### WSTĘP

W badaniu stosunków międzynarodowych dużą rolę odgrywa potęga pewnej grupy państw. Istnieje wiele modeli potęgometrycznych [Sułek 2013], które różnią się uwzględnianymi czynnikami. Wybór tych czynników zależy od rodzaju badanej potęgi np. ogólna, militarna, geopolityczna. Do najważniejszych czynników zaliczyć można następujące [Lach 2014]: ludność, kierowanie/przywództwo, zasoby naturalne, cechy narodowe, położenie geograficzne, siła militarna, wielkość terytorium państwa, nauka i technologia, typ państwa, integralność narodowa/spójność, relacje dyplomatyczne, finanse/zasoby, produkcja przemysłowa, wzrost ekonomiczny, ideologia, handel międzynarodowy, żywność/produkcja, pozycja strategiczna/partnerstwo, stabilność polityczna, granice i sąsiedztwo, ukształtowanie/topografia, klimat, wartość PKB, media, homogeniczność etniczna, transport, zdolności (możliwości) strategiczne.

W pracy rozważany jest model Sułka [Sułek 2013] (dokładna jego definicja podana została w następnym rozdziale), który dzięki swojej nieskomplikowanej formie może być z powodzeniem wykorzystywany nie tylko przez specjalistów. Czynniki

w nim uwzględnione to wartość PKB, liczba ludności oraz wielkość terytorium jednostki politycznej. Dzięki takiemu doborowi zmiennych, przy określaniu potęgi bierze się pod uwagę trzy ważne aspekty funkcjonowania państwa: ekonomiczny, demograficzny oraz przestrzenny [Kiczma, Sułek 2020].

Na uwagę zasługuje fakt, że rozpatrywana w długim horyzoncie czasowym, potęga ogólna jest najważniejszym wskaźnikiem relacji między jednostkami politycznymi, ponieważ odzwierciedlany przez nią rozkład sił formowany jest w wyniku procesów historycznych, a dzięki temu ten rodzaj potęgi jest mało podatny na decyzje polityczne (w przeciwieństwie do potęg militarnej i geopolitycznej, które mogą ulegać dynamicznym zmianom w stosunkowo krótkich okresach czasu). Ze względu na tę dużą stabilność w czasie, warto przyjrzeć się, w jaki sposób formuje się łączna potęga ogólna grupy państw i zbadać jej zależność od potęg poszczególnych jednostek. Szczególnie interesujący jest problem znalezienia takiego rozkładu sił, dla którego łączna potęga grupy jest największa. W pracy wyznaczono maksymalną łączną potęgę ogólną grupy państw oraz wskazano udziały poszczególnych państw maksymalizujące łączną potęgę ogólną.

## Model potęgi ogólnej Sułka

Sulek zaproponował następujący model ogólnej potęgi grupy  $n$  państw:

$$P_d = \sum_{i=1}^n D_i^\alpha L_i^\beta p_i^\gamma.$$

Poszczególne składniki sumy są uogólnionymi funkcjami produkcji Cobba-Douglasa.

Niech  $PKB_i$  oznacza produkt krajowy brutto  $i$ -tego państwa,  $Lud_i$  oznacza liczbę ludności  $i$ -tego państwa oraz niech  $pow_i$  oznacza powierzchnię tego państwa. W powyższym wzorze  $D_i$  oznacza udział produktu krajowego brutto  $i$ -tego państwa w ogólnym produkcie krajowym brutto badanej grupy państw:

$$D_i = \frac{PKB_i}{\sum_{i=1}^n PKB_i}.$$

Przez  $L_i$  oznaczono udział ludności  $i$ -tego państwa w ogólnej liczbie ludności badanej grupy państw:

$$L_i = \frac{Lud_i}{\sum_{i=1}^n Lud_i},$$

natomiast  $p_i$  oznacza udział powierzchni  $i$ -tego państwa w ogólnym terytorium badanej grupy państw:

$$p_i = \frac{pow_i}{\sum_{i=1}^n pow_i}.$$

Jako współczynniki  $\alpha$ ,  $\beta$  oraz  $\gamma$  zostały przyjęte wartości

$$\alpha = 0,652, \quad \beta = 0,217, \quad \gamma = 0,109.$$



Wybór takich wartości współczynników Sułek [Sułek 2020] uzasadnia tym, że potęga w największym stopniu zależy od produktu krajowego brutto, następnie od liczby ludności, a w najmniejszym stopniu od terytorium państwa, zatem  $\alpha > \beta > \gamma$ . Powołując się na prawo malejącej użyteczności krańcowej, autor modelu postuluje, że  $\alpha + \beta + \gamma < 1$ . Dalsze zależności, czyli  $\gamma = \frac{\beta}{2}$  oraz pozostawanie współczynników w proporcji  $3 : 1 : \frac{1}{2}$  są wyborem arbitralnym, przy czym Sułek powołuje się na związek z ciągiem Fibonacciego oraz złotą proporcją, dokonując ostatecznie drobnej korekty współczynników.

Ogólna potęga grupy  $n$  państw określana jest jako

$$P_d = \sum_{i=1}^n D_i^{0,652} L_i^{0,217} p_i^{0,109}.$$

Chcemy wyznaczyć maksymalną wartość potęgi  $P_d$  oraz udziały produktów krajowych brutto  $D_1, \dots, D_n$ , liczby ludności  $L_1, \dots, L_n$  oraz powierzchni  $p_1, \dots, p_n$  poszczególnych państw, dające największą potęgę grupy państw.

### Maksymalna potęga grupy państw

W dalszym ciągu rozważymy ogólniejszą postać modelu potęgometrycznego. Mianowicie

$$P_d = \sum_{i=1}^n D_i^\alpha L_i^\beta p_i^\gamma,$$

gdzie  $\alpha$ ,  $\beta$  oraz  $\gamma$  są danymi dodatnimi liczbami, takimi że  $\alpha + \beta + \gamma \leq 1$ . Znajdziemy takie udziały  $D_i$ ,  $L_i$ ,  $p_i$  dla  $i = 1, \dots, n$ , dla których powyższa funkcja osiąga maksimum, a także wyznaczmy to maksimum.

Ogólna potęga grupy  $n$  państw jest funkcją  $3n$  zmiennych. Uwzględniając warunek sumowania do jedności udziałów poszczególnych państw

$$\sum_{i=1}^n D_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n L_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

udział jednego z tych państw można zapisać za pomocą udziałów pozostałych  $n - 1$  państw (dla ustalenia uwagi wybieramy  $n$ -te państwo):

$$D_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} D_i, \quad L_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} L_i, \quad p_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i,$$

a funkcję ogólnej potęgi możemy potraktować jako funkcję  $3(n - 1)$  zmiennych.

W dalszym ciągu dokonamy drobnej zmiany oznaczeń. Niech  $f : (0, 1)^{3(n-1)} \rightarrow \mathbb{R}_+$  będzie funkcją określoną wzorem

$$f(a_1, \dots, a_{n-1}; b_1, \dots, b_{n-1}; c_1, \dots, c_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^p b_i^r c_i^s + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^p \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)^r \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_i\right)^s.$$



Jest to potęgą ogólna  $n$  analizowanych państw.

Niech  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n-1})$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{n-1})$  oraz  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{n-1})$  będą  $n-1$  wymiarowymi wektorami opisującymi udziały kolejnych państw.

W celu wyznaczenia maksimum tej funkcji wyznaczamy jej gradient. Jak łatwo sprawdzić

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = p a_i^{p-1} b_i^r c_i^s - p \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} a_j\right)^{p-1} \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_j\right)^r \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} c_j\right)^s, \text{ dla } i = 1, \dots, n-1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_i} = r a_i^p b_i^{r-1} c_i^s - r \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} a_j\right)^p \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_j\right)^{r-1} \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} c_j\right)^s, \text{ dla } i = 1, \dots, n-1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial c_i} = s a_i^p b_i^r c_i^{s-1} - s \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} a_j\right)^p \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_j\right)^r \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} c_j\right)^{s-1}, \text{ dla } i = 1, \dots, n-1,$$

A zatem gradient funkcji  $f$  w punkcie  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  wyraża się wzorem:

$$\nabla f(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{bmatrix} p a_1^{p-1} b_1^r c_1^s - p \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{p-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)^r \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_i\right)^s \\ \vdots \\ p a_{n-1}^{p-1} b_{n-1}^r c_{n-1}^s - p \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{p-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)^r \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_i\right)^s \\ r a_1^p b_1^{r-1} c_1^s - r \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^p \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)^{r-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_i\right)^s \\ \vdots \\ r a_{n-1}^p b_{n-1}^{r-1} c_{n-1}^s - r \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^p \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)^{r-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_i\right)^s \\ s a_1^p b_1^r c_1^{s-1} - s \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^p \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)^r \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_i\right)^{s-1} \\ \vdots \\ s a_{n-1}^p b_{n-1}^r c_{n-1}^{s-1} - s \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^p \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)^r \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_i\right)^{s-1} \end{bmatrix}.$$

Niech  $\mathbf{a}_* = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ ,  $\mathbf{b}_* = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$  oraz  $\mathbf{c}_* = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ . Ponieważ

$$\nabla f(\mathbf{a}_*, \mathbf{b}_*, \mathbf{c}_*) = 0,$$

więc punkt  $(\mathbf{a}_*, \mathbf{b}_*, \mathbf{c}_*)$  jest punktem stacjonarnym funkcji  $f$ .

Zbadamy jakim punktem stacjonarnym jest  $(\mathbf{a}_*, \mathbf{b}_*, \mathbf{c}_*)$ , tzn. czy w tym punkcie funkcja  $f$  osiąga maksimum, minimum czy też jest to punkt siodłowy. W tym celu zbadamy określoność hesjanu.

Mamy:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial a_i^2} &= -(1-p)p \left( a_i^{-2+p} b_i^r c_i^s + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{-2+p} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)^r \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_i\right)^s \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_j} &= -(1-p)p \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{-2+p} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)^r \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_i\right)^s, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial b_i} &= pr \left( a_i^{-1+p} b_i^{-1+r} c_i^s + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{-1+p} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)^{-1+r} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_i\right)^s \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial b_j} &= pr \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{-1+p} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right)^{-1+r} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_i\right)^s.\end{aligned}$$

Pozostałe drugie pochodne wyglądają podobnie.

Hesjan w punkcie stacjonarym  $(\mathbf{a}_*, \mathbf{b}_*, \mathbf{c}_*)$  można zapisać w postaci (po odpowiednich uproszczeniach):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -(1-p)p & pr & ps \\ pr & -(1-r)r & rs \\ ps & rs & -(1-s)s \end{bmatrix} \otimes n^{2-p-r-s} (\mathbf{I}_{n-1} + \mathbf{J}_{n-1}),$$

gdzie  $\mathbf{I}_{n-1}$  jest macierzą jednostkową stopnia  $n-1$  oraz  $\mathbf{J}_{n-1}$  jest macierzą samych jedynek stopnia  $n-1$ . Symbol  $\otimes$  oznacza iloczyn Kroneckera macierzy. Zauważmy, że  $\mathbf{J}_{n-1} = \mathbf{1}_{n-1} \mathbf{1}_{n-1}^T$ , gdzie  $\mathbf{1}_{n-1}$  jest kolumnowym wektorem samych jedynek.

Macierz  $(\mathbf{I}_{n-1} + \mathbf{J}_{n-1})$  jest dodatnio określona.

Macierz

$$- \begin{bmatrix} -(1-p)p & pr & ps \\ pr & -(1-r)r & rs \\ ps & rs & -(1-s)s \end{bmatrix}$$

również jest dodatnio określona (kolejne minory główne wynoszą odpowiednio:  $(1-p)p$ ,  $pr(1-p-r)$ ,  $prs(1-p-r-s)$ ).

Zatem hesjan w punkcie stacjonarym jest macierzą ujemnie określoną, czyli punkt  $(\mathbf{a}_*, \mathbf{b}_*, \mathbf{c}_*)$  jest punktem maksimum funkcji  $f$ .

Otrzymujemy górne oszacowanie całkowitej potęgi ogólnej  $n$  państw:

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \leq f(\mathbf{a}_*, \mathbf{b}_*, \mathbf{c}_*) = n^{1-(p+r+s)}.$$

W głównej formule potęgi ogólnej wartości wykładników ustalone są następująco:  $p = 0,652$ ,  $r = 0,217$ ,  $s = 0,109$ . A zatem górne oszacowanie ogólnej potęgi grupy  $n$  państw wynosi:

$$\sum_{i=1}^n P_d^i = \sum_{i=1}^n D_i^{0,652} L_i^{0,217} p_i^{0,109} \leq n^{0,022}.$$

Największą potęgą ogólną charakteryzuje się grupa państw o jednakowych udziałach w całkowitym PKB, całkowitej liczbie ludności oraz całkowitej powierzchni. To znaczy, że

$$D_1 = \dots = D_n = \frac{1}{n}, L_1 = \dots = L_n = \frac{1}{n}, p_1 = \dots = p_n = \frac{1}{n}.$$

Stąd wynika, że grupa  $n$  państw ma największą potęgę, gdy

$$PKB_1 = \dots = PKB_n, Lud_1 = \dots = Lud_n, pow_1 = \dots = pow_n.$$

Innymi słowami, jest to grupa państw o jednakowym PKB, jednakowej liczbie ludności oraz o jednakowej powierzchni.

## Podsumowanie

Uzyskany wynik jest ważnym rezultatem, ponieważ pokazuje, w jaki sposób powinna być rozłożona siła w grupie państw, aby ich łączna potęga była jak największa. Maksimum osiągane jest przy takim rozkładzie, w którym każda jednostka polityczna posiada równe udziały w PKB, liczbie ludności oraz terytorium. W sytuacji, gdy któreś państwo dominuje nad innymi w którymkolwiek zakresie, łączna wartość potęgi ogólnej spada, co nie jest korzystne z punktu widzenia całego układu.

Wśród wielu znanych modeli siły państw, na szczególną uwagę zasługuje model Sułka, którego prostota sprawia, że jest on doskonałym punktem wyjścia do różnego rodzaju analiz i interpretacji. Równomierny rozkład PKB, liczby ludności oraz terytorium w obrębie grupy jednostek politycznych, gwarantuje w rozpatrywanym modelu największą łączną wartość potęgi. Gdyby zmodyfikować model poprzez wprowadzenie dodatkowych czynników, ale zachować obecną strukturę modelu (czyli iloczyn pewnych udziałów w potęgach, których wykładniki są liczbami z przedziału  $[0; 1]$  o sumie mniejszej, bądź równej 1), to udowodniony wynik pozostałby bez zmian.

Zaprezentowane rozumowanie można powtórzyć dla modelu potęgi wojskowej Sułka [Kiczma, Sułek 2020].

## BIBLIOGRAFIA

- Kiczma Ł., Sułek M. (2020) National Power Rankings of Countries 2020. Oficyna Wydawnicza ASPRA-JR, Warszawa.
- King G. (1991) On Political Methodology, Political Analysis. Political Analysis, 2, 1-30.
- Lach Z. (2014) Analiza poziomu rozwoju społeczno-ekonomicznego i potęgi państw Europy Środkowo-Wschodniej. Przegląd Geopolityczny, 9, 31-52.
- Sułek M. (2013) Potęga państw. Modele i zastosowania. Rambler, Warszawa.
- Sułek M. (2020) Measurement of national power - a powermetric model. Przegląd Geopolityczny, 32, 35-57.

## The Maximum of National Power of a Group of Political Entities

**Abstract:** One of the aspects of quantitative methods in political science is the analysis of national power of a group of political entities. In Sułek's model of national power there are three factors in the main formula (Gross Domestic Product (GDP), population size and the area of territory). The aim of this paper is to find such a distribution of shares of each of the factors among the countries of a certain group, that maximises the joint national power. The upper evaluation of the joint national power, in respect to the number of countries in the group, is also given.

**Keywords:** powermetrics, national power, economic power

**JEL classification:** C00, C02