

Warsaw University of Life Sciences – SGGW
Institute of Economics and Finance
Department of Econometrics and Statistics

**QUANTITATIVE METHODS
IN ECONOMICS**

**METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH
EKONOMICZNYCH**

Volume XXII, No. 2

Warsaw 2021

EDITORIAL BOARD

Editor-in-Chief: Bolesław Borkowski

Vice-Editor-in-Chief: Hanna Dudek

Managing Editor: Grzegorz Koszela

Theme Editors:

Econometrics: Bolesław Borkowski

Multidimensional Data Analysis: Wiesław Szczesny

Mathematical Economy: Zbigniew Binderman

Analysis of Labour Market: Joanna Landmesser

Financial Engineering: Monika Krawiec

Data Science: Michał Gostkowski

Theory of Risk: Marek Andrzej Kociński

Statistical Editor: Wojciech Zieliński

Technical Editors: Jolanta Kotlarska, Elżbieta Saganowska

Language Editor: Agata Cienkusz

Native Speaker: Yochanan Shachmurove

Editorial Assistant: Luiza Ochnio

SCIENTIFIC BOARD

Adnene Ajimi (University of Sousse, Tunisia)

Heni Boubaker (University of Sousse, Tunisia)

Vasily Dikussar (Doradnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Russia)

Peter Friedrich (University of Tartu, Estonia)

Paolo Gajo (University of Florence, Italy)

Agnieszka Gehringer (University of Göttingen, Germany)

Anna Maria Gil-Lafuente (University of Barcelona, Spain)

Jaime Gil-Lafuente (University of Barcelona, Spain)

Vasile Glavan (Moldova State University, Moldova)

Francesca Greselin (The University of Milano-Bicocca, Italy)

Ana Kapaj (Agriculture University of Tirana, Albania)

Jirawan Kitchaicharoen (Chiang Mai University, Thailand)

Yuriy Kondratenko (Black Sea State University, Ukraine)

Vassilis Kostoglou (Alexander Technological Educational Institute of Thessaloniki, Greece)

Karol Kukula (University of Agriculture in Krakow, Poland)

Kesra Nermend (University of Szczecin, Poland)

Nikolas N. Olenev (Doradnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Russia)

Alexander N. Prokopenya (Brest State Technical University, Belarus)

Yochanan Shachmurove (The City College of The City University of New York, USA)

Mirbulat B. Sikhov (al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan)

Marina Z. Solesvik (Nord University, Norway)

Ewa Syczewska (Warsaw School of Economics, Poland)

Achille Vernizzi (University of Milan, Italy)

Andrzej Wiatrak (University of Warsaw, Poland)

Dorota Witkowska (University of Lodz, Poland)

ISSN 2082-792X

e-ISSN 2543-8565

© Copyright by Department of Econometrics and Statistics WULS – SGGW
(Katedra Ekonometrii i Statystyki SGGW)

Warsaw 2021, Volume XXII, No. 2

The original version is the paper version


Journal homepage: qme.sggw.pl

Published by Warsaw University of Life Sciences Press

CONTENTS

Zieliński Wojciech – Przedział ufności dla odsetka pytań drażliwych	51
Gostkowski Michał, Porowska Ewelina, Halicki Marcin – Prognozowanie liczby pasażerów transportu lotniczego w Polsce	61
Janowicz Maciej, Zembruski Andrzej – Symmetry Properties of Modified Black- Scholes Equation.....	77

PRZEDZIAŁ UFNOŚCI DLA ODSETKA PYTAŃ DRAŻLIWYCH

Wojciech Zieliński  <https://orcid.org/0000-0003-0749-8764>
Instytut Ekonomii i Finansów
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
e-mail: wojciech_zielinski@sggw.edu.pl

Streszczenie: Jednym z problemów w badaniach ekonomiczno-społecznych jest oszacowanie odsetka odpowiedzi na pytania drażliwe. Pytania drażliwe są takimi pytaniami odpowiedzi na które respondent może nie udzielić rzetelnej odpowiedzi. W pracy podano konstrukcję dokładnego przedziału ufności dla tego odsetka i porównano zaproponowany przedział z przedziałami asymptotycznymi.

Słowa kluczowe: pytania drażliwe, model nierandomizowanych odpowiedzi, dokładny przedział ufności

JEL classification: C83, C99

WSTĘP

W badaniach ekonomiczno-społecznych zainteresowani jesteście określeniem skali zjawisk, które nie muszą być zgodne z prawem, być wstydlivymi czy też społecznie nieakceptowalnymi. Na przykład takim pytaniem może być pytanie o dawanie łapówek, o oszustwo podatkowe, o nie heteronormatywność czy też o stosowanie przemocy wobec dzieci.

Formalnie, niech Y będzie zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym:

$$P\{Y = 1\} = \pi = 1 - P\{Y = 0\}.$$

Liczba $\pi \in (0, 1)$ jest prawdopodobieństwem odpowiedzi *TAK* na pytanie drażliwe. Estymujemy prawdopodobieństwo π .

Niestety, zmienne losowe Y_1, \dots, Y_n z wiadomych powodów nie są obserwowalne. Dlatego też odpowiedź na pytanie drażliwe jest „ukrywana”. Odpowiedzi na pytanie drażliwe są „ukrywane” przez zadawanie pytania „neutralnego”, czyli takiego pytania, na które respondent zawsze odpowie zgodnie

z prawdą. Pytanie neutralne ma dwie odpowiedzi *TAK* lub *NIE*. W ankiecie stawiane są jednocześnie dwa pytania: drażliwe i neutralne, ale ankietowany odpowiada tylko na jedno z nich. Wynikiem tak skonstruowanej ankiety jest jedna odpowiedź *TAK* lub *NIE*, przy czym ankietę ma nie wiedzieć na które pytanie odpowiada ankietowany. Odpowiedź Z na ankietę jest zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym

$$P\{Z = 1\} = \rho = 1 - P\{Z = 0\}.$$

Prawdopodobieństwo ρ jest uzależnione od π oraz **znanego** q , gdzie q jest prawdopodobieństwem odpowiedzi *TAK* na pytanie neutralne. Forma tej zależności jest uzależniona od sposobu „ukrywania” pytania drażliwego.

Jednym z pierwszych mechanizmów ukrywania jest model randomizowanych odpowiedzi (Warner 1965, Greenberg et.al. 1969, Boruch 1971, Fox & Tracy 1986). W zależności od pewnego mechanizmu losowego (rzut kostką, losowanie kart) ankietowany odpowiada bądź na pytanie drażliwe bądź pytanie neutralne. Prawdopodobieństwo r wyboru pytania jest znane. Wynik losowania pytania nie jest znany ankietowemu.

Innym modelem jest model nierandomizowanych odpowiedzi (Yu et.al. 2008, Tian 2014, Groenitz 2014). Ankietowany odpowiada na pytanie drażliwe oraz pytanie neutralne. Odpowiedzią na całą ankietę jest *TAK* gdy odpowiedzi na oba pytania są jednakowe.

PRZEDZIAŁ UFNOŚCI

W modelu nierandomizowanych odpowiedzi zadawane są dwa pytania: drażliwe i neutralne. Na każde z tych pytań można odpowiedzieć *TAK* lub *NIE*. Odpowiedź na całą ankietę jest *TAK*, jeżeli na oba zadane pytania jest taka sama odpowiedź. To znaczy, jeżeli przez Z oznaczymy zmienną losową będącą wynikiem ankiety, to

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } \{Y = 1 \& Q = 1\} \text{ lub } \{Y = 0 \& Q = 0\} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Tutaj Y oznacza odpowiedź na pytanie drażliwe, zaś Q na pytanie neutralne. Zmienna losowa Y jest zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym

$$P\{Y = 1\} = \pi = 1 - P\{Y = 0\}.$$

Prawdopodobieństwo π jest nieznanym prawdopodobieństwem uzyskania pozytywnej odpowiedzi na pytanie drażliwe. Zadanie polega na estymacji tego

prawdopodobieństwa. A dokładniej, chcemy zbudować przedział ufności dla tego prawdopodobieństwa.

O zmiennej losowej Q zakładamy, że ma rozkład dwupunktowy

$$P\{Q = 1\} = q = 1 - P\{Q = 0\}.$$

Ponadto zakładamy, że prawdopodobieństwo q jest znane oraz, że zmienne losowe Y oraz Q są niezależne.

Z konstrukcji ankiety wynika, że zmienna losowa Z (odpowiedź na ankiecie) również jest zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym

$$P\{Z = 1\} = \varrho = 1 - P\{Z = 0\},$$

gdzie $\varrho = q\pi + (1 - q)(1 - \pi) = \pi(2q - 1) + (1 - q)$.

Niech Z_1, \dots, Z_n będą wynikami n ankiet oraz niech $Z = \sum_{i=1}^n Z_i$. Zmienna losowa ma rozkład dwumianowy z parametrami n oraz ϱ . Estymatorem Największej Wiarogodności (*ENW*) prawdopodobieństwa sukcesu ϱ jest $\bar{Z} = \frac{1}{n}Z$. Łatwo zauważyć, że *ENW* interesującego nas prawdopodobieństwa π jest

$$\hat{\pi} = \frac{\bar{Z} - 1 + q}{2q - 1}.$$

Estymator $\hat{\pi}$ jest nieobciążonym estymatorem prawdopodobieństwa π o wariancji

$$Var\hat{\pi} = \frac{\pi(1 - \pi)}{n} + \frac{q(1 - q)}{n(2q - 1)^2}.$$

Nieobciążonym estymatorem wariancji estymatora $\hat{\pi}$ jest

$$\widehat{Var}\hat{\pi} = \frac{1}{(1 - 2q)^2} \frac{\bar{Z}(1 - \bar{Z})}{n - 1}$$

Tian (2014) zaproponował asymptotyczne przedziały ufności dla prawdopodobieństwa π . Ich konstrukcja oparta jest na znanym twierdzeniu de Moivre-Laplace'a. Zgodnie z tym twierdzeniem

$$\hat{\varrho} \sim AN\left(\varrho, \frac{\varrho(1 - \varrho)}{n}\right).$$

Zastosowanie tego twierdzenia do estymatora $\hat{\pi}$ daje

$$\hat{\pi} \sim AN\left(\pi, \frac{\pi(1 - \pi)}{n} + \frac{(1 - q)q}{n(2q - 1)^2}\right).$$

Na podstawie tego asymptotycznego przybliżenia budowany jest przedział ufności dla π , przy czym robione jest to na dwa sposoby.

W pierwszym sposobie zakłada się, że

$$\frac{\hat{\pi} - \pi}{\sqrt{\widehat{Var\hat{\pi}}}} \sim N(0, 1).$$

A zatem (przyjmujemy poziom ufności δ), przedział #1 uzyskujemy jako rozwiązanie względem π nierówności

$$\left| \frac{\hat{\pi} - \pi}{\sqrt{\widehat{Var\hat{\pi}}}} \right| \leq u_{\frac{1+\delta}{2}},$$

gdzie u_q oznacza kwantyl rzędu q standardowego rozkładu normalnego $N(0, 1)$. Przedział ma postać

$$\left(\hat{\pi} - u_{\frac{1+\delta}{2}} \sqrt{\widehat{Var\hat{\pi}}}; \hat{\pi} + u_{\frac{1+\delta}{2}} \sqrt{\widehat{Var\hat{\pi}}} \right)$$

Drugi sposób polega na tym by w powyższym przybliżeniu nie stosować estymatora wariancji estymatora $\hat{\pi}$, tylko po prostu jego wariancję

$$\frac{\hat{\pi} - \pi}{\sqrt{Var\hat{\pi}}} \sim N(0, 1)$$

A zatem (przyjmujemy poziom ufności δ), przedział #2 uzyskujemy jako rozwiązanie względem π nierówności

$$\left| \frac{\hat{\pi} - \pi}{\sqrt{Var\hat{\pi}}} \right| \leq u_{\frac{1+\delta}{2}},$$

a dokładniej z nierówności

$$\left(\frac{\hat{\pi} - \pi}{\sqrt{Var\hat{\pi}}} \right)^2 \leq u_{\frac{1+\delta}{2}}^2,$$

Rozwiązując powyższą nierówność względem π otrzymujemy przedział #2

$$\frac{2n\hat{\pi} + u_{\frac{1+\delta}{2}}^2 \pm u_{\frac{1+\delta}{2}} \sqrt{4n\hat{\pi}(1-\hat{\pi}) + \frac{4n(1-q)q + u_{\frac{1+\delta}{2}}^2}{(1-2q)^2}}}{2 \left(n + u_{\frac{1+\delta}{2}}^2 \right)}$$

Powyższe przedziały są budowane dla „dużych” prób. Z tego powodu przedziały te są przybliżone. Ich zalety i wady (w ogólnym ujęciu) są szczegółowo omówione w monografii Zielińskiego (2010).

Clopper i Pearson (1934) podali konstrukcję dokładnego przedziału ufności dla prawdopodobieństwa sukcesu

$$\varrho \in (\varrho_L(Z), \varrho_U(Z)),$$

gdzie

$$\varrho_L(Z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } Z = 0, \\ B^{-1}\left(n - Z + 1, Z; \frac{1+\delta}{2}\right) & \text{dla } Z > 0, \end{cases}$$

$$\varrho_U(Z) = \begin{cases} 1 & \text{dla } Z = n, \\ B^{-1}\left(n - Z, Z + 1; \frac{1-\delta}{2}\right) & \text{dla } Z < n. \end{cases}$$

oraz $B^{-1}(\cdot, \cdot; \cdot)$ jest kwantylem rozkładu Beta. Ponieważ $\varrho = q\pi + (1-q)(1-\pi)$, więc łatwo uzyskujemy przedział ufności #3 dla prawdopodobieństwa π :

$$\begin{cases} \frac{1}{2q-1} ((\varrho_L(Z), \varrho_U(Z)) - (1-q)), & \text{gdy } q > 0.5, \\ \frac{1}{2q-1} ((\varrho_U(Z), \varrho_L(Z)) - (1-q)), & \text{gdy } q < 0.5. \end{cases}$$

Należy zauważyć, że przedział ten nie jest asymptotyczny.

Ze względu na swoją konstrukcję wszystkie powyższe przedziały mogą „wykraczać” poza naturalny dla prawdopodobieństwa przedział $(0, 1)$. W związku z tym uzyskany przedział ufności jest obcinany w zerze lub w jedynce.

PORÓWNANIE PRZEDZIAŁÓW UFNOŚCI

Przedział ufności powinien ze z góry zadany prawdopodobieństwem pokrywać szacowany parametr. Dlatego też zbadamy jakie jest prawdopodobieństwo pokrycia odsetka pytań drażliwych przez przedziały ufności zaprezentowane w poprzednim rozdziale. Te prawdopodobieństwa oszacowane będą na podstawie badań symulacyjnych.

W symulacjach zastosowano próbę licznosci $n = 1000$. Generowano dwie zmienne losowo o rozkładach dwupunktowych z prawdopodobieństwami odpowiednio π (jako odpowiedź Y na pytanie drażliwe) oraz q (jako odpowiedź Q na pytanie neutralne). Wynikiem Z ankiety jest

$$Z = Y \cdot Q + (1 - Y) \cdot (1 - Q).$$

Otrzymano w ten sposób odpowiedzi na całą ankietę Z_1, \dots, Z_n . Na podstawie takiej próby budowano przedziały ufności #1, #2 oraz #3 według podanych wyżej wzorów. Procedurę symulacyjną powtórzono 10000 razy. Na poniższych wykresach przedziały te oznaczone są odpowiednio AP , WP , CP . Przyjęto poziom ufności 0.95.

Na rysunku 1. pokazane jest prawdopodobieństwo pokrycia nieznanego prawdopodobieństwa π uzyskania pozytywnej odpowiedzi na pytanie drażliwe (na osi poziomej podane jest prawdopodobieństwo π). Na wykresie (a) podane jest przeciętne ze względu na prawdopodobieństwo q pozytywnej odpowiedzi na pytanie neutralne, natomiast na wykresach (b) i (c) dla $q = 0.1$ oraz $q = 0.2$, odpowiednio. Jak widać, prawdopodobieństwa pokrycia przez przedziały AP oraz WP są mniejsze od przyjętego poziomu ufności. Zatem przedziały te nie są przedziałami ufności w myśl definicji Neymana (1934). Zastosowanie tych przedziałów do wnioskowania o prawdopodobieństwie π obarczone jest większym ryzykiem błędnego wnioskowania niż zakładane pięcioprocentowe ryzyko. Co więcej to ryzyko jest nieznanne. Tej wady nie ma przedział CP .

Na rysunku 2. porównana jest długość przedziałów ufności. Na rysunku (a) podana jest długość przedziałów przeciętnie ze względu na prawdopodobieństwo q pozytywnej odpowiedzi na pytanie neutralne, natomiast na rysunkach (b) i (c) dla $q = 0.1$ oraz $q = 0.2$, odpowiednio. Przedziały AP oraz WP mają podobną długość, natomiast przedział CP jest dłuższy niż dwa pozostałe. To oczywiście jest konsekwencją tego, że prawdopodobieństwa pokrycia przez przedziały AP i WP są mniejsze niż nominalne (Rys. 1). Możemy wyprowadzić wniosek, iż te dwa przedziały nieprawidłowo szacują prawdopodobieństwo π odpowiedzi na pytanie drażliwe.

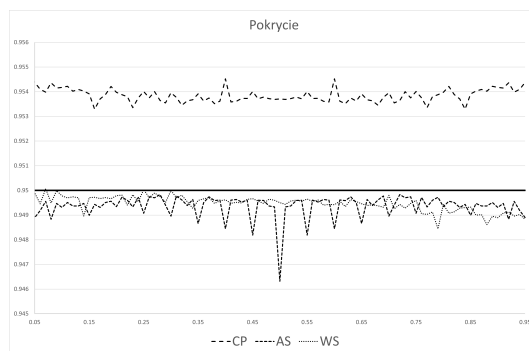
UWAGI KOŃCOWE

W pracy podjęto problem przedziałowej estymacji odsetka pozytywnych odpowiedzi na pytanie drażliwe. Ze względu na to, że jest wiele różnych modeli stosowanych do punktowego oszacowania tego odsetka w pracy zajęto się tylko jednym z nich, a mianowicie modelem nierandomizowanych odpowiedzi zaproponowanym przez Yu i in. (2014).

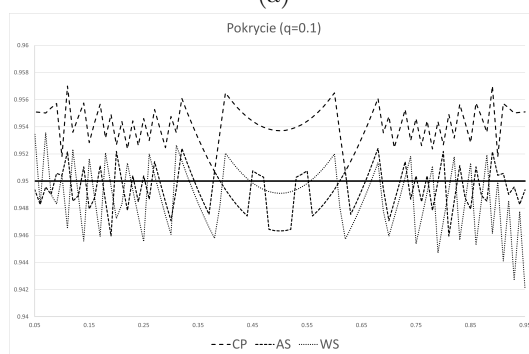
Porównane zostały trzy metody konstrukcji przedziału ufności. Dwie z nich oparte są na asymptotycznym twierdzeniu de Moivre-Laplace'a. Trzecia metoda bazuje na dokładanym przedziale ufności opartym na pomysłe Cloppera i Pearsona. Okazuje się, że pierwsze dwie metody dają przedziały nie realizujące postulatu zachowania zadanego poziomu ufności, natomiast trzecia z nich zapewnia spełnianie tego warunek. Otrzymane przedziały są co prawda szersze od asymptotycznych, ale te ostatnie mają zbyt duże (i nieznanne) ryzyko błędnego wnioskowania.

Można oczekiwać, że w innych modelach stosowanych w praktyce uzyskiwania odpowiedzi na pytania drażliwe sytuacja będzie podobna. Badania nad konstrukcją przedziałów ufności dla odsetka pozytywnych odpowiedzi na pytanie drażliwe w różnych modelach są kontynuowane i będą opublikowane oddzielnie.

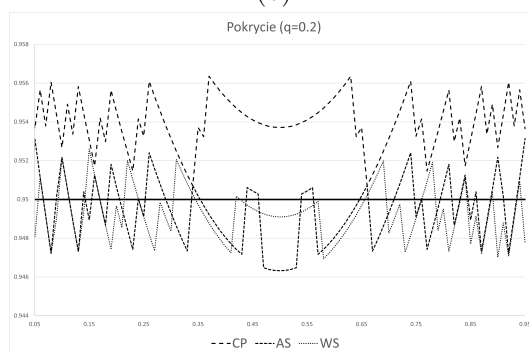
Rysunek 1. Prawdopodobieństwo pokrycia



(a)



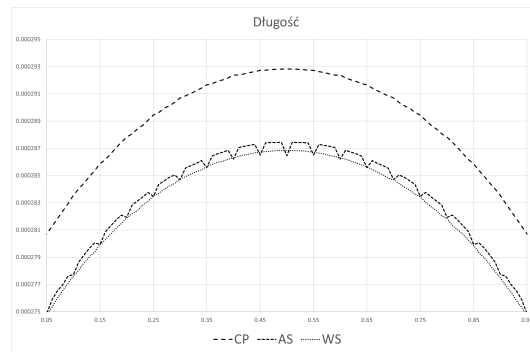
(b)



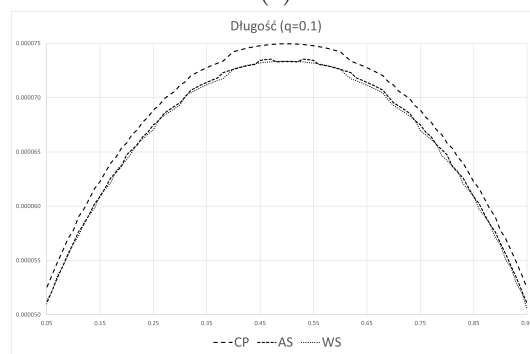
(c)

Źródło: obliczenia własne

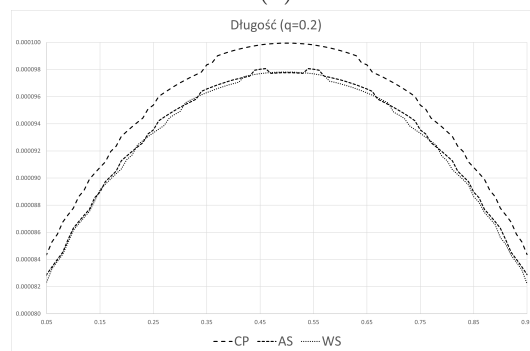
Rysunek 2. Długość przedziału ufności



(a)



(b)



(c)

Źródło: obliczenia własne

BIBLIOGRAFIA

- Arnab R., Shangodoyin D. K., Arcos A. (2019) Nonrandomized Response Model for Complex Survey Designs. *Statistics in Transition New Series*, 20, 67-86.
- Boruch R. F. (1971) Assuring Confidentiality of Responses in Social Research: A Note on Strategies. *American Sociologist*, 6, 308-311.
- Clopper C. J., Pearson E. S. (1934) The Use of Confidence or Fiducial Limits Illustrated in the Case of the Binomial. *Biometrika*, 26, 404-413.
- Fox J. A., Tracy P. E. (1986) *Randomised Response: A Method for Sensitive Surveys*. Beverly Hills: Sage Publications.
- Greenberg B. G., Abul-Ela A.-L. A., Horvitz D. G. (1969) The Unrelated Question Randomized Response Model: Theoretical Framework. *Journal of the American Statistical Association*, 64, 520-539.
- Groenitz H. (2014) A New Privacy-protecting Survey Design for Multichotomous Sensitive Variables. *Metrika*, 77, 211-224.
- Neyman J. (1934) On the Two Different Aspects of the Representative Method: The Method of Stratified Sampling and the Method of Purposive Selection. *Journal of the Royal Statistical Society*, 97, 558-625.
- Tian G.-L. (2014) A New Non-randomized Response Model: The Parallel Model. *Statistica Neerlandica*, 68, 293-323.
- Warner S. L. (1965) Randomized Response: A Survey Technique for Eliminating Evasive Answer Bias. *Journal of the American Statistical Association*, 60, 63-69.
- Yu J.-W., Tian, G.-L., Tang M.-L. (2008) Two New Models for Survey Sampling with Sensitive Characteristic: Design and Analysis. *Metrika*, 67, 251-263.
- Zieliński W. (2010) *Estymacja wskaźnika struktury*. Wydawnictwo SGGW.

**CONFIDENCE INTERVAL FOR THE FRACTION
OF SENSITIVE QUESTIONS**

Abstract: In sociological research it is important to estimate a fraction of responses to sensitive questions. Sensitive questions are such that the respondent may not give a true answer. In the paper a confidence interval for a proportion of positive answers to a sensitive question is constructed.

Keywords: sensitive questions, nonrandomized response model, exact confidence interval

JEL classification: C83, C99

PROGNOZOWANIE LICZBY PASAŻERÓW TRANSPORTU LOTNICZEGO W POLSCE

Michał Gostkowski  <https://orcid.org/0000-0003-3606-1182>

Instytut Ekonomii i Finansów
Szkola Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
e-mail: michal_gostkowski@sggw.edu.pl

Ewelina Porowska

Szkola Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
e-mail: ewelina-porowska@wp.pl

Marcin Halicki  <https://orcid.org/0000-0002-5343-0093>

Kolegium Nauk Przyrodniczych
Uniwersytet Rzeszowski
e-mail: mhalicki@ur.edu.pl

Streszczenie: Polski rynek transportu lotniczego stanowi istotną część europejskiego i światowego rynku usług transportowych. Na przestrzeni lat odnotowano dużą dynamikę wzrostu liczby pasażerów transportu lotniczego. W związku z dynamizmem zachodzących zmian pojawiła się potrzeba prognozowania tego zjawiska. W pracy przedstawiono prognozy liczby pasażerów transportu lotniczego w Polsce z zastosowaniem metod wygładzania wykładniczego: Browna, Holta oraz Wintersa w wersji addytywnej i multiplikatywnej. Dokonano również porównania jakości otrzymanych prognoz w oparciu o policzone błędy ex post.

Słowa kluczowe: szereg czasowy, prognozowanie, modele wygładzania wykładniczego

JEL classification: C22, C32

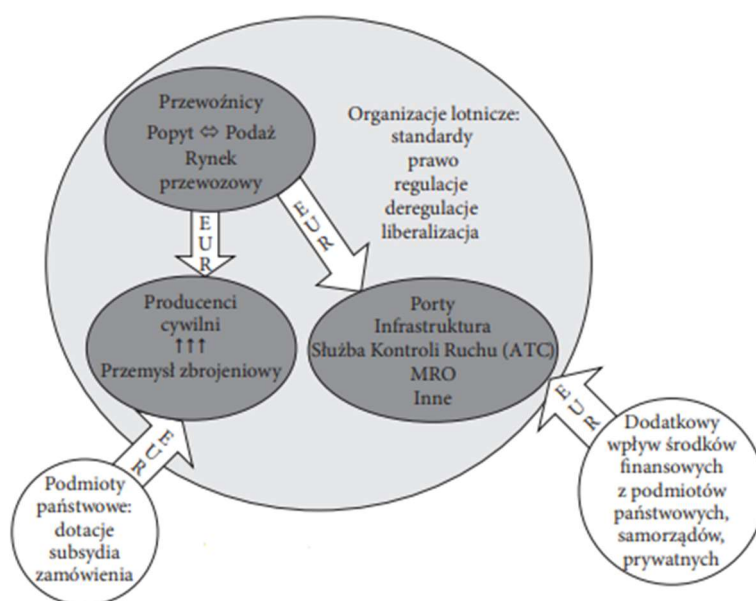
WSTĘP

W ciągu ostatnich kilku lat transport lotniczy zyskał miano najprężniej rozwijającej się gałęzi transportu w Polsce. W dużej mierze wynika to z faktu ciągłego wzrostu procesu globalizacji gospodarek światowych. Dynamiczny rozwój liczby międzynarodowych podmiotów gospodarczych oraz eskalacja swobody

<https://doi.org/10.22630/MIBE.2021.22.2.6>

przepływów ludzi i towarów uczyniły transport głównym filarem gospodarki. Wydarzeniem, które wywarło duży wpływ na sytuację transportu lotniczego w kraju było przystąpienie Polski do Unii Europejskiej. W jego następstwie wprowadzono unijne regulacje prawne, które z kolei spowodowały napływ konkurencji. Postępująca dynamika zapotrzebowania na przewozy lotnicze, a także pojawienie się możliwości pozyskania dofinansowania z funduszy europejskich pociągnęły za sobą dalszy rozwój tej dziedziny transportu.

Rysunek 1. Środowisko rynku transportu lotniczego i jego główne elementy.



Źródło: Ruciński A. (2016) Polski rynek transportu lotniczego w perspektywie 2030 roku. *Studia Oeconomica Posnaniensia*, 4(7), 7-38.

Rynek transportu lotniczego zalicza się do kategorii ekonomicznych. Jego definicja obejmuje obszary, procesy, zależności i uwarunkowania, w których działają przedsiębiorstwa świadczące wyznaczone usługi po stronie podaży oraz odbiorców wyrażających potrzeby względem podmiotów po stronie popytu. Określa się go także mianem struktury spójnej pod względem ekonomicznym i organizacyjnym, zarządzanej oraz regulowanej według wyznaczonych norm, zasad i przepisów. Na rynku dochodzi do wymiany wartości usług i wiadomości, przebiegają procesy konkurencyjne w gałęziowej i międzygałęziowej skali. Podmioty działające w obrębie rynku transportu lotniczego cechują się następującymi właściwościami: (1) dysponują zbliżonymi kwalifikacjami i uprawnieniami, (2) charakteryzują się podobną technologią, (3) stosują podobne materiały, (4) funkcjonują poprzez analogiczne procesy według wspólnych

przepisów prawnych, (5) wykonują działalność używając tych samych (lub analogicznych) kanałów dostawców i dystrybucji.

Specyficzny portret transportu lotniczego w Polsce wpływa na jego znaczne możliwości rozwojowe. Polityka centralnego planowania prowadzona do 1989r. ograniczała działalność podmiotów prywatnych. Dopiero po transformacji ustrojowej pojawiła się przestrzeń dla większego kręgu operatorów lotniczych. Kluczowym momentem w rozwoju tej gałęzi transportu okazało się przystąpienie do Unii Europejskiej, które umożliwiło przystosowanie obowiązujących przepisów i norm do rynkowych wzorców.

Zainicjowano wprowadzanie działań liberalizacyjnych i prywatyzacyjnych zgodnych z regulacjami Unii Europejskiej. Za jedną z najbardziej znaczących kwestii uznano złagodzenie przepisów o wejściu obcych przewoźników na polski rynek. W Unii Europejskiej opierało się to na wdrożeniu trzech pakietów liberalizacyjnych w latach 1987-1992. W ramach przystosowania rynku do warunków europejskich Polska wdrożyła wszystkie trzy pakiety niespełna równocześnie [Rucińska 2012].

Obecnie charakterystycznym wyróżnikiem polskiego rynku transportu lotniczego jest jego wielopodmiotowość. Panująca pod koniec poprzedniego stulecia przewaga tradycyjnych przewoźników, która była następstwem historycznych i naturalnych uwarunkowań, zaczęła się przekształcać w pierwszej dekadzie XXI wieku. Jeszcze w 2002 roku tradycyjni przewoźnicy stanowili prawie 100% udziałów w rynku, ale wstąpienie Polski do Unii Europejskiej okazało się punktem zwrotnym i bardzo szybko wpłynęło na przekształcenia całej struktury. Na przestrzeni lat 2004-2010 udział przewoźników niskokosztowych osiągnął poziom 51,62% degradując przy tym przewoźników tradycyjnych do mniejszości w udziałach rynku [Hoszman 2012]. Zjawisko zdobycia większej części rynku przez przewoźników tanich linii lotniczych w tak krótkim czasie było ewenementem na skalę europejską. Według norm i zasad Unii Europejskiej dokonano podziału polskich lotnisk na porty centralne, regionalne i lokalne [Rucińska i in. 2012; Ruciński 2006; Ruciński 2016].

Tabela 1. Podział portów lotniczych w Polsce

port centralny	porty regionalne	porty lokalne
Lotnisko Chopina w Warszawie	Kraków-Balice Gdańsk im. Lecha Wałęsy Katowice-Pyrzowice Wrocław-Starachowice Poznań-Ławica	Warszawa Modlin Rzeszów-Jasionka Łódź-Lublinek Szczecin-Goleniów Bydgoszcz-Szwederowo Zielona Góra-Babimost Lublin Olsztyn-Mazury

Źródło: opracowanie własne

Przez długi czas infrastruktura transportu lotniczego w Polsce była uzależniona od państwa. Transformacje liberalizacyjne przyczyniły się do modernizacji własnościowego portfela portów. W wyniku przeprowadzonej prywatyzacji partycypantami portów lotniczych w Polsce stały się samorzady, miasta, urzędy wojewódzkie itp. Z uzasadnionych powodów państwo pozostawiło sobie część udziałów [Rucińska 2006; Schoemaker 2004].

Należy zaznaczyć, że rozwój transportu lotniczego jest procesem wielowymiarowym i ewolucyjnym. Oddziaływanie mikro- i makroekonomicznych elementów środowiska rynkowego oraz endo- i egzogenicznych zmiennych z urozmaiconych obszarów działalności człowieka rzutuje na stopień nieprzewidywalności w prognozowaniu przypuszczalnego przebiegu jego rozwoju.

MATERIAŁY I METODY

Do przeprowadzenia badań wykorzystano szereg czasowy zaprezentowany w tabeli 2. Zawiera on dane kwartalne dotyczące liczby obsłużonych pasażerów transportu lotniczego w ruchu krajowym i międzynarodowym – regularnym i czarterowym w Polsce w latach 2008-2018.

Tabela 2. Liczba obsłużonych pasażerów transportu lotniczego w ruchu krajowym i międzynarodowym - regularnym i czarterowym w Polsce w latach 2008-2018 (kwartalnie)

rok/kwartał	liczba pasażerów	rok/kwartał	liczba pasażerów
2008Q1	4 275 010	2013Q3	8 091 353
2008Q2	5 538 226	2013Q4	5 566 924
2008Q3	6 570 120	2014Q1	4 925 451
2008Q4	4 245 495	2014Q2	7 165 732
2009Q1	3 708 974	2014Q3	8 870 441
2009Q2	4 924 133	2014Q4	6 116 346
2009Q3	6 121 487	2015Q1	5 696 952

rok/kwartał	liczba pasażerów	rok/kwartał	liczba pasażerów
2009Q4	4 171 665	2015Q2	8 147 624
2010Q1	3 887 559	2015Q3	9 818 458
2010Q2	5 170 802	2015Q4	6 740 072
2010Q3	6 868 761	2016Q1	6 447 313
2010Q4	4 539 754	2016Q2	8 829 365
2011Q1	3 994 127	2016Q3	10 764 273
2011Q2	5 725 109	2016Q4	7 965 764
2011Q3	7 154 537	2017Q1	7 564 618
2011Q4	4 837 362	2017Q2	10 330 369
2012Q1	4 385 429	2017Q3	12 757 611
2012Q2	6 938 596	2017Q4	9 319 696
2012Q3	7 948 980	2018Q1	8 724 996
2012Q4	5 162 552	2018Q2	12 021 611
2013Q1	4 627 938	2018Q3	14 711 318
2013Q2	6 696 408	2018Q4	10 248 962

Źródło: Urząd Lotnictwa Cywilnego w Warszawie

SZEREG CZASOWY I JEGO WŁASNOŚCI

M. Sobczyk definiuje szereg czasowy jako „ciąg wartości liczbowych badanego zjawiska obserwowanego w kolejnych jednostkach czasu”. W tych szeregach wartości analizowanego zjawiska (zmienna zależna) są funkcją czasu (zmienna niezależna), a zatem ogólną postać szeregu czasowego można przedstawić następująco:

$$y_t = f(t). \quad (1)$$

Zmienna czasowa t przyjmuje postać zbioru punktów na osi czasu bądź krótszych lub dłuższych okresów. Wobec tego dokonuje się podziału na szeregi czasowe momentów i okresów. Szeregi czasowe momentów tworzone są na podstawie wartości dotyczących zasobów i powstają w rezultacie pomiaru rozpatrywanego zjawiska w ściśle określonym punkcie czasowym (tj. zgodnie ze stanem na koniec dnia, miesiąca, itp.). Natomiast szeregi czasowe okresów odnoszą się do strumieni, a powstają na skutek sumowania wartości analizowanego zjawiska dla przedziałów o równych rozpiętościach. Szeregi czasowe są fundamentalnym elementem przeprowadzania badań dynamiki zjawisk. Analiza tego rodzaju zagadnień obejmuje dwa zasadnicze cele: (1) rozpoznanie natury rozpatrywanego zjawiska, (2) prognozowanie przyszłych wartości.

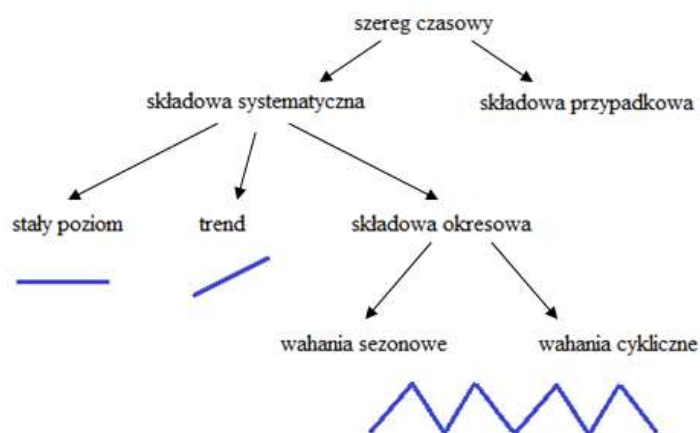
M. Cieślak. podaje, że w szeregach czasowych wyróżnia się dwie składowe: systematyczną, wynikającą z oddziaływań stałego zbioru czynników na zmienną prognozowaną, i przypadkową (często określaną jako składnik losowy lub wahania przypadkowe) [Cieślak 2001]. Składowa systematyczna może przyjąć postać stałego

poziomu prognozowanej zmiennej, tendencji rozwojowej (trendu) lub składowej okresowej (zwanej także periodyczną). Składowa okresowa może wyrażać się w postaci wahań cyklicznych lub sezonowych (rysunek 2).

Tendencja rozwojowa (trend) charakteryzuje się długookresową podatnością do jednokierunkowych przekształceń (wzrostowych lub spadkowych) wartości analizowanej zmiennej. Jest ona następstwem wpływu stałego zestawu czynników. Możliwość wyznaczenia trendu wymaga operowania długim szeregiem czasowym.

Stały poziom prognozowanej zmiennej ma miejsce, kiedy w szeregu nie występuje trend ani wahania okresowe, natomiast wartości prognozowanej zmiennej nieznacznie wahają się wokół stałego poziomu. Wahania cykliczne występują w formie długotrwałych, rytmicznych wahań wartości zmiennej względem jej trendu albo stałego poziomu. Najczęściej są one związane z cyklem koniunkturalnym gospodarki. Wahania sezonowe wyrażają się w postaci powtarzających się w przedziale czasu (nieprzekraczającym roku) wahań wartości zmiennej wokół trendu lub jej stałego poziomu. Powstają one w rezultacie zmian pór roku, podziału roku na kwartały, miesiące itd. [Dittman 2004; Stańko 2013].

Rysunek 2. Podział składowych szeregu czasowego



Źródło: opracowanie własne

Zagadnienie wyznaczenia poszczególnych składowych danego szeregu czasowego definiuje się dekompozycją szeregu. W wielu przypadkach rozpoznanie poszczególnych składowych szeregu czasowego danej zmiennej ułatwia ocena wzrokowa utworzonego wykresu [Cieślak 2001].

W zależności od przyjętych wytycznych odnoszących się do wzajemnych relacji oraz wpływu poszczególnych elementów szeregu czasowego na wartość prognozowanej zmiennej wyróżnia się dwa zasadnicze modele matematyczne: addytywny i multiplikatywny [Charemza, Deadman 1997]:

$$y_t = f(t) + g(t) + \varepsilon_t, \quad (2)$$

$$y_t = f(t) * g(t) * \varepsilon_t, \quad (3)$$

gdzie:

$f(t)$ – funkcja trendu,

$g(t)$ – funkcja wahań okresowych,

ε_t – składnik losowy.

Modele addytywne mają swoje zastosowanie, gdy funkcja trendu przyjmuje postać liniową lub można ją do tej postaci sprowadzić. Założeniem modeli addytywnych jest wzajemna niezależność wszystkich zmiennych w szeregu. W pozostałych przypadkach wykorzystuje się modele multiplikatywne lub mieszane. W modelach multiplikatywnych stały poziom lub trend prezentuje się w jednostkach zmiennej prognozowanej, natomiast pozostałe składowe szeregu traktuje się jako względne odchylenia od trendu.

W obszarze pojęcia prognozowania na przestrzeni lat sprecyzowano wiele definicji prognozy. Polski ekonomista i profesor, Z. Hellwig, stwierdził, że „Prognozą statystyczną nazywać będziemy każdy sąd, którego prawdziwość jest zdarzeniem losowym, przy czym prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest znane i wystarczająco duże dla celów praktycznych”. Czerwiński i Guzik [1980] proponuje inną definicję: „Przez prognozę rozumiemy sąd o zajściu określonego zdarzenia w czasie określonym z dokładnością do momentu (punktu) lub okresu (przedziału) czasu, należącego do przyszłości”. Obaj naukowcy zastosowali słowo sąd w odniesieniu do logiki, tzn. w kontekście zdania oznajmującego przyjmującego wartość logiczną równą prawdzie lub fałszu. Taką wartość można określić dopiero po upływie czasu, na który zbudowano prognozę. Jednak już w momencie tworzenia prognozy istnieje możliwość określenia miary zaufania do niej. Czerwiński i Guzik nie stawiają takich wymagań, w przeciwieństwie do Hellwiga, który wykorzystuje do tego prawdopodobieństwo.

MODELE WYGŁADZANIA WYKŁADNICZEGO

Idea metod wygładzania wykładniczego polega na wygładzaniu szeregu czasowego zmiennej prognozowanej przy użyciu ważonej średniej ruchomej zgodnie z wagami ustalonymi według prawa wykładniczego [Cieślak 2001; Gajda 2001]. Wybór wag bazuje na regule zmniejszania się wartości informacyjnej obserwacji w miarę upływu czasu. Wagi te dążą wykładniczo do zera. Oznacza to, że wraz z przesuwaniem się wstecz szeregu czasowego, każda kolejna wartość tego szeregu ma mniejsze oddziaływanie na tworzone prognozy. Równanie wykładnicze przedstawiające wagę obserwacji o wieku t ma postać:

$$w_t = \alpha(1 - \alpha)^t, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4)$$

Parametr α nazywa się stałą wygładzania. Powyższy wzór ukazuje, że jest ona wagą przyporządkowaną ostatniej obserwacji prognozowanej zmiennej. Wartość α bliska zeru świadczy o współmiernym udziale wszystkich obserwacji w budowanej

prognozie. Jeśli natomiast wartość α jest bliska 1, to najświeższa obserwacja ma znacznie większy udział od pozostałych. Wyznaczenie wartości stałej wygładzania zależy od dynamiki zmian szeregu czasowego [Sobczyk 2009].

W zależności od charakteru składowych szeregu czasowego stosuje się różne modele wygładzania wykładniczego. Spośród wielu wymienianych w literaturze modeli najczęściej wykorzystuje się: model Browna, model Holta oraz model Wintersa.

Metoda Browna

Proste wyrównanie wykładnicze opiera się na modelu Browna. Jest on przeznaczony do szeregów czasowych z niemal stałym poziomem zmiennej prognozowanej oraz wahaniami przypadkowymi. Model Browna sprowadza się do wzoru [Brown 1963]:

$$y_t^* = \alpha y_{t-1} + (1 - \alpha)y_{t-1}^* \quad (5)$$

Za y_1^* przyjmuje się zazwyczaj:

- wartość pierwszej obserwacji szeregu czasowego $y_1^* = y_1$,
- wartość średniej z n początkowych obserwacji szeregu czasowego $y_1^* = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$.

Budując prognozę na okres t uznaje się, że jej wartość będzie równa prognozie z okresu poprzedniego $t-1$ poprawionej o pewny fragment (α) jej bezwzględnego błędu ex post. Wobec tego, jeżeli prognoza określona na okres $t-1$ okazuje się zaniżona w porównaniu do prawdziwej wartości zmiennej prognozowanej, to prognoza wyznaczana na okres t wzrasta, i odwrotnie. Ważną kwestią podczas stosowania modelu Browna jest wybór odpowiedniej wartości stałej wygładzania α . Ten parametr ustala się zazwyczaj eksperymentalnie – tworząc na podstawie próbki wstępnej przewidywania dla różnych wartości α i wybierając spośród nich tę wartość α , dla której średni błąd prognoz wygasłych okazał się najmniejszy.

Metoda Holta

Gdy szereg czasowy zawiera tendencję rozwojową i wahaniami przypadkowe uzasadnione jest zastosowanie podwójnego wygładzania wykładniczego Holta. Model ten wykazuje się większą elastycznością w porównaniu do poprzedniego ze względu na występowanie dwóch parametrów. Podwójne wygładzanie wykładnicze bazuje na trzech równaniach:

- równania stosowanego do określenia wygładzonych wartości szeregu w czasie t :

$$F_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(F_{t-1} + S_{t-1}), \quad (6)$$

- równania wyznaczającego wygładzone wartości trendu na czas t :

$$S_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)S_{t-1}, \quad (7)$$

- równania wykorzystanego do tworzenia prognozy:

$$y_t^* = F_{t-1} + S_{t-1}. \quad (8)$$

Do budowy modelu Holta niezbędne są początkowe wartości F i S . W literaturze istnieje wiele możliwości na rozwikłanie tego zagadnienia. Najczęściej spotykana propozycja polega na uznaniu za F_1 pierwszej wartości y_1 , a za S_1 wyniku różnicy $y_2 - y_1$ lub zera. Kolejną istotną kwestią jest wyznaczenie wartości parametrów wygładzania α i β . Analogicznie do metody Browna, poszukuje się ich w sposób eksperymentalny, uznając za najlepsze te, które minimalizują średni błąd prognoz wygasłych [Cieślak 2001].

Metoda Wintersa

Potrójne wygładzanie wykładnicze Wintersa znajduje zastosowanie w przypadku szeregów czasowych z tendencją rozwojową, wahaniami przypadkowymi i wahaniami sezonowymi. Można zatem stwierdzić, że model Wintersa stanowi rozszerzenie modelu Holta o uzupełniające równanie wygładzania sezonowości (C_t). Ze względu na możliwość addytywnego i multiplikatywnego charakteru sezonowości wyodrębnia się dwie odmiany modelu Wintersa. Równania addytywnego wariantu modelu [Witkowska i in. 2012]:

$$F_t = \alpha(y_t - C_{t-r}) + (1 - \alpha)(F_{t-1} + S_{t-1}), \quad (9)$$

$$S_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)S_{t-1}, \quad (10)$$

$$C_t = \gamma(y_t - F_t) + (1 - \gamma)C_{t-r}, \quad (11)$$

oraz multiplikatywnego wariantu modelu:

$$F_t = \alpha \frac{y_t}{C_{t-r}} + (1 - \alpha)(F_{t-1} + S_{t-1}), \quad (12)$$

$$S_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)S_{t-1}, \quad (13)$$

$$C_t = \gamma \frac{y_t}{F_t} + (1 - \gamma)C_{t-r}, \quad (14)$$

Równanie prognozy na czas $t > n$ w wersji addytywnej modelu:

$$y_t^* = F_n + S_n(t - n) + C_{t-r} \quad (15)$$

oraz w wersji multiplikatywnej modelu:

$$y_t^* = [F_n + S_n(t - n)]C_{t-r}, \quad (16)$$

gdzie n to liczba wyrazów szeregu czasowego prognozowanej zmiennej.

Zastosowanie tego modelu wymaga przyjęcia pewnych założeń. Za wartość początkową F można uznać pierwszą wartość obserwacji lub średnią wartość obserwacji z pierwszego cyklu. Wartość S_1 da się wyznaczyć jako różnicę drugiej i pierwszej wartości obserwacji lub różnicę średnich wartości dla drugiego i pierwszego cyklu. Natomiast za C można przyjąć obliczoną na podstawie szeregu czasowego średnią różnic (w modelu addytywnym) lub ilorazów (w modelu multiplikatywnym), odpowiadających temu samemu etapowi cyklu sezonowego,

wartości prognozowanej zmiennej oraz wygładzonych wyrównanych wartości trendu.

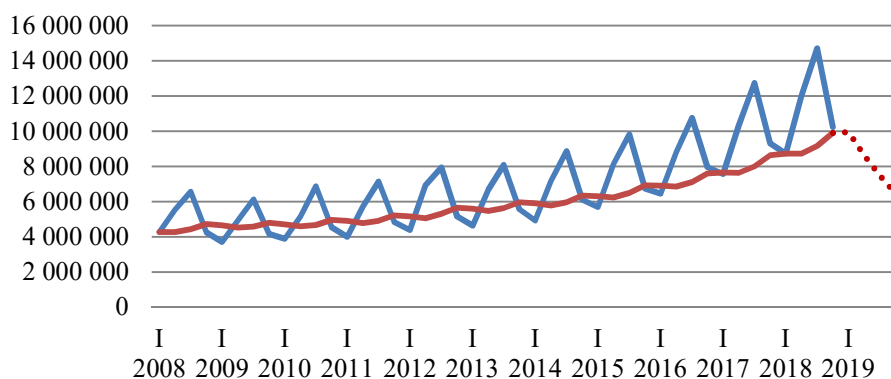
Literatura podaje wiele sugestii odnośnie doboru typowych wartości stałych wygładzania. Przy szybkich zmianach poszczególnych składowych szeregu czasowego zaleca się ustalić parametry α, β, γ na poziomie bliskim jedności, zaś w przeciwnym przypadku na poziomie bliskim zera. Istnieje także możliwość eksperymentalnego wyboru tych parametrów [Sobczyk 2009].

WYNIKI

Metoda Browna

Przy minimalizacji średniego procentowego błędu prognoz MAPE otrzymano parametr wygładzania $\alpha=0,13$. Wyniki prognoz zaprezentowano na rysunku 3.

Rysunek 3. Porównanie rzeczywistej liczby pasażerów transportu lotniczego i wartości wygładzonych za pomocą metody Browna



Źródło: opracowanie własne

Z obserwacji wykresu wynika, że prognozy utworzone za pomocą metody Browna znacznie odbiegają od rzeczywistych wartości. W celu dokładnej weryfikacji dopuszczalności modelu obliczono błędy ex post zawarte w tabeli 3.

Tabela 3. Błędy prognoz ex post otrzymane za pomocą metody Browna

Rodzaj błędu	Wartość
MAPE	18,89%
RMSE	12 622 617
V_{RMSE}	180,14%

Źródło: opracowanie własne

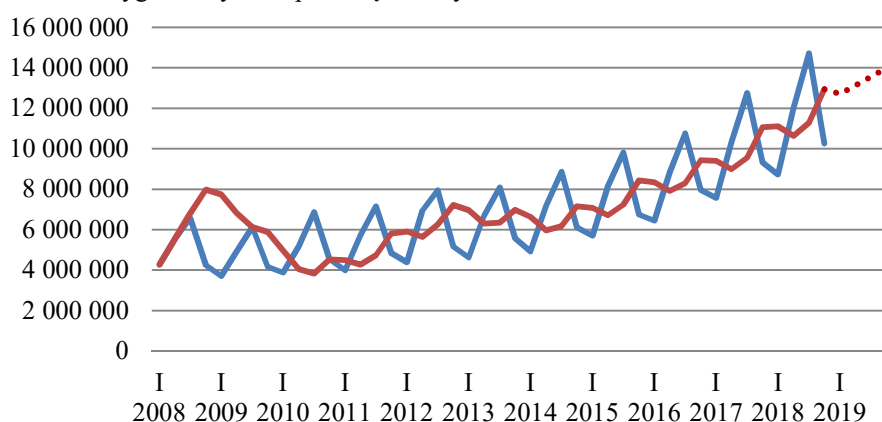
Błąd MAPE informuje, że zbudowana prognoza różni się średnio o +/- 18,89% od rzeczywistych wartości liczby pasażerów transportu lotniczego w Polsce.

Biorąc pod uwagę wysoką wartość tego wskaźnika, prognozę należy uznać za niedopuszczalną (błąd powyżej 5%).

Metoda Holta

Mając na uwadze minimalizację błędu MAPE uzyskano następujące wartości parametrów wygładzania: $\alpha=0,24$ i $\beta=0,63$. Obliczone wyniki przedstawiono na rysunku 4.

Rysunek 4. Porównanie rzeczywistej liczby pasażerów transportu lotniczego i wartości wygładzonych za pomocą metody Holta



Źródło: opracowanie własne

Analiza wykresu w tym przypadku również wskazuje na duże rozbieżności pomiędzy wyznaczoną predykcją a rzeczywistą liczbą obsłużonych pasażerów transportu lotniczego. Aby jednak zweryfikować te przypuszczenia dokonano obliczeń błędów ex post.

Tabela 4. Błędy prognoz ex post otrzymane za pomocą metody Holta

MAPE	26,81%
RMSE	12 774 615
V_{RMSE}	182,31%

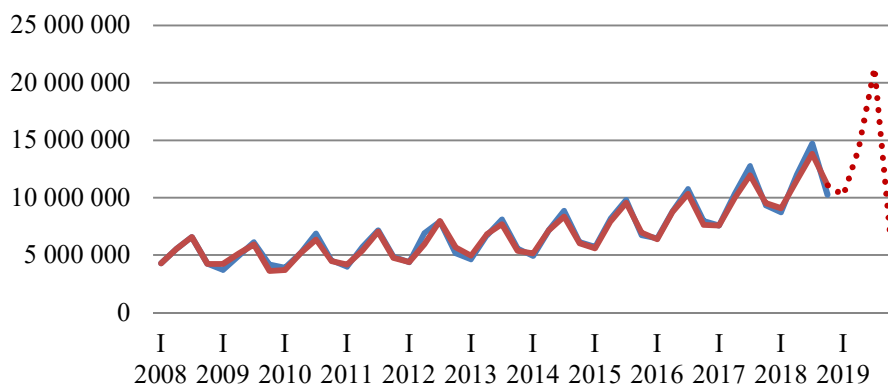
Źródło: opracowanie własne

Wyznaczone błędy świadczą o niskiej jakości prognoz zbudowanych za pomocą metody Holta. Błąd MAPE na poziomie 26,81% wskazuje, że utworzona prognoza różni się średnio aż o +/- 26,81% od rzeczywistych wartości badanego zjawiska, a to kwalifikuje ją jako niedopuszczalną.

Metoda Wintersa wersja addytywna

W wyniku minimalizacji błędu MAPE w addytywnej wersji metody Wintersa otrzymano współczynniki wynoszące odpowiednio $\alpha=0,57$, $\beta=0,13$ i $\gamma=1,00$. Uzyskane wyniki przedstawiono na rysunku 5.

Rysunek 5. Porównanie rzeczywistej liczby pasażerów transportu lotniczego i wartości wygładzonych za pomocą metody Wintersa w wersji addytywnej



Źródło: opracowanie własne

Według danych przedstawionych na wykresie wyznaczone prognozy osiągają poziom zbliżony do rzeczywistej liczby obsłużonych pasażerów. W celu weryfikacji tych założeń policzono błędy ex post przedstawione w tabeli 5.

Tabela 5. Błędy prognoz ex post otrzymane przy metodzie Wintersa w wersji addytywnej.

MAPE	3,84%
RMSE	373 371
VRMSE	5,33%

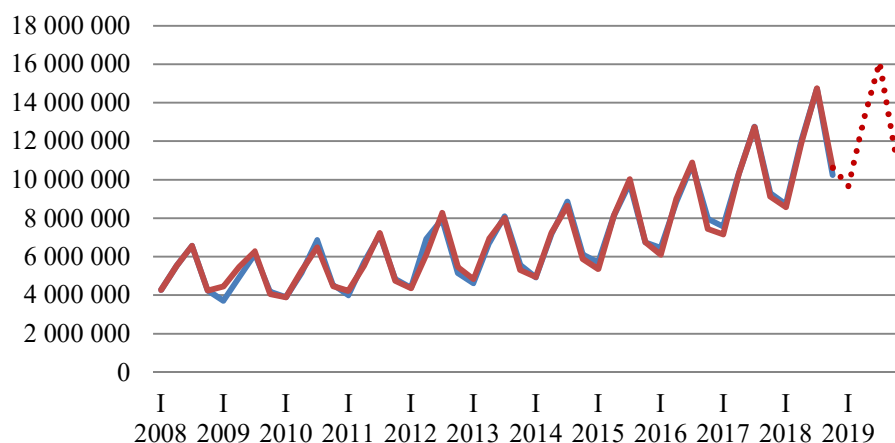
Źródło: opracowanie własne

W przypadku użycia addytywnej metody Wintersa błędy prognoz ex post oscylują wokół znacznie niższych wartości niż w metodzie Browna i metodzie Holta. Średni procentowy błąd prognozy MAPE wynosi 3,84%.

Metoda Wintersa wersja multiplikatywna

Optymalne parametry wygładzania zastosowane do multiplikatywnej wersji modelu Wintersa wyniosły: $\alpha=0,45$, $\beta=0,23$ i $\gamma=0,74$. Wyniki predykcji zaprezentowano na rysunku 6.

Rysunek 6. Porównanie rzeczywistej liczby pasażerów transportu lotniczego i wartości wygładzonych za pomocą metody Wintersa w wersji multiplikatywnej



Źródło: opracowanie własne

Obserwując rysunek 6 można stwierdzić, że utworzona predykcja jest dobrze dopasowana do rzeczywistej liczby pasażerów transportu lotniczego. W celu weryfikacji tych przypuszczeń obliczono błędy prognoz przedstawione w tabeli 6.

Tabela 6. Błędy prognoz ex post otrzymane przy metodzie Wintersa w wersji multiplikatywnej

MAPE	3,21%
RMSE	277 038
V_{RMSE}	3,95%

Źródło: opracowanie własne

Prognozy wyznaczone przy użyciu metody Wintersa w wersji multiplikatywnej różnią się od rzeczywistej liczby obsłużonych pasażerów transportu lotniczego średnio o +/- 3,21%.

Porównanie jakości prognoz

Do utworzenia prognoz liczby pasażerów transportu lotniczego wykorzystano cztery modele wygładzania wykładniczego: model Browna, model Holta, model Wintersa w wersji addytywnej oraz model Wintersa w wersji multiplikatywnej. Za miernik ich dopuszczalności przyjęto średni błąd procentowy MAPE oraz pierwiastek błędu średniokwadratowego RMSE. Otrzymane w ten sposób wyniki zaprezentowane w tabeli 7.

Tabela 7. Zestawienie otrzymanych wyników

Metoda	MAPE	RMSE	VRMSE
Model Browna	18,89%	12 622 617,15	180,14%
Model Holta	26,81%	12 774 614,62	182,31%
Model Wintersa addytywny	3,84%	373 371,44	5,33%
Model Wintersa multiplikatywny	3,21%	277 038,47	3,95%

Źródło: opracowanie własne

Wysokie wartości błędów MAPE kwalifikują prognozy utworzone za pomocą modelu Browna i modelu Holta jako niedopuszczalne. Wyznaczone za ich pomocą predykcje w dużej mierze odbiegają od rzeczywistych wartości liczby obsłużonych pasażerów transportu lotniczego. Potwierdza to hipotezę o dokładniejszych wynikach prognoz uzyskanych metodą Wintersa ze względu na występowanie w analizowanym szeregu czasowym sezonowości kwartalnej, trendu rosnącego oraz składnika losowego.

Błędy prognoz MAPE zbudowanych za pomocą metody Wintersa zarówno w wersji addytywnej, jak i multiplikatywnej nie przekraczają 5%. Według literatury można je zatem uznać za dopuszczalne. Najdokładniejszą z zastosowanych metod okazała się metoda Wintersa w wersji multiplikatywnej, która oprócz najmniejszej wartości błędu MAPE ma również najmniejszy błąd RMSE oraz błąd względny V_{RMSE} .

PODSUMOWANIE

Do jednego z najprężniej rozwijających się obszarów transportu w Polsce zalicza się transport lotniczy. Jego znaczny potencjał rozwojowy jest konsekwencją historycznych i geograficznych uwarunkowań. Obecna sukcesywna modernizacja portów lotniczych oraz inwestycje infrastrukturalne zwiększają ich przepustowość, a także komfort warunków podróżowania przyczyniają się do coraz większej liczby pasażerów. Transport lotniczy determinuje rozwój gospodarki światowej związanej z transferem ludzi, towarów i informacji. Wyznacza on osiągalność rynków o coraz większym obszarze geograficznym, zmniejszając przy tym czas i koszty oraz zwiększając jednocześnie tempo i rozmiar wymiany ładunków.

Rynek transportu lotniczego w Polsce posiada rozbudowaną historię, która wyjaśnia jego unikatową charakterystykę. Do 1989 roku polityka centralnego planowania prowadzona przez państwo znacznie ograniczała możliwości rozwojowe podmiotów prywatnych. Dopiero transformacje systemowe zapoczątkowały kształtowanie się wolnego rynku. Za przełomowy moment w historii transportu lotniczego przyjmuje się jednak przystąpienie Polski do Unii Europejskiej w maju 2004 roku. To wydarzenie zainicjowało ogromną metamorfozę polskiego rynku. Skupiono się na wprowadzeniu praktyk liberalizacyjnych zgodnych z obowiązującymi w Unii Europejskiej. Najistotniejszą kwestią okazało się złagodzenie przepisów o dostępie obcych przewoźników do polskiego rynku.

W ciągu zaledwie kilku lat przewoźnicy niskokosztowi zdominowali strukturę rynku burząc jego pierwotny kształt. Przemiany objęły nie tylko przewoźników, ale również porty lotnicze. Podjęto starania o podwyższenie warunków i konkurencji. Największymi beneficjentami liberalizacji stały się lotniska regionalne, które wcześniej odnotowywały bardzo niskie udziały w rynku, a obecnie stanowią jego mocny filar. Konsekwencją wymienionych transformacji był kilkukrotny wzrost ruchu pasażerskiego i dynamiczny rozwój transportu lotniczego.

Pomimo okresowych problemów związanych z sytuacją gospodarczą, koniunkturą polityczną oraz dostępnością przekazników energii, rozwój transportu lotniczego ma postać ciągłą. Biorąc pod uwagę intensyfikującą się globalizację, a w związku z nią konieczność wydajnego i bezpiecznego transportowania pasażerów oraz towarów godzi się postawić hipotezę o nieustającym dynamizmie przyszłych zmian tego zjawiska. W tym miejscu może pojawić się pytanie o stopień i kierunek nadchodzących transformacji.

Od dawna zdobycie wiedzy o przyszłości jest jednym z głównych pragnień ludzkości. Wraz z rozwojem cywilizacyjnym zaczęły pojawiać się różne metody naukowe bazujące na poszukiwaniu korelacji pomiędzy zdarzeniami z przeszłości mogącymi uwarunkowywać przyszłość. Do takich metod zalicza się prognozowanie pozwalające na naukowe wyznaczanie przyszłych zdarzeń. Prognozowanie umożliwia przygotowanie się na różnorodne ewentualności podczas planowania działań oraz podejmowania decyzji.

Na przestrzeni ostatnich lat prognozowanie osiągnęło szczególne znaczenie ze względu na bardzo dynamiczne zmiany zachodzące w różnych dziedzinach gospodarki, które wywołują wzrost ryzyka i niepewności. Zastosowanie odpowiednich prognoz może w znacznym stopniu ograniczyć ryzyko podejmowania niewłaściwych decyzji. W przypadku transportu lotniczego prognozowanie jest niezbędnym elementem skutecznego i sprawnego zarządzania portami lotniczymi. Poza tym, wczesna informacja dotycząca wielkości ruchu lotniczego umożliwia przystosowanie lotnisk i przewoźników do zachodzących zmian. Utworzone prognozy znajdują zastosowanie nie tylko w zarządach linii lotniczych, czy u producentów statków powietrznych, ale także wśród bankowców i zainteresowanych administracji rządowych.

BIBLIOGRAFIA

- Brown R.G. (1963) Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series. McGraw Hill, New York.
- Charemza W. W., Deadman D. F. (1997) Nowa ekonometria. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Cieślak M. (2001) Prognozowanie gospodarcze. Metody i zastosowania. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Czerwiński Z., Guzik B. (1980) Prognozowanie ekonometryczne. Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

- Dittman P. (2004) Prognozowanie w przedsiębiorstwie. Metody i ich zastosowanie. Oficyna Ekonomiczna, Kraków.
- Gajda J. B. (2001) Prognozowanie i symulacja a decyzje gospodarcze. Wydawnictwo C. H. Beck, Warszawa.
- Hoszman A. (2012) Wpływ regulacji na sektor pasażerskiego transportu lotniczego. Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa.
- Rucińska D. (2012) Polski rynek usług transportowych – funkcjonowanie, przemiany, rozwój. PWE, Warszawa.
- Rucińska D., Ruciński A., Tłoczyński D. (2012) Transport lotniczy – ekonomika i organizacja. Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.
- Ruciński A. (2006) Porty lotnicze wobec polityki otwartego nieba. Fundacja Rozwoju Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.
- Ruciński A., Madej K. (2016) Polski rynek transportu lotniczego w perspektywie 2030 roku. *Studia Oeconomica Posnaniensia*, 4(7), 7-38.
- Schoemaker P. I. H. (2004) Forecasting and Scenario Planning: The Challenges of Uncertainty and Complexity. [In:] Koehler D. J, Harvey N (eds) *Blackwell Handbook of Judgement and Decision Making*. Blackwell Publishing Ltd.
- Sobczyk M. (2009) Prognozowanie: teoria, przykłady, zadania. Wydawnictwo PLACET, Warszawa.
- Stańko S. (2013) Prognozowanie w agrobiznesie: teoria i przykłady zastosowania. Wydawnictwo SGGW, Warszawa.
- Tłoczyński D. (2013) Kierunki rozwoju transportu lotniczego. *Studia Ekonomiczne/Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Współczesne uwarunkowania rozwoju transportu w regionie*, 143, 381-398.
- Witkowska D., Matuszewska-Janica A., Kompa K. (2012) Wprowadzenie do ekonometrii dynamicznej i finansowej. Warszawa.

FORECASTING THE NUMBER OF AIR TRANSPORT PASSENGERS IN POLAND

Abstract: The Polish air transport market constitutes a significant part of the European and world transport services market. Over the years, there has been a high dynamics of growth in the number of air transport passengers. Due to the dynamism of the changes taking place, there has been a need to forecast this phenomenon. The paper presents forecasts of the number of air transport passengers in Poland with the use of exponential smoothing methods: Brown, Holt and Winters in additive and multiplicative versions. The quality of the obtained predictions was also compared based on the calculated ex post errors.

Keywords: time series, forecasting, exponential smoothing models

JEL classification: C22, C32

SYMMETRY PROPERTIES OF MODIFIED BLACK-SCHOLES EQUATION

Maciej Janowicz  <https://orcid.org/0000-0002-1584-2089>

Andrzej Zembruski  <https://orcid.org/0000-0001-5943-3968>

Institute of Information Technology

Warsaw University of Life Sciences – SGGW, Poland

e-mails: maciej_janowicz@sggw.edu.pl; andrzej_zembruski@sggw.pl

Abstract: This paper concerns the classical and conditional symmetries of the Black-Scholes equation. Modifications of the Black-Scholes equation have also been considered and their maximal algebras of invariance have been found. Examples of creation operators for the Black-Scholes eigenvalue problem have been provided.

Keywords: Black-Scholes equation, Lie symmetries, creation operator

JEL classification: C69, G150, G170

INTRODUCTION

The remarkable Black-Scholes equation [Black & Scholes 1973, Merton 1971, Merton 1973, Black 1976] that describes the time evolution of the option prices of a European call under the Black-Scholes model belongs to a group of successful mathematical models related to the derivatives market. As such, it has been vigorously investigated from many different points of view. In particular, a transformation to the heat (diffusion) equations has been found that resulted in a convenient formula for a solution in terms of the standard normal cumulative distribution functions [Black 1976].

One of the most successful methods or perhaps *the* most successful method of analysis of partial differential equations (linear or nonlinear) is based on finding the *symmetries* of a given equation. In particular, thanks to the works by Lie and also Ovsyannikov, semi-algorithmic, effective methods of finding symmetry transformations have been found that are based on solving an overdetermined system of linear partial differential equations for the coefficients of the so-called generator

<https://doi.org/10.22630/MIBE.2021.22.2.7>

of symmetry [Ovsiannikov 1962, Olver 1986, Bluman & Kumei 1989, Stephani 1990]. The generators of symmetry allow for finding special solutions to a given equation by lowering its dimensionality and obtaining new solutions from already known ones. The symmetry generators obtained in the classical Lie sense form a Lie algebra. It provides insight into the deep structure of the equation. If the Lie algebras for two different equations (or systems of equations) are isomorphic, they provide a means to find invertible transformations between these two equations [Bluman & Kumei 1989].

There are good reasons to believe that the symmetry analysis has become more or less *de rigueur* in the modern theory (and practice) of partial differential equations. The original Black-Scholes equation has been investigated from the point of view of its symmetries in [Gazizov & Ibragimov 1998, Bordag 2015] among others. As for the BS equation with variable coefficients, only partial results exist (to our best knowledge), to which we add here our contribution.

One of the limitations imposed on applications of the Black-Scholes formula under realistic circumstances is the assumption that its two important parameters, risk-free rate, and volatility, are constant. A version of the Black-Scholes equation with time-varying coefficients has been derived by Merton already in 1973 [Merton 1973]. Interesting mathematical insights associated with non-constant parameters have been obtained, in particular, in [Harper 1994, Willmot et al. 1999, Rodrigo & Mamon 2006, Naz & Naeem 2020, Lyu & Wang 2017].

Thus, our objective has been to analyze the variable-coefficient (i.e. modified) Black-Scholes equations from the point of view of its symmetries. We allow the coefficients to depend on both independent variables. In particular, we identify the dependence of the coefficients that allow for maintaining the maximal symmetry of the Lie sense.

The main body of this work is organized as follows. In Section 2 we derive the classical and conditional symmetries of the standard Black-Scholes equation using commutators instead of prolongations used in [Gazizov & Ibragimov 1998]. The creation operator for the corresponding eigenvalue problem with varying risk-free interest rates has been obtained in Section 3. In Section 4 we find symmetries of the logarithmic dependence of the risk-free interest rate on the value of a security. Section 5 contains some concluding remarks.

STANDARD BLACK-SCHOLES EQUATION AND ITS SYMMETRIES

By *standard* Black-Scholes equation we will understand the following partial differential equation:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + r s \frac{\partial v}{\partial s} - r v = 0.$$

Classical symmetries

The method for calculating symmetries of the Black-Scholes equation as employed in GI has been based on the so-called second prolongation of the symmetry generator. However, for the case of *linear* equations, a simpler method exists. It takes into account more directly the fact that a vector field is a symmetry if it transforms a hypersurface of solutions of a partial differential equation into itself. By “hypersurface of solutions” we mean the hypersurface in the space spanned by the independent variables, dependent variables, and the derivatives of the latter as specified by the constraint given by the differential equation.

Let \mathcal{F} be a set of all triple-differentiable functions of two variables (t, s) . Let $Q = Q(t, s, \partial_t, \partial_s)$ be a second-order linear partial differential operator with the domain \mathcal{F} . By a (*first-order*) *symmetry (operator)* of the partial differential equation $Qf = 0$, $f \in \mathcal{F}$, we will understand a first-order partial differential operator $L = L(t, s, \partial_t, \partial_s)$ such that [Miller 1984, Fushchych & Nikitin 1987]:

$$[Q, L]f = k(t, s)Qf, \quad (1)$$

for any f , where $[Q, L] = QL - LQ$ is the commutator of the operators Q and L , while $k(t, x)$ is a function of the arguments (t, s) . Thus, the operator L transforms the set of solutions of the equation $Qf = 0$ into itself.

The definition contained in Eq. (1) provides effective means to determine the symmetries. Indeed, let Q be the operator $\partial_t - B$, and let us represent L as:

$$L = \tau(t, x) \partial_t + \xi(t, x) \partial_s + \phi(t, x), \quad (2)$$

where the functions τ , ξ , and ϕ are at least twice differentiable. Substituting $\partial_t - B$ for Q and the representation (2) into Eq. (1) and equating to zero the coefficients standing at the consecutive derivatives of the function f we obtain the following set of *determining equations* for the functions τ , ξ and ϕ :

$$s^2 \sigma^2 \frac{\partial \tau}{\partial s} = 0, \quad (3)$$

$$s^2 \sigma^2 \frac{\partial \xi}{\partial s} - s \sigma^2 \xi - \frac{1}{2} s^2 \sigma^2 k = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial s^2} + r s \frac{\partial \tau}{\partial s} - k = 0, \quad (5)$$

$$\sigma^2 s^2 \frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} + r s \frac{\partial \xi}{\partial s} - r \xi - r s k = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + r s \frac{\partial \phi}{\partial s} + r k = 0. \quad (7)$$

Due to the favorable structure of the above determining equations and their overdetermined character, it is possible to obtain their general solutions without

difficulties. Indeed, we immediately realize that both τ and k must be independent of s with $k = k(t) = \partial_t \tau$. Integration of (4) leads to:

$$\xi(t, s) = s \left(\bar{\xi}(t) + \frac{1}{2} k(t) \log(s) \right) \quad (8)$$

while the integration of (6) yields:

$$\phi(t, s) = \bar{\phi}(t) - \frac{\dot{\bar{\xi}}(t) \log(s)}{\sigma^2} - \frac{k(t) \log^2(s)}{4\sigma^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right) \log(s) k(t), \quad (9)$$

where the "dot" over a symbol indicates the derivative over time t .

Finally, with the substitution of the above partial solutions to Eq. (7) and equating to zero the coefficients standing at $\log(s)^2$, $\log(s)$, and the s -independent term, we obtain:

$$k(t) = k_0 + k_1 t,$$

$$\bar{\xi}(t) = \xi_0 + \xi_1(t), \quad (10)$$

$$\bar{\phi}(t) = \phi_0 - \frac{(\sigma^2 + 2r)^2}{16} k_1 t^2 - \frac{(\sigma^2 + 3r)^2}{8\sigma^2} k_0 t + \frac{\sigma^2 - 2r}{2\sigma^2} \xi_1 t + \frac{1}{4} k_1 t. \quad (11)$$

The expression for τ is obtained by simple integration over t :

$$\tau = \tau_0 + k_0 t + \frac{1}{2} k_1 t^2. \quad (12)$$

Thus, by the above straightforward calculations we have proved the following proposition:

Theorem 1. *The most general first-order symmetry operator of the Black-Scholes equation is given by*

$$L = \tau \partial_t + \xi \partial_s + \phi,$$

where the functions τ , ξ , and ϕ are given by (12, 8, 10, 9, 11).

We conclude that the algebra of invariance operators is generated by the following operators:

$$L_0 = \partial_t,$$

$$L_1 = t \partial_t + \frac{1}{2} s \log(s) \partial_s - \frac{(\sigma^2 + 2r)^2}{8\sigma^2} t + \left(\frac{r}{2\sigma^2} - \frac{1}{4} \log(s) \right),$$

$$L_2 = \frac{1}{2} t^2 \partial_t + \frac{1}{2} s t \log(s) \partial_s - \frac{(\sigma^2 + 2r)^2}{16} t^2 + \frac{t}{4} - \frac{\log^2(s)}{4\sigma^2},$$

$$\begin{aligned}
L_3 &= s \frac{\partial}{\partial s}, \\
L_4 &= st \frac{\partial}{\partial s} + \left(\left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right) t - \frac{\log(s)}{\sigma^2} \right), \\
L_5 &= I.
\end{aligned}$$

Although the shape of the above operators may seem a bit complicated, they form a Lie algebra with a fairly simple commutation table:

$$\begin{aligned}
[L_0, L_1] &= L_0 - \frac{(\sigma^2 + 2r)^2}{8\sigma^2} L_5, \\
[L_0, L_2] &= L_1 + \frac{1}{4} L_5, \\
[L_0, L_3] &= 0, \\
[L_0, L_4] &= L_3 + \left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right) L_5, \\
[L_0, L_5] &= 0, \\
[L_1, L_2] &= L_2, \\
[L_1, L_3] &= -\frac{1}{2} L_3 - \left(\frac{r}{2\sigma^2} - \frac{1}{4} \right) L_5, \\
[L_1, L_4] &= 0, \\
[L_1, L_5] &= 0, \\
[L_2, L_3] &= -\frac{1}{2} L_4, \\
[L_2, L_4] &= 0, \\
[L_2, L_5] &= 0, \\
[L_3, L_4] &= -\frac{1}{\sigma^2} L_5, \\
[L_3, L_5] &= 0, \\
[L_4, L_5] &= 0.
\end{aligned}$$

The Lie algebra rederived above is isomorphic to the so-called extended Schrödinger algebra of invariance of both the one-dimensional Schrödinger (with at most quadratic potential) and one-dimensional heat (diffusion) equation. It is precisely this isomorphism that allows for the well-known transformation from the Black-Scholes to the heat equation.

Conditional symmetries

Let Q be a second-order partial differential operator with the domain as above. By a *conditional symmetry* of the partial differential equation $Qf = 0$ we will understand a first-order partial differential operator L such that

$$[Q, L] = k(t, s)Q + m(t, s)L, \quad (13)$$

where $m(t, s)$ is another first-order partial differential operator. The intuition behind the above definition is as follows. The number of symmetries can be enlarged if we add a condition to the solutions. Namely, even though the hypersurface $Qf = 0$ is not invariant under transformations generated by L , a subset U of that hypersurface can be invariant if it satisfies certain additional conditions ($Lf = 0$ in this case). That subset U is, therefore, defined by the two conditions: $Qf = 0, Lf = 0$. The general form of the operator $m(t, s)$ is:

$$m(t, s) = \mu(t, s) \frac{\partial}{\partial t} + \nu(t, s) \frac{\partial}{\partial s} + \rho(t, s).$$

However, this form is, in fact, *too* general - on employing it we obtain a family of uncountably many symmetry operators parametrized by the arbitrary functions μ, ν without any effective means to calculate them explicitly. Thus, we will restrict our discussion to the case of m reduced to the function ρ multiplied with the identity operator. What is more, we will assume that ρ is constant.

From (13) we obtain the following set of determining equations. The first two of them coincide with (3), (4) while the remaining three are just a little bit more complicated:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial s^2} + rs \frac{\partial \tau}{\partial s} - \rho \tau - k &= 0, \\ \sigma^2 s^2 \frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} + rs \frac{\partial \xi}{\partial s} - \xi \rho - r \xi - rsk &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + rs \frac{\partial \phi}{\partial s} - \rho \phi + rk &= 0. \end{aligned}$$

The results appear to be somewhat trivial at the first sight. The generators obtained from the above equations are those of the previous subsection but multiplied by the factor $\exp(\rho t)$. This seemingly innocent factor changes quite radically the structure of the set of generators: they no longer form a Lie algebra because the commutators contain the factor $\exp(2\rho t)$. However, it is to be noted that the commutators of the symmetry operators found are still symmetries.

CREATION OPERATOR FOR EIGENVALUE PROBLEM

The problem considered above sends us to another consideration of non-vanishing interest. Let us consider the following eigenvalue problem for the Black-Scholes operator:

$$B(v) = -\frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - rs \frac{\partial v}{\partial s} + rv = \lambda v,$$

where λ is an eigenvalue (complex, in principle). And let us look for a first-order ordinary differential operator a^\dagger such that:

$$[B, a^\dagger] = ka^\dagger. \quad (14)$$

Both the notation of a^\dagger and the name by which we call it here - the creation operator - are borrowed, of course, from quantum mechanics. The merit of the creation operator, if it exists, is that it transforms one solution of the eigenvalue problem into another belonging to, in general, a different eigenvalue.

Let us represent a^\dagger in the same way as the symmetry operator L before:

$$a^\dagger = \xi(s) \frac{d}{ds} + \phi(s).$$

Upon substitution of the above expression into (14) we obtain the immediately obtain the following solutions for ξ and ϕ :

$$\xi(s) = \xi_0 s,$$

$$\phi(s) = \phi_0 - \frac{k\xi_0 \log(s)}{\sigma^2}.$$

Unfortunately, there are further constraints for the solution ϕ that results in:

$$\xi_0 \left(\frac{k^2 \log(s)}{\sigma^2} + \frac{kr}{\sigma^2} - \frac{k}{2} \right) - \frac{k\xi_0}{2} = 0.$$

from which it follows that either $k = 0$ or both ξ_0 and ϕ_0 vanish. We must, therefore, conclude that the standard Black-Scholes operator has no non-trivial creation operators. Now, the following question naturally arises: can we improve the Black-Scholes operator in such a way that a creation operator is admitted.

Let us make a somewhat exotic assumption that the risk-free interest rate r depends on the value of s , $r = r(s)$. Under this assumption, the expressions for ξ and ϕ are only slightly changed:

$$\xi = \xi_0 s,$$

$$\phi = \phi_0 + \xi_0 \frac{r(s) - k \log(s)}{\sigma^2}.$$

The constraint that must be fulfilled by ϕ leads to the following non-linear second-order differential equation for $r(s)$:

$$-\frac{1}{2} \xi_0 s^2 r''(s) - \xi_0 s \left(\frac{r(s)}{\sigma^2} + 1 \right) r'(s) + \xi_0 \frac{k^2 \log(s)}{\sigma^2} - k\phi_0 - \frac{k\xi_0}{2} = 0.$$

It is not difficult to find a special solution to the above equations that, by the way, simplifies ϕ , namely:

$$r(s) = a \log(s) + b.$$

We immediately find:

$$k = a,$$

$$\phi_0 = -\xi_0 \left(\frac{b}{\sigma^2} + 1 \right).$$

Thus, we have found a modified Black-Scholes equation with a non-trivial creation operator. The modification is very minor here.

SYMMETRIES IN THE CASE OF NON-CONSTANT RISK-FREE INTEREST RATE

In this section, we will find symmetries of a modified Black-Scholes equation in which the risk-free interest rate r depends either on s or on time.

Motivated by the results for the creation operator, we pay particular attention to the case:

$$r(s) = a \log(s) + b.$$

The general form of the symmetry generator is as before. The determining equations take the following form:

$$\sigma^2 s \frac{\partial \tau}{\partial s} = 0,$$

$$\sigma^2 s^2 \frac{\partial \xi}{\partial s} - \sigma^2 s \xi - \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 k = 0,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial s^2} + sr \frac{\partial \tau}{\partial s} - k = 0,$$

$$\sigma^2 s^2 \frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} + sr \frac{\partial \xi}{\partial s} - s \frac{\partial r}{\partial s} \xi - r \xi - srk = 0,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + sr \frac{\partial \phi}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial s} \xi + rk = 0.$$

They differ very little from the determining equations for the standard Black-Scholes equation, but the dependence of r of s spoils the symmetry quite radically. But with the logarithmic dependence of r on s we obtain the following solution:

$$k(s, t) = k(t) = c_1 e^{2at} + c_2 e^{-2at},$$

$$\tau(s, t) = \tau(t) = c_0 + \frac{1}{2a} (c_1 e^{2at} - c_2 e^{-2a}),$$

$$\begin{aligned}\bar{\xi}(s, t) &= s \left(\xi_0(t) + \frac{1}{2} k(t) \log(s) \right), \\ \phi(s, t) &= \phi_0(t) + \frac{b\xi_0}{\sigma^2} + \frac{1}{4\sigma^2} \log(s)^2 \left(2bk - \frac{\partial k}{\partial t} \right) + \frac{1}{4\sigma^2} \left(4b\xi_0 + 2ak - 4 \frac{\partial \xi_0}{\partial t} - k \right).\end{aligned}$$

The dependence of ξ_0 on t is given by:

$$\xi_0(t) = \frac{1}{4a} (\sigma^2 + 2b)(c_1 e^{2at} + c_2 e^{-2at}) + c_3 e^{at} + c_4 e^{-at},$$

while $\phi(t)$ is obtained by the integration of the formula:

$$\frac{d\phi_0}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d\xi_0}{dt} - \frac{1}{4} \frac{dk}{dt} + \frac{1}{2\sigma^2} (2b + \sigma^2) a \xi_0(t) + \frac{1}{8} \left(8\sigma^2 + \frac{4b^2}{\sigma^2} + 4a + 4b \right) k(t) = 0.$$

The above symmetry generator allows, of course, for an attempt to perform similarity reduction and find non-trivial solutions to the modified Black-Scholes equation. This, however, would be only meaningful if our logarithmic dependence of the risk-free interest rate on s can be in any sense justified.

We have also studied the dependence on the risk-free interest rate on time, $r = r(t)$. We have found, however, that even the simplest, linear time dependence largely reduces the symmetry algebra: the function $\tau(t)$ depends in this case on one (instead of three) arbitrary parameters. Let us notice that Naz and Naeem [Naz, Naeem 2020] provided an interesting treatment of the case time dependence of *both* r and σ^2 with $r(t) = (1/2)\sigma^2(t)$ using the so-called potential symmetries.

We plan to provide a more comprehensive treatment of similarity reductions in another paper where multidimensional versions of the Black-Scholes equation with time-dependent risk-free interest rates will also be studied.

CONCLUDING REMARKS

In this work, we have considered the standard as well as modified Black-Scholes equations from the point of view of their symmetries. Known results about it have been rederived using a different method. An eigenvalue problem for the Black-Scholes operator has also been considered for a non-trivial, logarithmic dependence of the risk-free interest rate. For the same dependence of that quantity, the symmetry of the modified Black-Scholes equations has been found. Work is in progress to provide a more comprehensive exposition of the symmetries of variable-coefficient versions of that equation and to extend the symmetry approach to the parameter-dependent multidimensional Black-Scholes equation.

As is usually the case with variable-coefficient partial differential equations, only for very peculiar dependence of the coefficients on independent variables can we obtain non-trivial symmetries? This can be in some sense remedied if a small parameter is present in the equation; the resulting approximate symmetries can be

richer than the set of "exact" symmetries. This case will also be addressed in our future work.

REFERENCES

- Black F. S. (1976) The Pricing of Commodity Contracts. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2), 167-179.
- Black F.S., Scholes M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
- Bluman G. W., Kumei S. (1989) *Symmetries and Differential Equations*. Springer, New York.
- Bordag L. A. (2015) *Geometrical Properties of Differential Equations: Applications of the Lie Group Analysis in Financial Mathematics*. World Scientific, Singapore.
- Fushchych W. I., Nikitin A. G. (1987) *Symmetries of Maxwell's Equations*. Springer, Berlin.
- Gazizov R. K., Ibragimov N. H. (1998) Lie Symmetry Analysis of Differential Equations in Finance. *Nonlinear Dynamics*, 17, 387-407, <https://doi.org/10.1023/A:1008304132308>.
- Harper J. (1994) Reducing Parabolic Partial Differential Equations to Canonical Form. *European Journal of Applied Mathematics*, 5, 159-164.
- Lyu W., Wang Y. (2017) Black-Scholes Equation with the Variable Risk-free Interest Rate. 2nd International Conference on Advances in Management Engineering and Information Technology (AMEIT 2017).
- Merton R. C. (1971) Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model. *Journal of Economic Theory*, 3(4), 373-413.
- Merton R. C. (1973) Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics*, 4(1), 141-183.
- Miller W. Jr (1984) *Symmetry and Separation of Variables*. Cambridge University Press.
- Naz R., Naeem I. (2020) Exact Solutions of a Black-Scholes Model with Time-Dependent Parameters by Utilizing Potential Symmetries. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series S*, 13(10), 2841-2851.
- Olver P. J. (1986) *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer, New York.
- Ovsyannikov L. V. (1962) *Group Properties of Differential Equations*. USSR Academy of Sciences, Siberian Branch, Novosibirsk [in Russian].
- Rodrigo M.R., Mamon R.S. (2006) An alternative approach to solving the Black-Scholes equation with time-varying parameters. *Applied Mathematics Letters* 19(4), 398-402.
- Stephani H. (1990) *Differential Equations: Their Solution Using Symmetries*. Cambridge University Press.
- Wilmott P, Howison S., Dewynne J. (1999) *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press.