

Warsaw University of Life Sciences – SGGW
Institute of Economics and Finance
Department of Econometrics and Statistics

**QUANTITATIVE METHODS
IN ECONOMICS**

**METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH
EKONOMICZNYCH**

Volume XXIII, No. 1

Warsaw 2022

EDITORIAL BOARD

Editor-in-Chief: Bolesław Borkowski

Vice-Editor-in-Chief: Hanna Dudek

Managing Editor: Grzegorz Koszela

Theme Editors:

Econometrics: Bolesław Borkowski

Multidimensional Data Analysis: Wiesław Szczesny

Mathematical Economy: Zbigniew Binderman

Analysis of Labour Market: Joanna Landmesser

Financial Engineering: Monika Krawiec

Data Science: Michał Gostkowski

Theory of Risk: Marek Andrzej Kociński

Statistical Editor: Wojciech Zieliński

Technical Editors: Jolanta Kotlarska, Elżbieta Saganowska

Language Editor: Agata Cienkusz

Native Speaker: Yochanan Shachmurove

Editorial Assistant: Luiza Ochnio

SCIENTIFIC BOARD

Adnene Ajimi (University of Sousse, Tunisia)

Heni Boubaker (University of Sousse, Tunisia)

Vasily Dikussar (Doradnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Russia)

Peter Friedrich (University of Tartu, Estonia)

Paolo Gajo (University of Florence, Italy)

Agnieszka Gehringer (University of Göttingen, Germany)

Anna Maria Gil-Lafuente (University of Barcelona, Spain)

Jaime Gil-Lafuente (University of Barcelona, Spain)

Vasile Glavan (Moldova State University, Moldova)

Francesca Greselin (The University of Milano-Bicocca, Italy)

Ana Kapaj (Agriculture University of Tirana, Albania)

Jirawan Kitchaicharoen (Chiang Mai University, Thailand)

Yuriy Kondratenko (Black Sea State University, Ukraine)

Vassilis Kostoglou (Alexander Technological Educational Institute of Thessaloniki, Greece)

Karol Kukula (University of Agriculture in Krakow, Poland)

Kesra Nermend (University of Szczecin, Poland)

Nikolas N. Olenev (Doradnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Russia)

Alexander N. Prokopenya (Brest State Technical University, Belarus)

Yochanan Shachmurove (The City College of The City University of New York, USA)

Mirbulat B. Sikhov (al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan)

Marina Z. Solesvik (Nord University, Norway)

Ewa Syczewska (Warsaw School of Economics, Poland)

Achille Vernizzi (University of Milan, Italy)

Andrzej Wiatrak (University of Warsaw, Poland)

Dorota Witkowska (University of Lodz, Poland)

ISSN 2082-792X

e-ISSN 2543-8565

© Copyright by Department of Econometrics and Statistics WULS – SGGW
(Katedra Ekonometrii i Statystyki SGGW)

Warsaw 2022, Volume XXIII, No. 1

The original version is the paper version

Journal homepage: qme.sggw.pl

Published by Warsaw University of Life Sciences Press

CONTENTS

Somdeb Lahiri – Risk Aversion and a Calculus for Finitely Generated Piecewise Linear Functions: A Calculus that Economists Ought to Develop?	1
Kompa Krzysztof, Witkowska Dorota - Porównanie rozwoju społeczno- gospodarczego krajów Afryki	11
Zbyrowska Małgorzata Jolanta – Zasady z Rochdale w obecnej działalności polskich kooperatyw spożywczych	24

RISK AVERSION AND A CALCULUS FOR FINITELY GENERATED PIECEWISE LINEAR FUNCTIONS: A CALCULUS THAT ECONOMISTS OUGHT TO DEVELOP?

Somdeb Lahiri  <https://orcid.org/0000-0002-5247-3497>

Ex-Professor

PD Energy University

&

Adjunct Professor

Lok Jagruti (LJ) Kendra University, India

e-mail: somdeb.lahiri@gmail.com

Abstract: In this note we propose a calculus for piece-wise linear functions, in order to obtain derivatives and second derivatives at points where the function is not differentiable. Such derivatives can be used to calculate coefficients of risk aversion at initial wealth for piece-wise linear utility functions for gains, which display loss aversion-and hence non differentiability at zero gains.

Keywords: piece-wise linear functions, non-differentiable, derivative, second derivative, utility function, risk aversion

JEL Classification: C65, D81

MSC 2020 Codes: 00, 15, 26, 90, 91

INTRODUCTION

This paper is a consequence of our concerns with trying to extend the concepts of absolute and relative risk aversion to utility functions, that are piecewise linear, with a kink at the origin, in order to account for “loss aversion” (at initial wealth) that many individuals seem to display. In mathematics and statistics, a **piecewise linear, PL or segmented** function is a real-valued function of a real variable, whose graph is composed of straight-line segments. (See [Stanley 2004] page 143). Needless to say, piecewise linear functions have the scope for wide applicability in economics, of which utility theory of gains and losses is just one example.

<https://doi.org/10.22630/MIBE.2022.23.1.1>

The following statement can be found in page 5 (Chapter 1) of the well-known work by Eeckhoudt, Gollier and Schlesinger [Eeckhoudt, Gollier and Schlesinger 2005]: “... most human beings do not extract utility from wealth. Rather, they extract utility from consuming goods that can be purchased with this wealth.”

Our understanding is that most human beings do not extract “satisfaction” from wealth. Rather, they extract “satisfaction” from consuming goods that can be purchased with this wealth. Although wealth may not yield “satisfaction”, it has use-value since it can be used to purchase goods that yield satisfaction. We are at this point drawing a clear distinction between satisfaction derived from consumption and use-value of an instrument that is used to derive satisfaction from consumption. The use-value of wealth- purely as an instrument used to extract satisfaction from consumption- may be referred to as **utility** of wealth.

Since it may be difficult to measure or quantify the satisfaction extracted from consuming goods, if possible and quantifiable, the utility of wealth that is used to purchase goods, could be used as a “proxy” for the satisfaction that is derived or extracted from consuming these goods.

Given this understanding of utility functions for wealth-and hence utility functions for gains and losses with initial wealth being located at the origin- in the next section we proceed to develop “a calculus” (allowing for the possibility of other approaches) to tackle the problem of measuring risk aversion, both absolute and relative, when utility functions for gains (losses being negative “gains”) are piecewise linear and possibly non-differentiable, particularly at the origin. In the same section, we extend the calculus-from our perspective-to multi-piecewise linear functions. An example of such a utility function is the one in page 224 (the fourth section of Chapter 13) of the work cited above by Eeckhoudt, Gollier and Schlesinger. We discuss issues related to risk aversion for this particular utility function in a final section of this paper. Prior to the discussion of risk aversion for the specific utility functions, we define the concepts of concave and convex piece-wise linear functions on closed and bounded intervals of the real line and obtain their equivalence with the expected properties in terms of second derivatives. Is Newtonian calculus, therefore, a “trivialization” of the mathematics required to understand the essentially “discrete” real world we live in?

FIRST AND SECOND DERIVATIVES FOR PIECEWISE LINEAR FUNCTIONS

A real-valued function f whose domain denoted $dom(f)$ is a non-degenerate interval in the real line is said to be a **real-valued finitely generated PL** if or some positive integer ‘ n ’ with $n \geq 2$, there exists a non-empty finite set of real numbers $\{x_j | j = 1, \dots, n\}$ and satisfying $x_j < x_{j+1}$ for $j \in \{1, \dots, n-1\}$ if $n > 1$ such that:

- (i) The restrictions of f to $(-\infty, x_1] \cap \text{dom}(f)$, $[x_n, +\infty) \cap \text{dom}(f)$ and $[x_j, x_{j+1}]$ for $j \in \{1, \dots, n-1\}$ if $n > 1$ are all affine, i.e. the restriction of f on each segment mentioned above satisfies $f(px + (1-p)y) = pf(x) + (1-p)f(y)$ for all $p \in [0, 1]$ and x, y belonging to the segment.
- (ii) If $(-\infty, x_1) \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$, then $(-\infty, x_1) \cap \text{dom}(f)$ is a non-degenerate open interval in the real line.
- (iii) If $(x_n, +\infty) \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$, then $(x_n, +\infty) \cap \text{dom}(f)$ is a non-degenerate open interval in the real line.
- (iv) For all x_j with $j \in \{2, \dots, n-1\}$: $\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \neq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$.
- (v) If $x_1 - h \in \text{dom}(X)$ for some $h > 0$, then $\frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h} \neq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
- (vi) If $x_n + h \in \text{dom}(X)$ for some $h > 0$, then $\frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h} \neq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$.

In this case we say that f is a **real-valued finitely generated PL function generated by** $\{x_j \mid j = 1, \dots, n\}$.

Let f be “a real valued finitely generated” PL function generated by $\{x_j \mid j = 1, \dots, n\}$. Let $x \in \text{dom}(f)$. For all $j \in \{1, \dots, n-1\}$: (i) For all $x \in [x_1, x_n] \cap [x_j, x_{j+1})$, let $D^+f(x) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}$; and (ii) For all $x \in (x_1, x_n] \cap (x_j, x_{j+1}]$, let $Df(x) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}$. Thus $D^+f(x_j) = Df(x_{j+1})$ for all $j \in \{1, \dots, n-1\}$.

If $(-\infty, x_1) \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$, then let $Df(x_1) = Df(x) = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = D^+f(x)$ for all $x \in (-\infty, x_1) \cap \text{dom}(f)$.

If $(x_n, +\infty) \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$, then let $D^+f(x_n) = D^+f(x) = \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} = D^+f(x)$ for all $x \in (x_n, +\infty) \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$.

Clearly, for all $x \in \text{dom}(f) \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, $D^+f(x) = Df(x)$ and for all x_i satisfying $(-\infty, x_i) \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$ and $\text{dom}(f) \cap (x_i, +\infty) \neq \emptyset$, it is the case that $D^+f(x_i) \neq Df(x_i)$.

Given $\alpha \in [0, 1]$ and $x \in \text{dom}(f)$ such that $(-\infty, x) \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$ and $(x, +\infty) \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$, let the **α -first derivative** of f at x , denoted $D^{(\alpha)}f(x) = \alpha D^+f(x) + (1-\alpha)Df(x)$ and the **second derivative** of f at x denoted $D^2f(x) = D^+f(x) - D^-f(x)$.

Note the difference between (α) in the definition of $D^{(\alpha)}f(x)$ and the positive integer 2, written without any brackets in $D^2f(x)$. Also note that given $\alpha \in [0, 1]$ and $x \in \text{dom}(f)$ such that $(-\infty, x) \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$ and $(x, +\infty) \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$, $D^{(\alpha)}f(x) = Df(x) + \alpha D^2f(x)$.

Thus, $\{x \in \text{dom}(f) \mid D^2f(x) \neq 0\} = \{x_i \mid (-\infty, x_i) \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset \text{ and } \text{dom}(f) \cap (x_i, +\infty) \neq \emptyset\}$
 Given any real valued finitely generated PL f , any $x \in \text{dom}(f)$ such that $Df(x)$ is well-defined, and $m \in [\min\{D^+f(x), Df(x)\}, \max\{D^+f(x), Df(x)\}]$, the straight-line

$z = my + [f(x) - mx]$ is said to be a **tangent to f at x** , with the **slope of the tangent to f at x** being ' m '.

Note: Given a PWL function $f, x \in \text{dom}(f)$ is said to be a **local maximum** of f if there exists $\varepsilon > 0$ such that $f(x) \geq f(y)$ for all $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \text{dom}(f)$ and a **local minimum** of f if there exists $\varepsilon > 0$ such that $f(x) \leq f(y)$ for all $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \text{dom}(f)$. It is easily verified that $x \in \text{dom}(f)$ is a local maximum of f if and only if the following two conditions are satisfied: (i) If $(x, +\infty) \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$, then $D^+f(x) \leq 0$; and (ii) If $(-\infty, x) \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$, then $D^-f(x) \geq 0$.

The calculus discussed above can be easily extended to the multi-variable case.

For a positive integer $n \geq 2$, let $N = \{1, 2, \dots, n\}$ and for any non-empty subset J of N and any non-empty set Y , let Y^J denote the set of functions from J to Y , where that for all $y \in Y^J$ and $j \in J$, $y(j)$ is written as y_j .

For each $j \in \{1, \dots, n\}$, $y \in \mathbb{R}^N$ and $\xi \in \mathbb{R}$, let (y_{-j}, ξ) denote $x \in \mathbb{R}^N$ such that $x_i = y_i$ for $i \neq j$ and $x_j = \xi$.

Let f be a real-valued function f whose domain denoted $\text{dom}(f)$ is a non-empty subset of \mathbb{R}^N .

For each j and $y \in \mathbb{R}^N$, let $\text{dom}^j(f|_{y_{-j}}) = \{\xi \in \mathbb{R} \mid (y_{-j}, \xi) \in \text{dom}(f)\}$, and if $\text{dom}^j(f|_{y_{-j}}) \neq \emptyset$, let $f^{(j)}(\cdot|_{y_{-j}})$ be the real valued function defined on $\text{dom}^j(f|_{y_{-j}}) = \text{dom}(f^{(j)}(\cdot|_{y_{-j}}))$ such that for every $\xi \in \text{dom}(f^{(j)}(\cdot|_{y_{-j}}))$, $f^{(j)}(\xi|_{y_{-j}}) = f(y_{-j}, \xi)$.

We are interested in the case where $\text{dom}(f^{(j)}(\cdot|_{y_{-j}}))$ is the union of a finite set of mutually disjoint non-degenerate intervals of \mathbb{R} , $\{I_1, \dots, I_K\}$.

Suppose that the restriction of $f^{(j)}(\cdot|_{y_{-j}})$ to I_k for some $k \in \{1, \dots, K\}$ is a real valued finitely generated PL function and suppose $\xi \in I_k$. To keep notations simple we will use $f^{(j)}(\cdot|_{y_{-j}})$ to denote its restriction to I_k .

If $I_k \cap (\xi, +\infty) \neq \emptyset$, then let $D_j^+ f(y_{-j}, \xi) = D^+ f^{(j)}(\xi|_{y_{-j}})$.

If $I_k \cap (-\infty, \xi) \neq \emptyset$, then let $D_j^- f(y_{-j}, \xi) = D^- f^{(j)}(\xi|_{y_{-j}})$.

If both $I_k \cap (\xi, +\infty) \neq \emptyset$ and $I_k \cap (-\infty, \xi) \neq \emptyset$, then for $\alpha \in [0, 1]$ let $D_j^{(\alpha)} f(y_{-j}, \xi) =$

$\alpha D_j^+ f(y_{-j}, \xi) + (1 - \alpha) D_j^- f(y_{-j}, \xi)$ and $D_j^2 f(y_{-j}, \xi) = D_j^+ f(y_{-j}, \xi) - D_j^- f(y_{-j}, \xi)$.

Such functions may be referred to as **multi-piecewise linear (M-PL) functions**.

$D_j^{(\alpha)} f(y_{-j}, \xi)$ may be called the **j^{th} partial α -derivative of f at (y_{-j}, ξ)** and $D_j^2 f(y_{-j}, \xi)$ may be called the **j^{th} partial second derivative of f at (y_{-j}, ξ)** .

CONCAVE AND CONVEX FUNCTIONS

A PL function f generated by $\{x_1, \dots, x_n\}$ on $\text{dom}(f) = [x_1, x_n]$ is said to be **concave** if for all $x, y \in \text{dom}(X)$ satisfying $x < x_i < y$ for some $i \in \{2, \dots, n-1\}$ and $t \in (0, 1)$, $f(x + t(y-x)) > f(x) + t[f(y)-f(x)]$.

A PL function f generated by $\{x_1, \dots, x_n\}$ on $\text{dom}(f) = [x_1, x_n]$ is said to be **convex** if for all $x, y \in \text{dom}(X)$ satisfying $x < x_i < y$ for some $i \in \{2, \dots, n-1\}$ and $t \in (0, 1)$, $f(x + t(y-x)) < f(x) + t[f(y)-f(x)]$.

It is easy to see that f is concave if and only if $-f$ is convex.

Proposition 1:

Suppose f is a PL function generated by $\{x_1, \dots, x_n\}$ on $\text{dom}(f) = [x_1, x_n]$.

- (i) $[D^2f(x_j) < 0$ for all $j \in \{2, \dots, n-1\}$] if and only if f is concave.
(ii) $[D^2f(x_j) > 0$ for all $j \in \{2, \dots, n-1\}$] if and only if f is convex.

Proof:

(i) Suppose $D^2f(x_j) < 0$ for all $j \in \{2, \dots, n-1\}$.

Let $x, y \in \text{dom}(f)$ with $x < x_j < y$ for some x_j . Let $x \in [\beta_k, \beta_{k+1}]$, $y \in [\beta_h, \beta_{h+1}]$. Since $x < x_j < y$, it must be the case that $\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k} \neq \frac{f(x_{h+1})-f(x_h)}{x_{h+1}-x_h}$ which along with $D^2f(x_j) < 0$ for all $j \in \{2, \dots, n-1\}$ and $x < y$ implies $k < h$ and $\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k} \neq \frac{f(x_{h+1})-f(x_h)}{x_{h+1}-x_h}$

For $t \in (0, 1)$, consider the point $(x + t(y-x), 0)$ on the horizontal axis. The vertical line on $(x + t(y-x), 0)$ meets the chord joining $(x, u(x))$ and $(y, u(y))$ at the point $(x + t(y-x), u(x) + t(u(y)-u(x)))$. This follows immediately by applying the relevant property of similar triangles.

If $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$ then since $\frac{f(x_{g+1})-f(x_g)}{x_{g+1}-x_g}$ is a strictly decreasing function

of 'g', then $f(y) = f(x) + \frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}(x_{k+1}-x) + \dots + \frac{f(x_{h+1})-f(x_h)}{x_{h+1}-x_h}(y-x_h)$ along with

$\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k} > \frac{f(x_{h+1})-f(x_h)}{x_{h+1}-x_h}$ implies

$f(y) < f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}[(x_{k+1}-x) + \dots + (y-x_h)] = f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(y-x) = f(y)$, i.e.,

$f(y) < f(y)$, which is not possible. Thus, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$.

On the other hand, if $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(x_{h+1})-f(x_h)}{x_{h+1}-x_h}$, then $-\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq -\frac{f(x_{h+1})-f(x_h)}{x_{h+1}-x_h}$.

Thus, $f(x) = f(y) - \frac{f(x_{h+1})-f(x_h)}{x_{h+1}-x_h}(y-x_h) - \dots - \frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}(x_{k+1}-x)$ along with -

$\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k} < -\frac{f(x_{h+1})-f(x_h)}{x_{h+1}-x_h}$ implies

$f(x) < f(y) - \frac{f(y)-f(x)}{y-x}[(y-x_h) + \dots + (x_{k+1} - x)] = f(y) - \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(y-x) = f(x)$, i.e. $f(x) < f(x)$ which is not possible.

Thus, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > \frac{f(x_{h+1})-f(x_h)}{x_{h+1}-x_h}$. Thus, $\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k} > \frac{f(y)-f(x)}{y-x} > \frac{f(x_{h+1})-f(x_h)}{x_{h+1}-x_h}$.

Thus, for $x + t(y-x) \in (x_k, x_{k+1}]$, $f(x+t(y-x)) = f(x) + t \frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}(y-x) > f(x) + t \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(y-x) = f(x) + t(f(y)-f(x))$.

Suppose $h = k + 1$. Then since $x < x_j < y$ for some x_j , it must be the case that $y > x_h$. Suppose $x_{h+1} \geq y > x_h$. For $x + t(y-x) \in (x_k, x_{k+1}]$ we already have $f(x+t(y-x)) > f(x) + t(f(y)-f(x))$. Hence suppose $x_{h+1} > x+t(y-x) > x_h$. Thus, $x_h = x + s(y-x)$ for some $s \in (0, t)$.

Consider the function $\xi \mapsto f(x) + \xi(f(y)-f(x))$ and the function, $\xi \mapsto f(x + \xi(y-x)) = f(x_h) + \frac{f(x_{h+1})-f(x_h)}{x_{h+1}-x_h}(\xi-s)(y-x)$ for $\xi \in [s, 1]$.

The latter holds since $x + \xi(y-x) - x_h = [x + \xi(y-x)] - [x + s(y-x)] = (\xi-s)(y-x)$.

Both are affine functions of ξ , with $f(x + s(y-x)) = f(x_h) > f(x) + s(f(y)-f(x))$.

Thus at $\xi = 1$, the two affine functions attain the same values $f(y)$.

Now, consider the function $\xi \mapsto f(x + \xi(y-x)) - [f(x) + \xi(f(y)-f(x))]$ for $\xi \in [s, 1]$.

Since it is the difference of two affine functions, it must be affine.

At $\xi = s$, the value of the function is positive and at $\xi = 1$, the value of the function is zero. Hence for $t \in [s, 1)$, the value of the affine function must be positive, i.e., $f(x + t(y-x)) > f(x) + t(f(y)-f(x))$ for $t \in [s, 1)$.

Thus, if $h = k+1$, then $f(x + t(y-x)) > f(x) + t(f(y)-f(x))$ for $t \in (0, 1)$.

Suppose that $f(x + t(y-x)) > f(x) + t(f(y)-f(x))$ for $t \in (0, 1)$ if $h \in \{k+1, \dots, k+j\}$ and now suppose $h = k+j+1$. Thus, $y \in (x_{k+j+1}, x_{k+j+2}]$.

By the induction hypothesis, $f(x + t(x_{k+j+1}-x)) > f(x) + t(f(x_{k+j+1})-f(x))$ for $t \in (0, 1)$, i.e., $f(x + t(x_h-x)) > f(x) + t(f(x_h)-f(x))$ for $t \in (0, 1)$.

$y > x_h$ implies $x_h = x + s(y-x)$ for some $s \in (0, 1)$.

Thus, $x + ts(y-x) = (1-t)x + t[x + s(y-x)] = (1-t)x + tx_h = x + t(x_h-x)$ for all $t \in [0, 1]$.

Thus, $f(x + st(y-x)) > f(x) + t(f(x_h)-f(x))$ for $t \in (0, 1)$.

Towards a contradiction suppose $f(x_h) \leq f(x) + s(f(y)-f(x))$.

Now $f(y) = f(x_h) + \frac{f(x_{h+1})-f(x_h)}{x_{h+1}-x_h}(y-x_h)$ and at the same time

$$f(y) = [f(x) + s(f(y)-f(x))] + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(y-x_h) \geq f(x_h) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(y-x_h).$$

Since $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > \frac{f(x_{h+1})-f(x_h)}{x_{h+1}-x_h}$, we get $f(y) \geq f(x_h) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(y-x_h) > f(x_h) + \frac{f(x_{h+1})-f(x_h)}{x_{h+1}-x_h}(y-x_h) = f(y)$, i.e., $f(y) > f(y)$, which is not possible.

Thus, it must be the case that $f(x_h) > f(x) + s(f(y)-f(x))$, i.e., $f(x_h)-f(x) > s(f(y)-f(x))$.

Thus, applying the induction hypothesis, we get

$$f(x + st(y-x)) = f(x + t(x_h-x)) > f(x) + t(f(x_h)-f(x)) > f(x) + ts(f(y)-f(x)) \text{ for all } t \in (0,1].$$

Thus, $f(x + t(y-x)) > f(x) + t(f(y)-f(x))$ for all $t \in (0,s]$.

Consider the functions $t \mapsto [f(x + t(y-x))] - [f(x) + t(f(y)-f(x))]$ for all $t \in [s, 1]$.

$$f(x + t(y-x)) = f(x_h) + \left[\frac{f(x_{h+1})-f(x_h)}{x_{h+1}-x_h} \right] (t-s)(y-x) \text{ for all } t \in [s, 1].$$

$$[f(x + t(y-x))] - [f(x) + t(f(y)-f(x))] = f(\beta_h) + \left[\frac{f(x_{h+1})-f(x_h)}{x_{h+1}-x_h} \right] (t-s)(y-x) - [f(x) + t(f(y)-f(x))]$$

for all $t \in [s, 1]$.

Thus, $t \mapsto f(x + t(y-x)) - [f(x) + t(f(y)-f(x))]$ for all $t \in [s, 1]$ is an affine function.

At $t = s$, the value of the function is $f(x_h) - [f(x) + s(f(y)-f(x))] > 0$ and at $t = 1$, the value of the function is 0.

Thus, $[f(x + t(y-x))] - [f(x) + t(f(y)-f(x))] > 0$ for all $t \in [s, 1]$.

Combined with what we obtained earlier we get $f(x + t(y-x)) > f(x) + t(f(y)-f(x))$ for all $t \in (0, 1)$.

Now, suppose f is concave. Towards a contradiction suppose $D^2f(x_j) > 0$ for some

$j \in \{2, \dots, n-1\}$. Thus $D^+f(x_j) > Df(x_j)$. Thus, $\frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{x_{j+1}-x_j} > \frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{x_j-x_{j-1}}$.

Hence $(x_j-x_{j-1})f(x_{j+1}) + (x_{j+1}-x_j)f(x_{j-1}) > (x_{j+1}-x_{j-1})f(x_j)$.

Thus $\frac{x_j-x_{j-1}}{x_{j+1}-x_{j-1}}f(x_{j+1}) + \frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+1}-x_{j-1}}f(x_{j-1}) > f(x_j) = f\left(\frac{x_j-x_{j-1}}{x_{j+1}-x_{j-1}}x_{j+1} + \frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+1}-x_{j-1}}x_{j-1}\right) = f(x_{j-1} + \frac{x_j-x_{j-1}}{x_{j+1}-x_{j-1}}(x_{j+1}-x_{j-1}))$, since $x_j = \frac{x_j-x_{j-1}}{x_{j+1}-x_{j-1}}x_{j+1} + \frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+1}-x_{j-1}}x_{j-1} = x_{j-1} + \frac{x_j-x_{j-1}}{x_{j+1}-x_{j-1}}(x_{j+1}-x_{j-1})$.

Further, $0 < \frac{x_j-x_{j-1}}{x_{j+1}-x_{j-1}} < 1$.

This contradicts f is concave and proves that $D^2f(x_j) < 0$ for all $j \in \{2, \dots, n-1\}$.

(ii) Follows from (i) and the fact that f is convex if and only if $-f$ is concave. Q.E.D.

Note: With the algebraic proof of Proposition 1 being as noted above, now the following alternative proof of Proposition 1 is equally valid:

Proof: Draw a diagram. Q.E.D.

Applications of the theory discussed in this and the previous section, may be the computation of risk-aversion at initial wealth for utility functions which display ‘‘loss aversion’’ which is discussed in the next section.

RISK AND LOSS AVERSIONS FOR MONETARY GAINS

The “conjectures” discussed in the previous section may be applied to problems associated with measuring risk aversion for piecewise linear functions of the type discussed in page 224 (the fourth section of Chapter 13) of the work by Eeckhoudt, Gollier and Schlesinger cited earlier in this paper. Absolute risk aversion- as defined in [de Finetti 1952], [Arrow 1962] and [Pratt 1963]- is the rate of “percentage change in marginal utility of gains”, with respect to “change in wealth”. Relative risk aversion is the rate of “percentage change in marginal utility of gains”, with respect to “percentage change in wealth”.

In this case the utility function we are concerned with is a piece-wise linear, real valued and concave function u with $0 \in \text{int}(\text{dom}(u))$, $u(x) = ax$ for all $x \in \text{dom}(u)$ with $x \geq 0$ and $u(x) = bx$ for all $x \in \text{dom}(u)$ with $x < 0$, where $b > a > 0$. Clearly u is concave and further it is non-differentiable at 0 .

Thus, $D^+u(0) = a > 0$, $D^-u(0) = b > 0$, $D^2u(x) = a-b < 0$ and for $\alpha \in [0,1]$, the α -first derivative of f at 0 , $Du^{(\alpha)}(0) = \alpha a + (1-\alpha)b > 0$.

For $\alpha \in [0,1]$, the α -**absolute risk aversion** at $x = 0$ is given by $\frac{b-a}{\alpha a + (1-\alpha)b}$ and the α -**relative risk aversion** for initial wealth ‘ w ’ is given by $w \frac{b-a}{\alpha a + (1-\alpha)b}$.

We may refer to $\frac{D^-u(0)}{D^+u(0)}$ (which in this case is $\frac{b}{a}$) as the “**co-efficient of loss-aversion at initial wealth**”. Thus, for $\alpha \in [0,1]$, the α -absolute risk aversion at $x = 0$ is $\frac{\frac{b}{a}-1}{\alpha + (1-\alpha)\frac{b}{a}}$ and the α -relative risk aversion for initial wealth ‘ w ’ is $w \frac{\frac{b}{a}-1}{\alpha + (1-\alpha)\frac{b}{a}}$.

For $\alpha = 1$, the 1- absolute risk aversion at $x = 0$ is $\frac{b}{a} - 1$ which increases as $\frac{b}{a}$ increases.

For $\alpha = 0$, the 0- absolute risk aversion at $x = 0$ is $1 - \frac{1}{\frac{b}{a}}$ which increases as $\frac{b}{a}$ increases.

For $\alpha \in (0,1)$, consider the function $x \mapsto \frac{x-1}{\alpha + (1-\alpha)x}$ whose domain is the set of strictly positive real numbers.

$\frac{\alpha + (1-\alpha)x}{x-1} = \frac{-\alpha(x-1)+x}{x-1} = -\alpha + \frac{x}{x-1} = -\alpha + \frac{x-1+1}{x-1} = -\alpha + 1 + \frac{1}{x-1}$ decreases as x increases. Thus, the function $x \mapsto \frac{x-1}{\alpha + (1-\alpha)x}$ increases as x increases. Thus, for α

$\in (0,1)$, the α - absolute risk aversion at $x = 0$ is $\frac{\frac{b}{a}-1}{\alpha + (1-\alpha)\frac{b}{a}}$ which increases as $\frac{b}{a}$ increases.

It might seem strange that for the same utility function a wealthy person has higher

“relative risk aversion” than a less wealthy person. However, it is very unlikely for a wealthy person to have the same utility function that a less wealthy person has. For one, the wealthy individual is likely to have a lower value for the coefficient of loss-aversion at initial wealth, than a less wealthy individual, thereby reducing absolute risk aversion and possibly relative risk aversion for the former.

SUMMARY

In this paper we propose and discuss a kind of calculus for piecewise linear functions, that cannot be generalized to a wider class of functions- in particular functions which are differentiable. There is a very wide scope for applying such a calculus in economics and we choose just one example- measurement of risk aversions for monetary gains and losses- to show how it may be applied. It may be worth noting that Ross in [Ross 1981] has questioned the validity of absolute risk aversion as a “good enough” measure of attitude towards risk. Ross suggests that willingness to pay a higher risk premium for the same amount of loss, indicates greater risk aversion. In order to incorporate risk premiums in our analysis the utility function invoked in the previous section would have to be slightly modified by including at least one more point where the second derivative of the utility function is negative and this point would have to correspond to a loss of monetary wealth. Typically, an individual with a lower second derivative- hence greater absolute value of the second derivative, since the second derivative is negative- would be the one who would be willing to pay a higher risk premium if the “accidental loss” exceeded the loss where the second derivative is negative, and such an individual would be the one who is more risk averse in the sense of Ross.

The framework and the mathematical technology of our discussion is within the subject area known as finite mathematics in the tradition of Kemeny, Snell and Thomson [Kemeny, Snell and Thomson 1957]. Finite mathematics is the mathematics (e.g., real analysis, matrix algebra and analysis, probability theory etc.) that is based on just the “ordered field” property (axiom) of the real number system but not “the least upper bound” property (axiom) of the real number system. The least upper bound property says that “every non-empty subset of real numbers that is bounded above has a least upper bound”. That does not prevent us from defining the least upper bound of a non-empty subset of real numbers that is bounded above and explicitly showing that one exists, if that were possible. For instance, the statement “1 is the least upper bound of the closed interval $[0,1]$ ” is permissible in finite mathematics, since 1 is an upper bound of $[0,1]$ and given any rational number $\varepsilon > 0$ (i.e., a positive real number that can be expressed as the ratio of two positive integers), we can always find a real/rational number, say $\max\{\frac{1}{2}, 1-\frac{\varepsilon}{2}\}$ that belongs to $[0,1]$ and is greater than $1-\varepsilon$. However, since the proof of the Archimedean property of the real number system, requires the least upper bound property, the

Archimedean property or any of its consequences, is not admissible in finite mathematics.

Note: This paper is a revised and considerably expanded version of an earlier note by the author entitled: Two observations on “Economic and Financial Decision Under Risk” by Eeckhoudt, Gollier and Schlesinger (2005) that is available at: <https://drive.google.com/file/d/1-UnmzHX16xorCQ9sqzTpyMtijOTdl5Qn/view>.



ACKNOWLEDGMENT

Many thanks to Itzhak Gilboa and Utteyo Dasgupta for their comments. “Thanks a lot” to Christian Gollier for pointing out that “decreasing/increasing nature of RRA is an empirical issue which is still debated in the literature”. I also wish to thank Felix Lev for drawing my attention to the use of “ ∞ ” (i.e., infinity) in what is intended to be an investigation in finite mathematics. I want to assure him that the use of $(x, +\infty)$, $[x, +\infty)$, $(-\infty, x)$ and $(-\infty, x]$ for $\{y \in \mathbb{R} \mid y > x\}$, $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq x\}$, $\{y \in \mathbb{R} \mid y < x\}$ and $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq x\}$ is purely “short hand” and economizes on word processing. We do not make any non-trivial use of “ ∞ ” and restrict its use for commonly understood notational purposes. For the sake of clarity, I have explained our understanding of “finite mathematics” in a concluding section of this paper. In addition I would like to thank Ishan (Mistry) for much help in getting this paper formatted-the way it should be. Finally-as is customary- I would like to thank two anonymous referees of this journal for their comments, one of whom deserves special thanks and a deep intellectual gratitude for very constructive comments, suggestions and for drawing my attention to [de Finetti 1952] and [Ross 1981]. Responsibility for errors and misconceptions that remain, rest entirely with me.

REFERENCES

- Arrow K. J. (1963) Liquidity preference. Lecture VI [in] Lecture Notes for Economics, 285, The Economics of Uncertainty, 33-53, Stanford University.
- Eeckhoudt L., Gollier C., Schlesinger H. (2005) Economic and Financial Decisions Under Risk. Princeton University Press, NJ.
- de Finetti B. (1952) Sulla preferibilita. Giornale Degli Economisti E Annali Di Economia, 11, 685-709.
- Kemeny J. G., Snell J. L., Thompson G. L. (1957) Introduction to Finite Mathematics (Third Edition, 1974). Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.
- Pratt J. (1964) Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica*, 32(1/2), 122-136.
- Ross S. A. (1981) Some Stronger Measures of Risk Aversion in the Small and in the Large with Applications. *Econometrica*, 49(3), 621-638.
- Stanley W. D. (2004) Technical Analysis and Applications With Matlab. Cengage Learning.

PORÓWNANIE ROZWOJU SPOŁECZNO-GOSPODARCZEGO KRAJÓW AFRYKI

Krzysztof Kompa  <https://orcid.org/0000-0002-2810-6654>
Dorota Witkowska  <https://orcid.org/0000-0001-9538-9589>
Industrial Psychology & People Management
College of Business & Economics
University of Johannesburg, Johannesburg, South Africa
e-mail: kkompa@uj.ac.za; mariaw@uj.ac.za

Streszczenie: Rozwój społeczno-gospodarczy jest procesem złożonym, który należy rozpatrywać wielowymiarowo. Jednak wskaźniki szacowane przez ONZ mają charakter globalny i nie są dostatecznie czułe dla porównań regionalnych. Celem pracy jest skonstruowanie miar rozwoju społeczno-gospodarczego dla krajów Afryki, weryfikacja ich stosowalności oraz badanie ich wrażliwości na zmiany wag opisujących wpływ wybranych aspektów rozwoju społecznego i gospodarczego. Wykorzystano odległości taksonomiczne oraz zmienne opisujące 8 różnych kategorii jakości życia i poziomu rozwoju. Kraje pogrupowano w jednorodne klasy. Potwierdzono stosowalność proponowanego podejścia przez porównanie z innymi miarami konstruowanymi dla Afryki.

Słowa kluczowe: badania porównawcze, syntetyczne miary rozwoju, dystans taksonomiczny, kraje afrykańskie

JEL classification: C43, D63, O55

WSTĘP

Rozwój społeczno-gospodarczy i jego badanie to kluczowe zagadnienia dla gospodarek w każdej skali - globu, kontynentów, regionów czy państw, ich jednostek administracyjnych i związków. I choć w badaniach nad przemianami w gospodarce na pierwszy plan wysuwają się aspekty ekonomiczne, to nie można ich odizolować od aspektów społecznych i wzajemnie przyczynowej roli tych czynników. Dlatego rozwój społeczno-gospodarczy nie może być opisany przez jedną cechę i wymaga rozpatrywania jako zagadnienie wielowymiarowe. Dobrym

<https://doi.org/10.22630/MIBE.2022.23.1.2>

przykładem takiego podejścia jest Human Development Index (HDI), obliczany przez ONZ i szeroko stosowany¹. Agreguje trzy komponenty rozwoju: długość życia w zdrowiu, edukację oraz godny poziom życia [Roser 2014]. Wskaźniki globalne cechuje jednak, ze względu na szeroki zakres krajów branych pod uwagę, ograniczona przydatność do zastosowań regionalnych – nie są wystarczająco czułe, aby wskazać różnice pomiędzy analizowanymi obiektami.

Afryka to drugi co do wielkości (30 mln km²) i liczby ludności (1,3 mld ludzi) kontynent, składający się z 54 suwerennych państw. Ludność Afryki jest najmłodsza wśród ludności wszystkich kontynentów - mediana wieku minimalnego wynosi 15,2, a maksymalnego 37,5 lat. Pod względem rozwoju społeczno-gospodarczego, mierzonego wskaźnikiem HDI w skali globalnej, tylko jedno państwo afrykańskie (Mauritius) jest uznawane za państwo o bardzo wysokim rozwoju, 8 krajów zalicza się do klasy wysokiego rozwoju, 14 – do klasy średniego rozwoju, a reszta (tj. 31 państw) jest uznawana za kraje o rozwoju niskim. Powstaje pytanie, czy taka klasyfikacja dobrze oddaje relacje między państwami afrykańskimi w zakresie rozwoju społeczno-gospodarczego.

Celem artykułu jest zatem (1) skonstruowanie syntetycznych mierników rozwoju społeczno-gospodarczego adresowanych do krajów afrykańskich, (2) weryfikacja ich stosowalności poprzez porównywanie rankingów otrzymanych z ich wykorzystaniem z klasyfikacjami otrzymywanymi w inny sposób oraz (3) badanie wrażliwości tych miar na zmiany wag opisujących siłę wpływu wybranych aspektów rozwoju społecznego i gospodarczego.

W badaniach wykorzystuje się miary oparte na odległości taksonomicznej, a wybór krajów i uwzględnionych cech objaśniających ograniczony został do roku 2019, ostatniego roku przed pandemią.

PORÓWNYWANIE POZIOMU ROZWOJU KRAJÓW AFRYKI

Porównania z wykorzystaniem indyktorów Dochodu Narodowego i HDI

Poziomu życia w różnych krajach nie da się zmierzyć i porównać bezpośrednio. Dlatego zamiennie stosuje się dostępne indykatory rozwoju, zazwyczaj Produkt Krajowy Brutto per capita, czy Dochód Narodowy Brutto per capita, dalej oznaczany jako (DNB). Te *par excellence* ekonomiczne wskaźniki nie obejmują czynników z dziedziny dobrostanu społecznego, takich jak zdrowie i jego ochrona, środowisko i zrównoważony rozwój, edukacja, prawa człowieka, bezpieczeństwo, równość, pozycja kobiet w społeczeństwie itp. Sięga się więc po bardziej zaawansowane miary, np. HDI, które dodatkowo obejmują niektóre aspekty społeczne.

¹ United Nations Development Programme podaje również inne wskaźniki wielowymiarowe, np. Multidimensional Poverty Index (MPI), Inequality-adjusted Human Development Index (IHDI), Gender Inequality Index (GII), czy Gender Development Index (GDI) [Composite Indices 2022]

Porównując kraje afrykańskie za pomocą DNB i HDI, pogrupowano je wg formuły (1) w jednorodnie klasy (klastry) z wykorzystaniem obu miar [Kompa, Witkowska 2009]:

Klasa	Poziom rozwoju	Reguła klasyfikacji
I	bardzo wysoki	$MR_{it} \geq \overline{MR}_t + S_{MRt}$
II	wysoki	$\overline{MR}_t + S_{MRt} > MR_{it} \geq \overline{MR}_t$
III	średni	$\overline{MR}_t > MR_{it} \geq \overline{MR}_t - S_{MRt}$
IV	niski	$\overline{MR}_t - S_{MRt} > MR_{it}$

(1)

gdzie $i=1, 2, \dots, N$, N oznacza liczbę porównywanych krajów, MR_{it} oznacza odpowiednio DNB lub HDI i -tego kraju w t -tym roku, natomiast \overline{MR}_t oraz S_{MRt} – średnią wartość i odchylenie standardowe miar rozwoju dla wszystkich krajów, tj.:

$$\overline{MR}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N MR_{it} \quad S_{MRt} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (MR_{it} - \overline{MR}_t)^2} \quad (2)$$

Tabela 1. Klasyfikacja krajów Afryki wg indyktorów DNB i HDI oraz reguł (1) i (2)

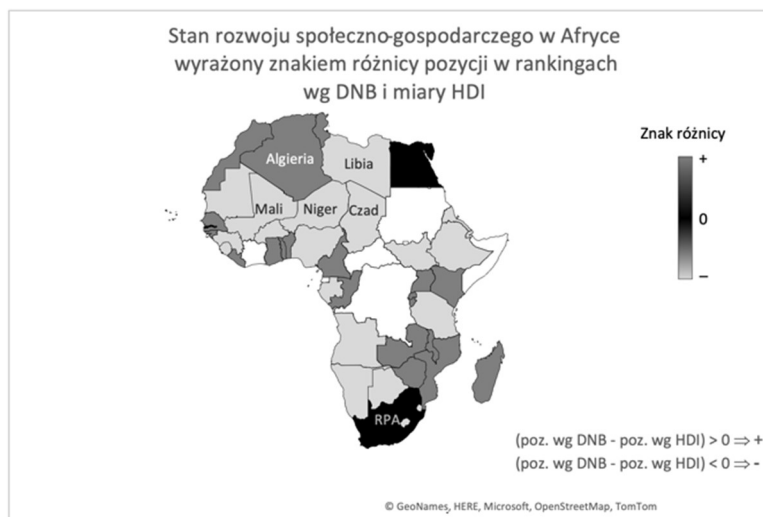
Klasa	Klasyfikacja
I	Algieria (3;6), Botswana (5;-2), Egipt (8;0), Gabon (9;-3), Libia (6;-2), Maroko (10;3), Mauritius (1;1), RPA (7;0), Seszele (2;-9), Tunezja (4;10)
II	Angola (19; -4), Cabo Verde (11;3), Eswatini (14; -2), Ghana (15;2), Gwinea Równ. (17;-12), Kamerun (22;2), Kenia (16;5), Kongo-Brazzaville (20;10), Namibia (12;-1), Wyspy Św. Tomasza i Książęca (13;-10), Zambia (18;7), Zimbabwe (21;11),
III	Benin (25;2), Dżibuti (33;-17), Erytrea (44;-13), Etiopia (38;-2), Gambia (37;0), Gwinea (43;-9), Gwinea Bissau (41;1), Komory (23;6), Kongo-Kinsza (40;10), Lesoto (32;-4), Liberia (42;5), Madagaskar (31;14), Malawi (39;12), Mauretania (24;-6), Mozambik (45;3), Nigeria (28;-8), Rwanda (27;11), Senegal (35;9), Sudan (36;-4), Tanzania (30;-9), Togo (34;3), Wybrzeże Kości Słoniowej (29;14)
IV	Burkina Faso (46;-7), Burundi (49;4), Czad (51;-5), Mali (48;-13), Niger (53;-4), Republika Środkowoafrykańska (52;0), Sierra Leone (47;-1), Sudan Południowy (50;-13)

Uwaga: w nawiasie po nazwie kraju podano miejsce w rankingu wg indeksu HDI oraz różnicę pomiędzy rankingami wg DNB i HDI, tj. pozycja (wg DNB) – pozycja (wg HDI);

Źródło: opracowanie własne

Wyniki przetwarzania danych źródłowych [Comopsit Indices 2022] zgodnie z wzorami (1) i (2) zestawiono w tabeli 1 i na rysunku 1. Wnioskujemy, że ocena poziomu życia w krajach Afryki silnie zależy od zastosowanej miary, a dyspersja klasyfikacji jest duża i zasadniczo różna dla obu miar.

Rysunek 1. Rozwój społeczno-gospodarczy krajów Afryki – luka mierzona znakiem różnicy w ratingach wg DNB i HDI



Uwaga: na białą oznaczono kraje pominięte w klasyfikacji

Źródło: opracowanie własne

Tabela 1 zawiera rankingi państw afrykańskich według HDI i DNB w 2019 roku, przy czym pozycjonowanie wg dochodu narodowego jest przedstawione jako różnica pozycji obu klasyfikacji. Pierwsze miejsce oznacza pozycję najlepszą. W pierwszej klasie znajduje się 10 państw, a dziewięć z nich jest uznawanych za kraje bardzo wysoko rozwinięte według obu miar. Jedynie Maroko i Gwinea Równikowa są zaliczane do tej klasy tylko przez jedną miarę. W drugiej klasie znajduje się 12 państw według HDI i tylko 6 z nich ze względu na DNB, przy czym Angola, Cabo Verde, Eswatini i Namibia są klasyfikowane tutaj według obu miar. Cztery kraje tj. Egipt, Gambia i Republika Środkowoafrykańska, i RPA utrzymują tę samą pozycję w obu rankingach. Największe różnice w pozycjach obserwuje się *in plus* dla Dżibuti (17 pozycji), dla Erytrei, Mali i Sudanu (13 miejsc) oraz *in minus* dla Madagaskaru i Ugandy –14 miejsc.

Analiza pozycjonowania prowadzi również do użytecznego aplikacyjnie wniosku, że kraje o dodatniej luce klasyfikacyjnej rozwijają się szybciej pod względem gospodarczym niż społeczno-gospodarczym i odwrotnie.

Taksonomiczna miara syntetyczna do porównań krajów Afryki

Wskaźniki społeczno-ekonomiczne powinny obejmować wiele dziedzin życia. Wśród nich wymienia się zwykle: nierówności społeczne, zatrudnienie, dochody i konsumpcję, środowisko naturalne, zdrowie, edukację, bezpieczeństwo publiczne i przestępczość, partycypację społeczną i polityczną itp. Proces wyboru zestawu wskaźników dla każdej z tych dziedzin życia jest szeroko dyskutowany

(por. [Avdiushchenko, Zając 2019; Kompa, Witkowska 2009; 2021; Khan 1991; Nermend 2010; Noll 2014; Mo Ibrahim Foundation 2019; Udjo et al 2000]).

W naszych badaniach uwzględniamy (por. tabela 2): jakość życia (10 zmiennych), zdrowie i środowisko (6 zmiennych), wykształcenie (4 zmienne) oraz rozwój gospodarczy (8 zmiennych), a syntetyczną miarę rozwoju SMR_i budujemy wg koncepcji Hellwiga (1968), którą dla i -tego kraju ($i \in [1, N]$), opisanego K charakterystykami ($j \in [1, K]$) definiujemy [Kompa, Witkowska 2009] jako:

$$SMR_i = 1 - \frac{q_i}{\max\{q_i\}}; \quad \text{gdzie } q_i = \sqrt{\sum_{j=1}^K v_j (z_j^i - z_j^0)^2} \quad (3)$$

przy oznaczeniach q_i – odległość i -tego obiektu od wzorca, a v_j – waga zmiennych z_j^0, z_j^i otrzymanych w wyniku klasycznej standaryzacji cech x_j^0, x_j^i , odpowiednio wzorca oraz i -tego obiektu. Zarazem $x_j^0 = \left[\max_j \{x_j^i \in \mathcal{S}\}, \min_j \{x_j^i \in \mathcal{D}\} \right]$, gdzie \mathcal{S} i \mathcal{D} oznaczają odpowiednio zbiory stymulant i destymulant.

Wartość wagi v_j określa udział j -tej zmiennej w mierze zagregowanej i jest jednym z najważniejszych i najtrudniejszych problemów w procesie konstrukcji agregatów. O ile określenie hierarchii cech diagnostycznych, od najbardziej do najmniej istotnych, jest stosunkowo łatwe, to już ocena wzajemnych relacji pomiędzy wagami jest zasadniczo trudniejsza. W konsekwencji często wszystkim wagom nadaje się takie same wartości

$$v_j = 1/K \quad (4)$$

co zapewnia, że każda zmienna wpływa w równym stopniu na miarę syntetyczną. Zarazem jednak pod uwagę bierze się liczne aspekty rozwoju, reprezentowane przez grupy różnych zmiennych. Jeśli liczby zmiennych w grupach są różne, to aspekt, który jest reprezentowany przez większą liczbę cech, wpływa na zagregowany wskaźnik SMR bardziej niż inne. Przyjmując zatem, że każda grupa zmiennych G_l (gdzie $l = 1, 2, \dots, G$) ma w takim samym stopniu wpływać na miarę syntetyczną, odległość i -tego obiektu od wzorca należy zdefiniować jako:

$$q_i = \sqrt{\frac{1}{G} \sum_{l=1}^G \frac{1}{k_l} \sum_{j=1}^{k_l} (z_j^i - z_j^0)^2} \quad (5)$$

gdzie, G – liczba grup zmiennych uwzględnianych w konstrukcji miary zagregowanej, k_l – liczba zmiennych w l -tej grupie opisujących badany obiekt, $l \in [1, G]$, $K = \sum_{l=1}^G k_l$. Podejście (5) zapewnia, że każda rozważana domena rozwoju jest jednakowo reprezentowana w mierze syntetycznej, niezależnie od liczby zmiennych w nich zawartej.

Tabela 2. Zmienne diagnostyczne wg dziedzin życia

Dziedziny życia	Typ i opis zmiennych		
Zdrowie i środowisko	1	S	Oczekiwana długość życia w zdrowiu w dniu urodzenia 2019 (lata)
		S	Bieżące wydatki na zdrowie w 2017 r. (% PKB)
		S	Lekarze 2010-2018 (na 10 tys. ludności)
	2	D	Emisja dwutlenku węgla Emisja produkcyjna na mieszkańca 2018 (mt)
		D	Umieralność przypisywana gospodarstwom domowym i zanieczyszczeniu powietrza 2016 r. (na 100 tys. ludności, standaryzacja wiekiem)
D		Współczynnik umieralności przypisywany niebezpiecznym usługom wodnym, sanitarnym i higienicznym 2016 (na 100 tys. ludności)	
Edukacja	3	S	Średnia lat nauki szkolnej 2019 (lata)
		S	Alfabetyzacja dorosłych (% w wieku 15 lat i więcej) 2008-2018
	D	Wskaźnik przerywania nauki w szkole podstawowej 2008-2018 (% kohorty uczniów szkół podstawowych)	
		Obciążenia nauczyciela uczniami (szkoły podstawowe) 2010-2019	
Rozwój Gospodarczy	4	S	Bezpośrednie inwestycje zagraniczne, napływy netto 2019 (% PKB)
		D	Stopa bezrobocia ogółem 2019 (stosunek kobiet do mężczyzn)
		S	Eksport i import 2019 (% PKB)
		S	Wskaźnik zatrudnienia do liczby ludności 2019 (% w wieku 15 lat +)
		D	Zatrudnienie w rolnictwie 2019 (% ogółu zatrudnionych)
		S	Zatrudnienie w usługach w 2019 (% całkowitego zatrudnienia)
		D	Bezrobocie ogółem w 2019 (% siły roboczej)
		D	Bezrobocie młodzieży w 2019 (% w wieku 15-24 lat)
Jakość życia	5	S	Użytkownicy Internetu ogółem 2018 (% populacji)
		S	Abonamenty telefonów komórkowych 2018 (na 100 osób)
	6	S	Udział miejsc zajmowanych przez kobiety w parlamencie 2019 (%)
		7	D
	S		Zasób imigrantów w 2019 (% ludności)
	8	S	Produkt krajowy brutto (PKB) na mieszkańca 2019 (2017 PPP \$)
		S	Wydatki na edukację i zdrowie do wydatków na wojsko (2010-2017)
		D	Ubodzy pracujący za 3,20 PPP \$/dzień 2019 (% zatrudnienia ogółem)
		D	Młodzież nie ucząca się ani nie zatrudniona 2019 (% wieku 15-24 lat)
		S	Wydatki na spożycie ostateczne w sektorze instytucji rządowych i samorządowych 2014-2019 ogółem (% PKB)

Uwaga: cechy diagnostyczne grupuje się dodatkowo w 8 obszarach i oznacza 1 – zdrowie, 2 – środowisko, 3 – edukacja, 4 – rozwój gospodarczy, 5 – IT, 6 – sytuacja kobiet, 7 – bezpieczeństwo, 8 – poziom życia.

Źródło: opracowanie własne na podstawie <http://hdr.undp.org/en/content/download-data>

Wartości syntetycznej miary rozwoju należą do przedziału [0;1]. Nie mają bezpośredniej interpretacji ekonomicznej, a służą jedynie do porządkowania obiektów, pokazując pozycję *i*-tego obiektu (kraju) wśród innych rozpatrywanych

obiektów dla wykorzystanego zestawu cech. Większa wartość SMR_i (3), dla i -tego kraju oznacza lepszą pozycję tego kraju w rankingu.

CHARAKTERYSTYKA DANYCH

W konstrukcji miary taksonomicznej kluczową kwestią jest dostępność i jakość danych. Zasadnicze znaczenie ma analiza kompletności danych i eliminacja zmiennych (a) quasi-stabilnych, tzn. o współczynnikach zmienności mniejszych niż 10%, oraz (b) po jednej z każdej pary silnie skorelowanych, tzn. o wartościach współczynnika Pearsona większych co do modułu od 0,9².

Ostatecznie uwzględnione zostały 44 państwa afrykańskie reprezentujące 97,67% populacji Afryki, wyłączając Dżibuti, Erytreę, Komory, Libię, Kongo-Brazzaville, Wyspy Świętego Tomasza, Seszele oraz Sudan Południowy, jako państwa z największymi brakami obserwacji, oraz Mauritius, jako obserwację odstającą.

Końcowy zbiór zawiera 28 nieskorelowanych cech diagnostycznych (tabela 2), podzielonych arbitralnie na 4 grupy, reprezentujące różne aspekty społeczne i ekonomiczne, ze wskazaniem ich charakteru jako stymulant (S) lub destymulant (D). W tabeli zamieszczono także bardziej szczegółowe grupowanie zmiennych w 8 cząstkowych domen reprezentujących: zdrowie (4 zmienne), środowisko (3 zmienne), poziom życia (5 zmiennych), zastosowanie IT (2 zmienne), bezpieczeństwo (8) i sytuację kobiet (jedna zmienna)

WYNIKI EMPIRYCZNE

Stosując opisaną metodykę, klasyfikujemy 44 analizowane kraje według syntetycznych miar rozwoju (3) i grupujemy je w cztery klasy wg opisanych wcześniej reguł klasyfikacji (1). Stosujemy przy tym oba przedstawione (4)-(5) podejścia do ważenia zmiennych, a zagregowany indeks SMR obliczamy z równymi wagami:

- dla każdej z 28 cech diagnostycznych x_j – wówczas miary syntetyczne oznaczane są jako $SMR1_i$ i obliczane są według wzorów (3) i (4), oraz
- dla każdej z 4 grup zmiennych (dziedzin życia) – wówczas miary syntetyczne oznaczane są jako $SMR2_i$ i obliczane są według (3) i (5) dla $G=4$ oraz
- dla każdej z 8 szczegółowych grup zmiennych (oznaczonych 1-8 w tab. 1), w następstwie otrzymuje się miarę syntetyczną $SMR3_i$ obliczaną wg (3), (5) dla

² W przypadku (a) usuwamy zmienne, które nie różnicują obiektów wystarczająco silnie. W praktyce jednak często zachowuje się takie zmienne, zwłaszcza gdy dostępność danych jest niewielka. Przypadek (b) pozwala wyeliminować zmienne, które powielają te same informacje. Zachowanie silnie skorelowanych zmiennych wzmacnia wpływ informacji dostarczanej przez te zmienne i może być działaniem celowym.

G=8. Ta miara będzie porównywana z indeksem IIAG[#] (Ibrahim Index of African Governance[#]), zdefiniowanym przez nas na równo ważonych pięciu domenach życia³ (indeksach częściowych) publikowanych przez Fundację Mo Ibrahima [Mo Ibrahim Foundation 2019].

Tabela 3. Grupowanie metodą głosowania większościowego (MVC) według klasyfikacji SMR1, SMR2, SMR3 i HDI

MVC	Kraj	Częstotliwość w klasie				MVC	Kraj	Częstotliwość w klasie			
		I	II	III	IV			I	II	III	IV
I	Algieria	4				II	Lesoto		3	1*	
IV	Angola		1*	1	2	III	Liberia		1	3*	
III	Benin			4		IV	Madagaskar		1	1*	2
I	Botswana	4				III	Malawi			4	
II	Burkina Faso		1	2	1*	III	Mali			3	1*
III	Burundi			2	2*	II	Mauretania		2	2*	
I	Cabo Verde	4				I	Maroko	4			
III	Kamerun		2*	2		III	Mozambik		1	3*	
IV	CAF ¹				4	I	Namibia	3	1*		
IV	Czad				4	III	Niger			2	2*
III	Kongo/Kinszasa			3*	1	III	Nigeria			3*	1
II	CIV ^{2/}		3	1*		II	Rwanda	1	3*		
I	Egipt	3*	1			II	Senegal		2	2*	
III	GNQ ⁴	1	3*			IV	Sierra Leone			1	3*
III	Eswatini	1	3*			II	RPA	2*	2		
III	Etiopia		2*	2		II	Sudan		2	2*	
II	Gabon	2*	2			II	Tanzania		2	2*	
II	Gambia		2	2*		III	Togo			4	
III	Ghana	1	3*			I	Tunezja	4			
II	Gwinea		2	2*		III	Uganda			3*	1
III	Gwinea Bissau			4		III	Zambia		2*	2	
II	Kenia		4			I	Zimbabwe	2	2*		

Uwaga: * oznacza klasyfikację również według HDI, np. 3* oznacza trzykrotne wskazanie, w tym także przez HDI; zastosowano skróty wg ISO 3166-1: ¹CAF – Republika Środkowoafrykańska, ²CIV – Wybrzeże Kości Słoniowej; ³Cabo Verde (CPV) – Wyspy Zielonego Przylądka, ⁴GNQ – Gwinea Równikowa

Źródło: obliczenia własne na podstawie (na podstawie [Witkowska i in. 2022])

Oddzielnie analizowane są także wszystkie wyróżnione dziedziny rozwoju społeczno-gospodarczego z wykorzystaniem SMR „częstkowych”, obliczonych dla

³ tj. rozwój społeczny, fundamenty rozwoju gospodarczego, bezpieczeństwo i praworządność, ogólne zasady sprawowania władzy oraz zaangażowanie, przestrzeganie praw i integracja społeczna

każdej grupy zmiennych wg reguł (3)-(5). Wyniki zebrane zostały w tabeli 3 w ten sposób, że dla każdego kraju podano krotność jego klasyfikacji do klastrów I-IV wg wszystkich mierników syntetycznych oraz grupowanie ostateczne (MVC) na podstawie majoryzacji.

Wśród krajów najwyżej rozwiniętych, tj. 8 sklasyfikowanych w klastrze I, Algieria, Botswana, Maroko, Tunezja i Wyspy Zielonego Przylądka są tak grupowane przez wszystkie 4 zastosowane miary. Analogicznie, Czad i Republika Środkowoafrykańska są klasyfikowane przez wszystkie miary w klastrze 5 państw najslabiej rozwiniętych. Zmiany wag wpływają na wartości SMR, a także na przynależność do określonej klasy rozwoju.

Tabela 4. Grupowanie wg wartości mierników syntetycznych SMR3 i IIAG[#]

Rank	Klasa	SMR3	IIAG [#]	Rank	Klasa	SMR3	IIAG [#]
1	I	Tunezja	CPV	23	III	Burkina Faso	Mozambik
2		Algieria	Tunezja	24		Rwanda	Liberia
3		CPV	Botswana	25		Zambia	Niger
4		Namibia	RPA	26		Gwinea Bissau	Gabon
5		Botswana	Namibia	27		Nigeria	Egipt
6		Maroko	Ghana	28		Mali	Etiopia
7		RPA	Senegal	29		Niger	Mali
8		Egipt	Maroko	30		Malawi	Zimbabwe
9	II	Eswatini	Rwanda	31		Togo	Nigeria
10		Zimbabwe	Benin	32		Liberia	Madagaskar
11		GNQ	Kenia	33		Kamerun	Eswatini
12		Tanzania	Algieria	34		Burundi	Kamerun
13		Gabon	Gambia	35		Benin	Gwinea
14		Kenia	Burkina Faso	36		Mozambik	Mauretania
15		Ghana	CIV	37	IV	Kongo	Gwinea Bissau
16		Sudan	Tanzania	38		Etiopia	Angola
17		CIV	Lesotho	39		Uganda	Burundi
18		Lesotho	Zambia	40		Angola	Czad
19		Mauretania	Uganda	41		Madagaskar	Sudan
20		Gambia	Malawi	42		CAF	Kongo
21		Senegal	Sierra Leone	43		Sierra Leone	CAF
22		Gwinea	Togo	44		Czad	GNQ

Uwaga: oznaczenia i skróty jak w tabeli 3.

Źródło: obliczenia własne

Ostatecznie o pozycji kraju w rankingu wnioskujemy wg reguły majoryzacji, klasyfikującej obiekty do klas, w których występują najczęściej [Kompa, Witkowska, 2021]. Tabela 3 zawiera zatem informacje o zakwalifikowaniu kraju do jednej z czterech wyróżnionych klas przez trzy syntetyczne miary rozwoju oceniane dla 28 zmiennych, ale dla różnych systemów wagowych (tj. SMR1-

SMR3) oraz przez Human Development Index (w tabeli 3 oznaczenie *). Przyjąwszy, że HDI jest miarą najsłabszą (ze względu na liczbę cech diagnostycznych), grupowania równoliczne zalicza się do klastra, w którym nie występuje wskazanie wg HDI.

Analizując klasyfikację krajów przedstawioną w tabeli 4 zauważa się, że obie miary SMR3 i IIAG[#] podobnie rozpoznają poziom rozwoju społeczno-gospodarczego – sześć krajów zaliczają do pierwszej klasy (Tunezja, Wyspy Zielonego Przylądka, Namibia, Botswana, Maroko i RPA), a trzy (Angola, Czad i Kongo/Kinszasa) do klasy czwartej. Własności tej nie wykazują porównania indeksów SMR1 i SMR2 do ważonego indeksu Mo Ibrahima IIAG[#].

Tabela 5. Klasyfikacja wg miary SMR dla grup zmiennych „Edukacja” (EDU), „Rozwój gospodarczy” (GOSP), „Zdrowie” (ZDR) i „Jakość życia” (QOL)

Kraj	EDU	GOSP	ZDR	QOL	Kraj	EDU	GOSP	ZDR	QOL
Algieria	I	IV	I	II	Lesoto	II	II	III	II
Angola	III	IV	II	III	Liberia	III	I	III	III
Benin	III	II	III	III	Madagaskar	III	II	II	III
Botswana	I	III	I	II	Malawi	III	II	III	III
Burkina Faso	IV	III	III	III	Mali	IV	III	III	III
Burundi	III	IV	III	III	Maroko	II	II	I	II
Cabo Verde ^{III/}	I	I	I	I	Mauretania	III	III	II	III
CAF ^{I/}	IV	III	IV	IV	Mozambik	IV	I	III	II
CIV ^{II/}	III	III	III	II	Namibia	I	III	II	I
Czad	IV	II	IV	IV	Niger	IV	III	IV	IV
Egipt	I	IV	I	III	Nigeria	II	III	IV	III
Eswatini	I	III	II	II	RPA	I	IV	III	I
Etiopia	IV	III	III	III	Rwanda	III	II	III	II
Gabon	I	III	I	I	Senegal	III	II	III	III
Gambia	III	II	III	III	Sierra Leone	IV	II	IV	III
Ghana	I	I	III	II	Sudan	III	IV	II	III
Gwinea	IV	II	III	III	Tanzania	II	III	II	III
Gwinea Bissau	III	III	III	III	Togo	III	III	IV	III
Gwinea Równ.	II	I	III	I	Tunezja	I	III	I	I
Kamerun	III	II	II	II	Uganda	III	III	IV	III
Kenia	I	III	III	II	Zambia	II	II	II	III
Kongo/Kinszasa	II	II	III	IV	Zimbabwe	I	III	II	I

Uwaga: zastosowano skróty jak w tabeli 3: ^{1/}CAF – Republika Środkowoafrykańska, ^{2/}CIV – Wybrzeże Kości Słoniowej (ISO 3166), ^{3/}CPV – Wyspy Zielonego Przylądka; odcieniem szarym zaznaczono kraje dla których pozycja wg SMR(GOSP) > poz. wg SMR(ZDR, EDU, QOL)

Źródło: obliczenia własne

Obliczamy również syntetyczne miary rozwoju dla czterech wyróżnionych dziedzin życia, przyjmując równe wagi dla każdej zmiennej w grupie (tabela 5). Poza Wyspami Zielonego Przylądka, zaliczonymi do 1-szej klasy we wszystkich czterech domenach życia, nie ma kraju, który należałoby do tej samej klasy częściej niż trzy razy, w czterech cząstkowych klasyfikacjach SMR. Tak klasyfikowane są 23 kraje Afryki: (i) do klasy pierwszej - Gabon i Tunezja, (ii) do drugiej klasy - Maroko, Lesoto i Zambia, (iii) do trzeciej klasy - Benin, Burkina Faso, Burundi, Wybrzeże Kości Słoniowej, Etiopia, Gambia, Gwinea Bissau, Liberia, Malawi, Mali, Mauretania, Senegal, Togo i Uganda oraz (iv) do klasy czwartej - Republika Środkowoafrykańska, Czad i Niger.

Dla porównania przydatności dyskryminacyjnej miar wykorzystanych w badaniu porównane zostały ich zmienności. Wychodzimy przy tym z założenia, że tylko dobrze zróżnicowane miary są w stanie rozpoznać i uporządkować kraje wg poziomu ich rozwoju. Współczynnik zmienności wskaźników zbiorczych (SMR1-SMR3, IIAG[#] i HDI) wraz z cząstkowymi składowymi podano w tabeli 6.

Tabela 6. Porównanie zmienności analizowanych miar

Miara	Współczynnik zmienności (%)
SMR1	32,95
SMR2	46,50
SMR3	48,71
SMR „edukacja”	49,46
SMR „rozwój gospodarczy”	52,04
SMR „zdrowie i środowisko”	50,89
SMR „jakość życia”	31,37
IIAG [#] (dla wszystkich zmiennych)	21,23
HDI	17,36

Źródło: Obliczenia własne

Najbardziej różnicującymi indeksami są miary cząstkowe SMR dla dziedzin "rozwój gospodarczy" (52%), "zdrowie i środowisko" oraz "edukacja" (50,9 i 49,5%). Natomiast wśród miar SMR, uwzględniających wszystkie zmienne największą przydatność do różnicowania analizowanych krajów wykazują SMR3 i SMR2. Na tym tle indeks IIAG[#] ma istotnie mniejszą zmienność, ale wydaje się lepiej dyskryminować niż miary HDI (17,4%). Przyczyn tych różnic należy upatrywać w różnicy zasięgu analizowanych miar i różnicy zbiorów cech diagnostycznych uwzględnionych w ich budowie. HDI jest indeksem światowym, gdy IIAG[#] – indeksem regionalnym, obejmującym 54 kraje Afryki (także odstające Mauritius i Seszele). Zarazem też trzeba podkreślić, że bezpośrednie porównanie cząstkowych indeksów IIAG i SMR nie jest możliwe ze względu na różnice definicyjne dziedzin życia.

PODSUMOWANIE

Porównania międzynarodowe są kluczowe dla zarządzania w sferze finansów i polityki. Przez długi czas dominował pogląd, że dla tych celów wystarczające są porównania jednoczynnikowe. Obecnie preferuje się podejście wieloczynnikowe, w którym rozwój krajów i regionów, rozumiany jest nie tylko w kategoriach ekonomicznych, ale także w kategoriach dobrostanu społecznego.

Nasze badania wpisują się w ten nurt postulując syntetyczne miar rozwoju na potrzeby badań porównawczych krajów afrykańskich. Miary te wyróżniają się szerokim zakresem zastosowań, łatwą konstrukcją, intuicyjnym wykorzystaniem i prostotą interpretacji. W szczególności, mają umożliwić rozstrzygnięcie kwestii na ile wzrost gospodarczy w Afryce napędza sam siebie, a na ile (pozostający z nim w synergii) rozwój społeczny.

W naszej pracy skonstruowaliśmy kilka syntetycznych miar opartych na odległości taksonomicznej. Określiśmy zasady doboru zmiennych objaśniających i zweryfikowaliśmy nasze modele na danych z zasobów ONZ oraz Fundacji Mo Ibrahima. Ze względu na braki danych, analizy ograniczono do 44 krajów i 28 cech objaśniających. Jest to niewątpliwie najslabszy punkt naszego badania, którego wiarygodność silnie zależy od poziomu afrykańskich statystyk krajowych i kompatybilności danych przez nie dostarczanych.

Badane kraje afrykańskie zostały zgrupowane w jednorodnych klasach, co pozwala wskazać kraje najbardziej i najmniej rozwinięte. Stąd wnioskujemy, że „rozwój gospodarczy” oraz „zdrowie i środowisko” to domeny życia, które najbardziej różnicują kraje afrykańskie, podczas gdy „jakość życia” wydaje się być mniej zróżnicowana. Tylko RPA i Egipt rozwijają się w sposób zrównoważony, w 21 krajach rozwój gospodarczy znacznie wyprzedza rozwój w sferach dobrostanu społecznego, a w pozostałych relacja ta jest odwrócona.

BIBLIOGRAFIA

- Avdiushchenko A., Zając P. (2019) Circular Economy Indicators as a Supporting Tool for European Regional Development Policies. *Sustainability*, 11(11), 3025.
- Composite Indices. (2022) UN Development Programme. Retrieved 3 August 2022, from <https://hdr.undp.org/data-center/composite-indices>
- Hellwig Z. (1968) Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju oraz zasoby i strukturę wykwalifikowanych kadr. *Przegląd Statystyczny*, 4, 307-327.
- Khan H. (1991) Measurement and Determinants of Socioeconomic Development: A critical Conspectus. *Social Indicators Research*, 24(2), 153-175.
- Kompa K., Witkowska D. (2009) Comparison of the Socio-Economic Development Level of European Union States: The Distance Measures Application. *Polish Journal of Environmental Studies*, 18(13B), 391-397.

- Kompa K., Witkowska D. (2021) Synthetic Measures in Benchmarking of the New Silk Road Countries. *Procedia Computer Science*, 192, 3617-3626.
- Mo Ibrahim Foundation (2019) 2019 Ibrahim Index of African Governance Index Report.
- Nermend, K. (2010) Vector Calculus in Regional Development Analysis: Comparative Regional Analysis using the Example of Poland. *Physica-Verlag Berlin Heidelberg*.
- Noll H. H. (2014) European System of Social Indicators. [in:] A. C. Michalos (Ed.), *Encyclopedia of Quality of Life and Well-Being Research* (pp. 2027-2030). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0753-5_3448
- Roser M. (2014, July 25) Human Development Index (HDI). *Our World in Data*. (The last revision was made in November 2019). Retrieved 12 April 2022, from <https://ourworldindata.org/human-development-index#citation>.
- Udjo E. O., Orkin M., Simelane S. (2000, June) Levels of Social Indicators in South Africa in Relation to International Goals of Development. *Forum 2000 Seminar on Statistics for Social Progress*, Geneva, Switzerland. Retrieved again 12 August 2022, from https://kipdf.com/download/levels-of-social-indicators-in-south-africa-in-relation-to-international-goals-o_5ad132ae7f8b9a32658b45d9.html
- Witkowska D., Kompa K., Mazur-Dudzińska A. (2022) Synthetic Measure of Socio-Economic Development for African Countries. Draft for IBC 2022 Proceedings.

COMPARISON OF SOCIO-ECONOMIC DEVELOPMENT OF AFRICAN COUNTRIES

Abstract: Socio-economic development is a complex process that must be considered multidimensionally. However, the indicators estimated by the UN are global in nature and are not sensitive enough for regional comparisons. The purpose of this study is to construct measures of socioeconomic development for African countries, to validate their applicability, and to examine their sensitivity to changes in weights that describe the impact of selected aspects of social and economic development. Taxonomic distances and variables describing 8 different categories of quality of life and level of development were used. Countries were grouped into homogeneous classes. The applicability of the proposed approach was confirmed by comparing it with other measures constructed for Africa.

Keywords: comparative studies, synthetic measures of development, taxonomic distance, African countries

JEL classification: C43, D63, O55

ZASADY Z ROCHDALE W OBECNEJ DZIAŁALNOŚCI POLSKICH KOOPERATYW SPOŻYWCZYCH

Małgorzata Jolanta Zbyrowska  <https://orcid.org/0000-0002-9911-3608>

Katedra Teorii Organizacji i Zarządzania
Wydział Zarządzania
Uniwersytet Warszawski
e-mail: mzbyrowska@wz.uw.edu.pl

Streszczenie: Celem artykułu jest weryfikacja zastosowania klasycznych zasad spółdzielczych z Rochdale w obecnej działalności polskich kooperatyw spożywczych. Na podstawie uporządkowanego modelu logitowego zidentyfikowano czynniki mające istotny wpływ na możliwość stosowania wspomnianych zasad. Obserwacje uczestniczące autorki oraz badania literaturowe pozwoliły na sformułowanie pytania badawczego o wymiarze historyczno-organizacyjnym. Część empiryczna pracy została przygotowana w oparciu o dane zgromadzone w ramach badania ankietowego. Syntetyczne wnioski sformułowano z pomocą metod analizy ilościowej.

Słowa kluczowe: kooperatywa spożywcza, spółdzielczość, spółdzielnia, zasady z Rochdale, organizacja społeczna, ekologiczny, zarządzanie, uporządkowany model logitowy, zdrowa żywność, marketing, społeczna odpowiedzialność

JEL classification: L31, D26, O15, Q13, P13

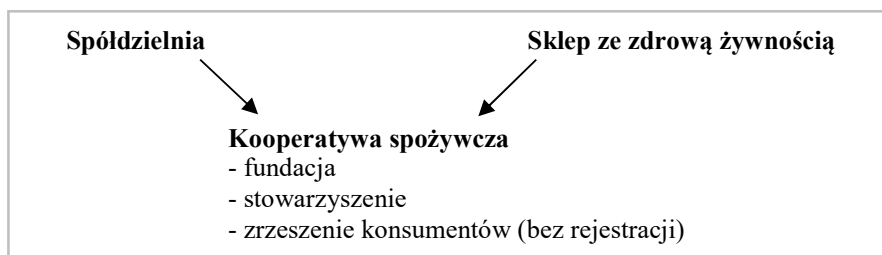
WSTĘP

Na przestrzeni lat można zaobserwować wyraźny proces ewolucyjny spółdzielczości – zarówno w Polsce, jak i poza granicami naszego kraju, umożliwiający jej sukcesywne dostosowywanie się do zmian zachodzących w otoczeniu. Widać to zwłaszcza w obecnym czasie kryzysu wywołanego pandemią koronawirusa. W tym trudnym czasie spółdzielnie pomimo ogromnego wpływu zmian związanych z kryzysem okazały się elastyczne, odporne i innowacyjne [World Cooperative Monitor 2020]. Spółdzielczość na świecie od zawsze odgrywała znaczącą rolę w rozwoju społeczno-gospodarczym

<https://doi.org/10.22630/MIBE.2022.23.1.3>

i w kształtowaniu warunków życia wielu milionów ludzi. Stanowiła szansę na rozwój lokalnej społeczności, przeciwdziałała ubóstwu i wykluczeniom społecznym oraz była niezwykle atrakcyjną formą gospodarowania [Drozd-Jaśniewicz, Wiatrak 2003]. Obecnie również jest ona wyrazem ukierunkowania na sprawy lokalne, pełniejsze zaspokajanie potrzeb członków i tworzenie wspólnej, nastawionej na ludzi „inwestycji” [Kawa, Kuźniar 2008]. Warto podkreślić, że rozwój spółdzielczości nie byłby i nadal nie jest możliwy bez pełnego zaangażowania, kreatywności, przedsiębiorczości, a przede wszystkim aktywności zrzeszonych osób [Szyszkowska 2013]. Zmiany dokonujące się na przełomie dziesięcioleci w historii światowej spółdzielczości, począwszy od powstania w 1844 roku w Rochdale w Anglii pierwszej spółdzielni [Pudełkiewicz 2009], a zwłaszcza zmiany w kwestiach stosowanych metod zarządzania oraz sposobów radzenia sobie z kryzysami są zjawiskiem interesującym pod względem organizacyjnym. Klasyczne zasady z Rochdale (tzn.: dobrowolne i otwarte członkostwo, demokratyczna kontrola członkowska, ekonomiczne uczestnictwo członków, autonomia i niezależność, kształcenie i szkolenie, współdziałanie, troska o społeczność lokalną) nadal są wymieniane jako fundament spółdzielczości światowej, która jest blisko związana z ruchem kooperatyw spożywczych. W tym miejscu pojawia się pytanie: Czy zasady z Rochdale (1844 rok) wpisują się także w działalność współczesnych kooperatyw spożywczych? Warto wyjaśnić, że termin spółdzielnia w języku angielskim wyrażany jest słowem „cooperative” lub w skrócie „coop”. Zatem polskie określenie „kooperatywa” jest rodzimym tłumaczeniem z języka angielskiego, które nawiązuje do zasad spółdzielczych. Należy dodać, że kooperatywa spożywcza w Polsce odróżnia się od podmiotu typowej spółdzielni jak na przykład spółdzielnie mleczarskie bądź spółdzielnia spóżywców „Społem”. W polskim systemie gospodarczym kooperatywa spożywcza oznacza organizację społeczną, która jest związana z zakupem i dostarczaniem żywności lub wspólnym zaopatrywaniem się w żywność. Najczęściej przybiera ona formę prawną fundacji, stowarzyszenia lub zrzeszenia konsumentów bez wymogu rejestracji. Termin kooperatywa jest nazwą polską, która w przypadku kooperatywy spożywczej skupia wybrane cechy spółdzielni oraz sklepu ze zdrową żywnością, co przedstawiono na rysunku 1.

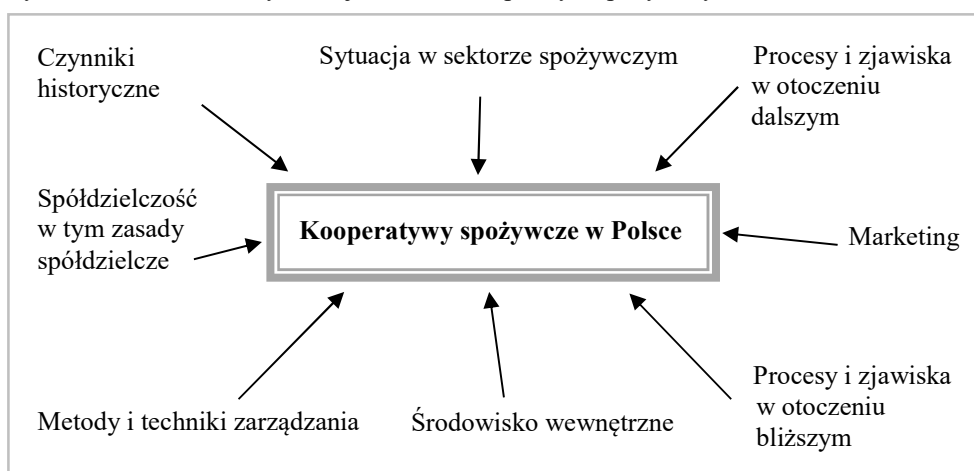
Rysunek 1. Kooperatywa spożywcza w kontekście terminologii polskiej



Źródło: opracowanie własne

Funkcjonowanie kooperatyw spożywczych w obecnym czasie osadzone jest w podobnych realiach społeczno-gospodarczych jak wielu innych podmiotów. Szerokie ramy gospodarki rynkowej nadają kształt warunkom prowadzenia działalności większości podmiotów obecnych na rynku, jednak podkreślić należy, że znaczący wpływ na sytuację współczesnych kooperatyw spożywczych w Polsce posiada grupa czynników związana z wymiarem historycznym, sytuacją sektora spożywczego oraz efektywnym zarządzaniem i prowadzeniem działalności marketingowej (rysunek 2).

Rysunek 2. Determinanty funkcjonowania kooperatyw spożywczych w Polsce



Źródło: opracowanie własne

Natomiast dwa fundamentalne elementy wyróżniające spółdzielnie od wszelkich innych przedsiębiorstw to proces podejmowania decyzji oraz forma własności. W rzeczywistości rozpoznanie podmiotów spółdzielczych w przekroju międzynarodowym nie jest rzeczą łatwą. Dzieje się tak ponieważ konstrukty i regulacje prawne poszczególnych państw mogą znacznie się od siebie różnić. W wielu krajach nawet nie istnieje odrębne ustawodawstwo spółdzielcze. W takich przypadkach najlepszym wyróżnikiem spółdzielczości okazują się tak zwane Międzynarodowe Zasady Spółdzielcze [Birchall 1997]. Aktualna wersja tych zasad została przyjęta w 1995 roku podczas kongresu w Manchesterze. Stało się to za sprawą Deklaracji Spółdzielczej Tożsamości [International Cooperative Alliance 2020], którą zatwierdził wówczas Międzynarodowy Związek Spółdzielczy. Deklaracja ta sięga głęboko do korzeni światowej spółdzielczości i czerpie właśnie z zasad ustanowionych przez Pionierów z Rochdale (1844 rok). Zasady ustalone dla pierwszego na świecie przedsiębiorstwa spółdzielczego zostały jedynie zmodernizowane i dostosowane do wymagań współczesnego świata. Nadal jednak odwołują się one do tych samych wartości, które przyświecały twórcom historycznego ruchu, były to przede wszystkim: samopomoc, równość,

współodpowiedzialność, demokracja, solidarność. Pierwsza wymieniona idea tzw. „spółdzielczej samopomocy” umieszcza swoje źródło w przekonaniu, iż każdy człowiek „może i powinien brać odpowiedzialność za swoje życie” [Brzozowska 2007, str. 36]. Równoległe koncepcja spółdzielcza akcentuje pogląd, iż do rozwoju jednostki niezbędne są współpraca i współdziałanie z innymi. Ponadto bardzo istotną rolę odgrywają w spółdzielczości wyznawane wartości etyczne, takie jak uczciwość, społeczna odpowiedzialność, otwartość i troska o innych. Wymienione wartości oraz idee w przypadku typowych spółdzielni muszą być traktowane jako konieczność, choć oczywiście mogą one również przejawiać się w przypadku wielu innych przedsiębiorstw [Co-operation 2013]. Celem artykułu jest weryfikacja zastosowania klasycznych zasad spółdzielczych z Rochdale w obecnej działalności polskich kooperatyw spożywczych.

WYKORZYSTANE NARZĘDZIA ANALIZY DANYCH ORAZ ICH ŹRÓDŁA

Chociaż w badaniu przeprowadzono modelowanie oparte na założeniu, że zmienna zależna przyjmuje wartości uporządkowane to opis metody badawczej należy rozpocząć od jej źródła, czyli modelu wyboru binarnego. Dzieje się tak, ponieważ zarówno modele zmiennych jakościowych o wartościach uporządkowanych jak i nieuporządkowanych stanowią rozwinięcie regresji dwumianowej (tj. wyboru binarnego z ang. binary choice). Zmienna zależna Y , która może przyjmować jedynie dwie wartości (tzn. 1 lub 0) jest nazywana dwumianową, binarną lub dychotomiczną. Model, który pozwala wyjaśnić zmienność takiej zmiennej to właśnie regresja dwumianowa (inaczej model wyboru binarnego) [Gruszczyński 2012]. Zmienna dychotomiczna, która może przyjmować tylko dwie wartości (tzn. 1 lub 0) w rzeczywistości odzwierciedla określoną sytuację lub decyzję. Stąd w ogólnym podejściu zależność pomiędzy tą specyficzną zmienną endogeniczną, a zbiorem zmiennych egzogenicznych sprowadza się do oszacowania modelu prawdopodobieństwa, który uzależnia p_i (prawdopodobieństwo przyjęcia wartości 1 przez zmienną y_i) dla i -tego obiektu od funkcji k -zmiennych objaśniających zawartych w wektorze X :

$$p_i = F(x_i' \beta), \quad (1)$$

$$x_i' \beta = (1 \ X_{1i} \ X_{2i} \ \dots \ X_{ki}) (\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_k)'$$

gdzie:

X_{ki} – zmienna egzogeniczna numer k dla obserwacji i ;

β_k – parametr przy zmiennej egzogenicznej numer k .

W niniejszym badaniu analiza danych empirycznych została przeprowadzona z wykorzystaniem modeli zmiennych jakościowych wielomianowych. Przyjęte podejście analityczne zostało podyktowane specyfiką danych, które pozyskano

w drodze badania ankietowego oraz odpowiedziami respondentów na skali przedziałowej. W szczególności użytecznym narzędziem analitycznym okazał się w tym przypadku uporządkowany model logitowy [McFadden 1981] stanowiący uogólnienie modelu logitowego dwumianowego na większą liczbę progów [Gruszczyński 2012].

Idea modelu logitowego została oparta na wykorzystaniu funkcji F , którą zapisuje się jako dystrybuantę rozkładu logistycznego:

$$p_i = F(x_i' \beta) = \frac{\exp Z_i}{(1 + \exp Z_i)^2} \quad (2)$$

W podanej formule modelu wartości p_i zawierają się zawsze w przedziale $(0,1)$. Funkcja odwrotna do F , to zatem:

$$F^{-1}(p_i) = \ln \frac{p_i}{1 - p_i} \quad (3)$$

Zawiera ona wyrażenie zwane „logitem” czyli:

$$\ln \frac{p_i}{1 - p_i} \quad (4)$$

które odzwierciedla logarytm ilorazu prawdopodobieństw przyjęcia oraz nieprzyjęcia wartości 1 przez zmienną zależną y_i .

W przypadku uporządkowanego modelu logitowego p_{ij} jest prawdopodobieństwem takiego zdarzenia, że zmienna obserwowalna y dla i -tego obiektu przyjmuje wartość równą j (gdzie k_j wyraża koniec j -tego przedziału):

$$p_{ij} = \frac{\exp(k_j - x_i' \beta)}{1 + \exp(k_j - x_i' \beta)} - \frac{\exp(k_{j-1} - x_i' \beta)}{1 + \exp(k_{j-1} - x_i' \beta)} \quad (5)$$

Oszacowanie modelu wymaga w tym przypadku nie tylko estymacji wektora parametrów β , ale również oszacowania progowych wartości wektora k (ang. thresholds). Należy dodać, że w modelach logitowych klasyczne miary dopasowania takie jak na przykład współczynnik determinacji R^2 tracą na znaczeniu lub ewentualnie po pewnych przekształceniach służą do porównywania modeli. Do oceny modelu wykorzystuje się test ilorazu wiarygodności, który pozwala zweryfikować hipotezę zerową o zerowych wszystkich parametrach modelu oprócz stałej.

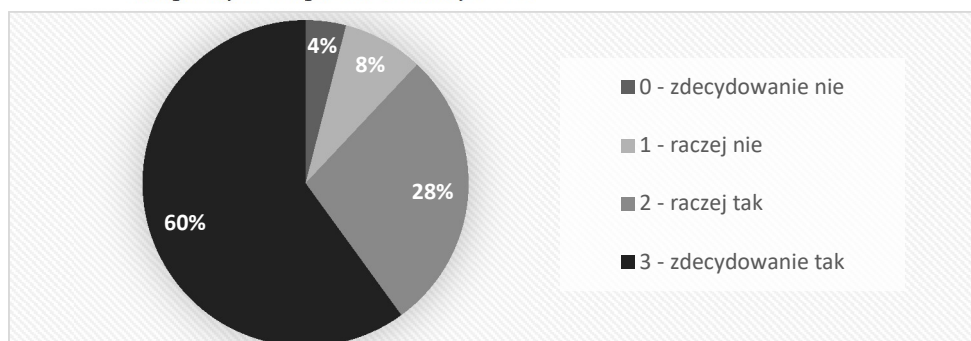
Badanie empiryczne przedstawione w ramach niniejszego artykułu zostało oparte na danych pierwotnych zgromadzonych w ramach właściwego badania ankietowego. Kwestionariusz ankiety udostępniony został w formie elektronicznej członkom 48 kooperatyw spożywczych w dniach od 1 sierpnia do 30 września 2021 roku. Badanie właściwe zostało poprzedzone krótkim badaniem pilotażowym, które miało miejsce w lipcu tego samego roku i pozwoliło zweryfikować poprawność przygotowanych pytań. W trakcie zbierania danych

okazało się, że 11 z 48 kooperatyw zakończyło swoją działalność i z tego powodu kontakt z tymi podmiotami jest niemożliwy. Ostatecznie kwestionariusz ankiety został wypełniony przez 115 członków blisko związanych z działającymi obecnie na terenie Polski 37 kooperatywami spożywczymi. Były to w większości osoby aktywnie zaangażowane w funkcjonowanie kooperatyw i chętnie udzielały odpowiedzi na przygotowane pytania. Zważywszy na fakt, że kwestionariusze ankiet zostały wypełnione przez członków, których należy uznać za reprezentantów wszystkich działających w naszym kraju kooperatyw spożywczych to można traktować niniejsze badanie jako pełne (tzn. dotyczące wszystkich 37 kooperatyw spożywczych w Polsce).

ANALIZA CZYNNIKÓW DETERMINUJĄCYCH STOSOWANIE KLASYCZNYCH ZASAD Z ROCHDALE

Ważnym wymiarem oceny działalności współczesnych kooperatyw spożywczych w ramach przeprowadzonego badania ankietowego była zgodność badanych organizacji z zasadami Rochdaleskimi (tj. dobrowolne i otwarte członkostwo, demokratyczna kontrola członkowska, ekonomiczne uczestnictwo członków, autonomia i niezależność, kształcenie i szkolenie, współdziałanie, troska o społeczność lokalną). Ocena zgodności respondentów z wymienionymi w kwestionariuszu ankiety stwierdzeniami została odnotowana na skali rangowej od 0 do 3 (gdzie 0 - zdecydowanie nie zgadzam się, 1 - raczej nie zgadzam się, 2 - raczej zgadzam się, 3 - zdecydowanie zgadzam się). Dobór skali odpowiedzi (tzn. stopnia oceny zgodności respondenta z danym stwierdzeniem) został podyktowany chęcią uniknięcia odpowiedzi neutralnych oraz ograniczeniem zbyt dużej liczby wariantów ocen bez straty na materiale badawczym. Tabela 1 zawiera wyniki oszacowań modelu pozwalając ocenić, które z badanych czynników w istotny statystycznie sposób determinują stosowanie klasycznych zasad z Rochdale.

Rysunek 3. Rozkład odpowiedzi respondentów na pytanie dotyczące oceny funkcjonowania kooperatyw w oparciu o zasady z Rochdale



Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników przeprowadzonego badania ankietowego

Odpowiedzi respondentów uzyskane na pytanie dotyczące aktualności klasycznych zasad z Rochdale (rysunek 3) wskazują jednoznacznie, że większość współczesnych kooperatyw spożywczych nadal funkcjonuje w oparciu o te fundamentalne zasady. Przynajmniej taka jest percepcja większości aktywnych członków kooperatyw w obszarze prowadzonej działalności (tzn. 88%).

Tabela 1. Tablica estymacyjna modelu oceny funkcjonowania kooperatyw w oparciu o zasady z Rochdale

Zmienne egzogeniczne	Oszacowanie parametru	Błąd standardowy	Statystyka t	Prawdopodobieństwo
Zatrudnienie menedżera	- 0,19	0,061	- 3,11	0,0023
Miasto powyżej 500	- 0,25	0,073	- 3,42	0,0009
Rok powstania	0,03	0,012	2,50	0,0138
Liczba przypadków 'poprawnej predykcji' = 79 (68,7%)				

Źródło: opracowanie własne w programie STATA

Jak wspomniano w części teoretycznej niniejszego opracowania w modelach logitowych współczynnik determinacji R^2 traci na znaczeniu i najczęściej w postaci zmodyfikowanej może być wykorzystany do porównywania modeli. Większą uwagę przykłada się w tym przypadku do testu ilorazu wiarygodności. W zaprezentowanym modelu wskazuje on na odrzucenie hipotezy zerowej, która mówi że wszystkie parametry modelu oprócz stałej są równe zero (test Chi-kwadrat osiągnął wartość równą 73,54). Program STATA podał również dla wskazanego testu Chi-kwadrat odpowiadającą mu wartość empirycznego poziomu istotności, która okazała się być mniejsza niż 0,0000. Otrzymane wartości potwierdziły zatem wysoką jakość oszacowanego modelu.

W przyjętym modelu zawarto wyłącznie parametry statystycznie istotnie różniące się od zera. Jak ukazało badanie istotny wpływ na ocenę kierowania się zasadami z Rochdale posiadają: zatrudnienie menedżera, miasto powyżej 500 tys. mieszkańców oraz rok powstania podmiotu. W oszacowanym modelu liczba przypadków poprawnej predykcji wyniosła 79 dla próby złożonej ze 115 respondentów. Oznacza to akceptowalnie wysoką wartość współczynnika poprawnych wyborów generowanych na podstawie modelu 68,7%. Fakt zatrudnienia menedżera wpływa negatywnie na ocenę stosowania przez kooperatywę zasad z Rochdale. Parametr -0,19 sugeruje, że szansa na wskazanie w kwestionariuszu ankiety wysokiej zgodności funkcjonowania organizacji z zasadami Rochadelskimi maleje średnio o 17% w sytuacji, gdy kooperatywa spożywcza zatrudnia zewnętrzną osobę zarządzającą (tj. menedżera) przy założeniu Ceteris Paribus (skrót C.P). Ponadto położenie organizacji w mieście powyżej 500 tys. mieszkańców zmniejsza przeciętnie szansę o 22% na stosowanie wyżej wspomnianych zasad C.P. Jednocześnie zmiana roku powstania kooperatywy o jednostkę (tzn. 1 rok) zwiększa szansę kierowania się podmiotu zasadami z Rochdale o średnio 3% przy założeniu C.P. Zatem młodsze

kooperatywy potencjalnie chętniej przyjmują za wzór swojego postępowania zasady z Rochdale.

PODSUMOWANIE

Współczesne kooperatywy spożywcze mają przed sobą niezwykle trudne zadanie. Podejmują one ideę kontynuacji działań wykreowanych przez dawne pokolenia, lecz funkcjonują w zgoła odmiennej rzeczywistości (zarówno rynkowej, jak i światopoglądowej). Wnioski z przeprowadzonego badania wskazują na pozytywny wpływ czynników o wymiarze historycznym na funkcjonowanie kooperatyw spożywczych w Polsce. Jest to związane z powszechnym uznaniem i stosowaniem tzw. zasad z Rochdale (rysunek 3). Przedstawiony w części empirycznej opracowania uporządkowany model logitowy (tabela 1) wskazuje ponadto, że niestety negatywny wpływ na szansę stosowania wymienionych zasad wywiera fakt zatrudnienia profesjonalnej osoby zarządzającej (tj. menedżera) oraz wielkomijska lokalizacja podmiotu. Zaobserwowano również większą skłonność do deklaracji klasycznych, a należałoby powiedzieć właściwie historycznych zasad z Rochdale (1844) w przypadku młodszych kooperatyw spożywczych. W obecnych czasach w Polsce (od początku XXI wieku) można zaobserwować zjawisko sukcesywnego i przebiegającego małymi krokami ale w konsekwentny sposób, odradzania się „klasycznego” ruchu spółdzielczego, współcześnie częściej określanego mianem kooperatyw. Dobrym tego przykładem są kooperatywy spożywcze [Bilewicz, Potkańska 2013] oraz rolnictwo wspierane przez społeczność – tzw. RWS [Skrzypczyński, Onyszkiewicz 2020].

Przeprowadzone badanie kwestionariuszowe obejmowało wszystkie kooperatywy spożywcze, które prowadzą działalność na terenie kraju. Należy mieć świadomość, że w międzyczasie dwie kooperatywy spożywcze przestały istnieć, a kontakt z ich aktywnymi członkami nie był możliwy. Ponadto obserwacja przebiegu badania wskazuje na uzyskanie odpowiedzi od tych członków kooperatyw, którzy są najsilniej zaangażowani w prowadzoną działalność. Naturalnym zjawiskiem było w tym przypadku niewielkie zaangażowanie członków kooperatyw spożywczych, których nie można zaliczyć do grupy tak zwanych liderów. Ponadto podkreślić należy, że badanie empiryczne przeprowadzone zostało w dość szczególnym czasie, który zbiegł się z pandemią COVID-19. Mogło to mieć znaczenie nie tylko w przypadku uzyskanej liczby odpowiedzi, ale również wpływać na sposób postrzegania wielu istotnych kwestii.

Odnosząc się szerzej do badanych kooperatyw spożywczych należy stwierdzić, że historia niejako zatoczyła koło, ponieważ w przeszłości dobrze rozwijały się spółdzielnie oparte na zaufaniu i zasadach, które funkcjonując integrowały społeczeństwo. Następnie nastął czas, w którym wiele obszarów organizacji i planowania ukierunkowano na masowość. Wiązało się to z procesem wytwarzania nastawionym na anonimowego odbiorcę. Jednocześnie konsument rzadko interesował się pochodzeniem produktu i organizacją, która go wytwarza.

Tymczasem w obecnych czasach szersza grupa nabywców zaczyna przejawiać zainteresowanie własnym zdrowiem i nie chce być traktowana masowo. Zatem istotne stało się pochodzenie produktu, jego jakość, miejsce i sposób wytwarzania. Pojawia się chęć nawiązania bliższych relacji z wytwórcami. W tym kontekście kooperatywy spożywcze opierając swe działania na zasadach sformułowanych i wypracowanych przez minione pokolenia niejako otrzymały dobrą „markę”.

BIBLIOGRAFIA

- Bilewicz A., Potkańska D. (2013) Jak kiełkuje społeczeństwo obywatelskie? Kooperatywy spożywcze jako przykład nieformalnego ruchu społecznego. *Trzeci Sektor*, 31, 25-34.
- Birchall J. (1997) *The International Co-operative Movement*. Manchester University Press, Manchester and New York.
- Brzozowska J. (2007) Spółdzielnia jako podmiot ekonomii społecznej. *Ekonomia Społeczna*, 1(1), 33-41.
- Co-operation (2013) *Co-operation. Responsible, Finnish, Ownership*.
<http://pellervo.fi/wp-content/uploads/2013/10/Osuustoiminta-englanniksi.pdf> [dostęp: luty 2022].
- Drozd-Jaśniewicz I., Wiatrak A. P. (2003) *Spółdzielczość wiejska w gospodarce rynkowej (uwarunkowania działania i zmian)*. Krajowa Rada Spółdzielcza, Warszawa.
- Gruszczynski M. (red.) (2012) *Mikroekonometria. Modele i metody analizy danych indywidualnych*. Wolters Kluwer Polska, Warszawa.
- International Cooperative Alliance (2020) *The ICA Statement on the Cooperative Identity Historical Context and Global Relevance for Today*.
<http://ica.coop/sites/default/files/news-item-attachments/25-anniversary-concept-note-final-draft-554502669.pdf> [dostęp: styczeń 2022].
- Kawa M., Kuźniar W. (2008) Rola spółdzielczości jako instytucji w przeciwdziałaniu nierówności ekonomicznych i społecznych. *Nierówności społeczne a wzrost gospodarczy*, 15, 310-317.
- McFadden D. L. (1981) *Econometric Models of Probabilistic Choice*. [in:] Manski C. F., McFadden D. (ed.) *Structural Analysis of Discrete Data with Econometric Applications*, Cambridge: The MIT Press, 198-272.
- Pudełkiewicz E. (2009) Spółdzielcze formy gospodarowania w Polsce i w innych krajach Unii Europejskiej. *Polityki Europejskie, Finanse i Marketing*, 51, 259-295.
- Skrzypczyński R., Onyszkiewicz, M. (2020) *Rolnictwo Wspierane przez Społeczność (RWS) w miejskich obszarach funkcjonalnych – charakterystyka, potencjalne korzyści i możliwości wsparcia przez administrację publiczną*. [w:] Grochowska A., Jurkowski W. (red.) *Przestrzeń miejska jako przedmiot badań w geografii społeczno-ekonomicznej i gospodarce przestrzennej*, Wrocław: Instytut Geografii i Rozwoju Regionalnego Uniwersytetu Wrocławskiego, 9-29.
- Szyszkowska M. (red.) (2013) *Dzisiejsze znaczenie ideałów spółdzielczości*. Warszawa: Wszechnica Polska.
- World Cooperative Monitor (2020) *Impact and Reactions of Cooperatives to COVID-19*.
<https://monitor.coop/en/media/library/research-and-reviews/impact-and-reactions-cooperatives-covid-19> [dostęp: listopad 2021].

**ROCHDALE PRINCIPLES IN THE CURRENT ACTIVITIES
OF POLISH FOOD CO-OPERATIVES**

Abstract: The aim of this article is to verify the real application of the classic Rochdale Principles of Cooperation in the current activities of Polish food cooperatives. On the basis of an ordered logit model, factors that have a significant impact on the applicability of the above-mentioned principles had been identified. The author's participating observations and literature research allowed for the formulation of a research question with a historical and organizational dimension. The empirical part of this study had been prepared on the basis of data collected via the survey. Synthetic conclusions have been formulated using quantitative analysis methods.

Keywords: food cooperative, cooperative movement, cooperative, coop, Rochdale principles, social organization, ecology, management, healthy food, ordered logit model, marketing, social responsibility

JEL classification: L31, D26, O15, Q13, P13