

Warsaw University of Life Sciences – SGGW
Institute of Economics and Finance
Department of Econometrics and Statistics

**QUANTITATIVE METHODS
IN ECONOMICS**

**METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH
EKONOMICZNYCH**

Volume XXIII, No. 2

Warsaw 2022

EDITORIAL BOARD

Editor-in-Chief: Bolesław Borkowski

Vice-Editor-in-Chief: Hanna Dudek

Managing Editor: Michał Gostkowski, Grzegorz Koszela

Theme Editors:

Econometrics: Bolesław Borkowski

Multidimensional Data Analysis: Wiesław Szczesny

Mathematical Economy: Zbigniew Binderman

Analysis of Labour Market: Joanna Landmesser-Rusek

Financial Engineering: Monika Krawiec

Data Science: Michał Gostkowski

Theory of Risk: Marek Andrzej Kociński

Statistical Editor: Wojciech Zieliński

Technical Editors: Jolanta Kotlarska, Elżbieta Saganowska

Language Editor: Agata Cienkusz

Native Speaker: Yochanan Shachmurove

Editorial Assistant: Luiza Ochnio, Łukasz Pietrych

SCIENTIFIC BOARD

Adnene Ajimi (University of Sousse, Tunisia)

Heni Boubaker (University of Sousse, Tunisia)

Vasily Dikussar (Russian Academy of Sciences, Russia)

Peter Friedrich (University of Tartu, Estonia)

Paolo Gajo (University of Florence, Italy)

Agnieszka Gehringer (University of Göttingen, Germany)

Anna Maria Gil-Lafuente (University of Barcelona, Spain)

Jaime Gil-Lafuente (University of Barcelona, Spain)

Vasile Glavan (Moldova State University, Moldova)

Francesca Greselin (University of Milano-Bicocca, Italy)

Ana Kapaj (Agriculture University of Tirana, Albania)

Jirawan Kitchaicharoen (Chiang Mai University, Thailand)

Yuriy Kondratenko (Black Sea State University, Ukraine)

Vassilis Kostoglou (Alexander Technological Educational Institute of Thessaloniki, Greece)

Karol Kukula (University of Agriculture in Krakow, Poland)

Kesra Nermend (University of Szczecin, Poland)

Nikolas N. Olenev (Russian Academy of Sciences, Russia)

Alexander N. Prokopenya (Brest State Technical University, Belarus)

Yochanan Shachmurove (The City College of The City University of New York, USA)

Mirbulat B. Sikhov (al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan)

Marina Z. Solesvik (Nord University, Norway)

Ewa Syczewska (Warsaw School of Economics, Poland)

Achille Vernizzi (University of Milan, Italy)

Andrzej Wiatrak (University of Warsaw, Poland)

Dorota Witkowska (University of Lodz, Poland)

ISSN 2082-792X

e-ISSN 2543-8565

© Copyright by Department of Econometrics and Statistics WULS – SGGW
(Katedra Ekonometrii i Statystyki SGGW)

Warsaw 2022, Volume XXIII, No. 2

Journal homepage: <https://qme.sggw.edu.pl>

Published by Warsaw University of Life Sciences Press

CONTENTS

Jaworski Stanisław – Porównanie estymatora największej wiarygodności z estymatorem nieobciążonym odsetka pytań drażliwych w modelu niezrandomizowanych odpowiedzi krzyżowych	35
Kompa Krzysztof, Witkowska Dorota – Wektorowa syntetyczna miara efektywności firmy dla polskich spółek publicznych	47
Szupiluk Ryszard – Identyfikacja ukrytych komponentów w szeregach czasowych metodami nieujemnej faktoryzacji macierzy	59

PORÓWNANIE ESTYMATORA NAJWIĘKSZEJ WIAROGODNOŚCI Z ESTYMATOREM NIEOBCIĄŻONYM ODSETKA PYTAŃ DRAŻLIWYCH W MODELU KRZYŻOWYM NIEZRANDOMIZOWANYCH ODPOWIEDZI

Stanisław Jaworski  <https://orcid.org/0000-0002-6169-2886>

Institut Ekonomii i Finansów

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

e-mail: stanislaw_jaworski@sggw.edu.pl

Streszczenie: Jednym z problemów w badaniach ankietowych jest szacowanie odsetka odpowiedzi na pytania drażliwe. Wymaga on stosowania specjalnych modeli odpowiedzi. Pierwszym tego typu modelem był model zrandomizowanych odpowiedzi [Warner 1965]. Obecnie istnieje wiele innych modeli. Wśród nich znajduje się krzyżowy model niezrandomizowanych odpowiedzi [Yu i in. 2008]. Estymator odsetka pytań drażliwych w tym modelu może przyjmować wartości spoza przedziału $\langle 0, 1 \rangle$. W pracy zostanie pokazany wpływ, jaki na własności tego estymatora ma jego zawężenie do przedziału $\langle 0, 1 \rangle$.

Słowa kluczowe: pytania drażliwe, krzyżowy model nierandomizowanych odpowiedzi

JEL classification: C83, C99

WSTĘP

W badaniach ankietowych możemy być zainteresowani oszacowaniem odsetka odpowiedzi na pytania drażliwe. Są to takie pytania, na które respondenci mogą celowo nie udzielić rzetelnej odpowiedzi. Pytania drażliwe wymagają stosowania specjalnych modeli, które pozwalają zachować anonimowość odpowiedzi respondenta przed ankierem. Pierwszym takim modelem był *model zrandomizowanych odpowiedzi* [Warner 1965]. Warner zaproponował, aby zadać respondentowi dwa przeciwstawne pytania, na przykład:

<https://doi.org/10.22630/MIBE.2022.23.2.4>

- a) *Czy był Pan uczciwy w sprawach podatkowych?*
 b) *Czy był Pan nieuczciwy w sprawach podatkowych?*

Respondent ma odpowiedzieć tylko na jedno z tych dwóch pytań, w zależności od wyniku przeprowadzonego doświadczenia losowego. Zgodnie z pomysłem Warnera wynik doświadczenia ma być znany jedynie respondentowi, przez co ankieter nie wie, na które pytanie jest udzielana odpowiedź. Ponieważ każdy respondent przeprowadza to samo doświadczenie, prawdopodobieństwo, że zostanie udzielona odpowiedź na pytanie pierwsze (albo drugie) jest znane.

W praktyce model Warnera nie zawsze daje się zastosować. Najogólniej mówiąc powodem jest natura ludzka. Po pierwsze ludzie nie chcą odpowiadać na pytania drażliwe, nawet przeciwstawne. Po drugie podejrzewają, że wynik doświadczenia jest tylko pozornie losowy. Z tego powodu model Warnera został zmodyfikowany. Pierwszą modyfikacją jest zastąpienie jednego z pytań drażliwych pytaniem neutralnym, na przykład: *Czy urodził się Pan w pierwszym kwartale roku?* Drugą modyfikacją jest sposób udzielania odpowiedzi, przez co można zrezygnować z przeprowadzania doświadczenia losowego, które nie tylko wzbudza u respondenta wspomniane powyżej podejrzenia, ale również niekorzystnie wydłuża czas przeprowadzania ankiety. W efekcie powstały *modele niezrandomizowanych odpowiedzi* [Yu i in. 2008].

Modele zrandomizowanych i niezrandomizowanych odpowiedzi zostały wprowadzone w celu lepszej współpracy z respondentem, co ma uwiarygodnić wyniki przeprowadzanych ankiet. Zwróćmy jednak uwagę na to, że zarówno randomizacja oraz zastąpienie pytania drażliwego neutralnym wprowadza do modelu odpowiedzi dodatkową niepewność. W efekcie estymatory dla odsetka pytań w takich modelach będą charakteryzować się większą wariancją, niż w przypadku, gdyby respondenci odpowiadali wprost na pytanie drażliwe w klasycznym *modelu jednej odpowiedzi*.

MODEL KRZYŻOWY NIEZRANDOMIZOWANYCH ODPOWIEDZI

W modelu krzyżowym niezrandomizowanych odpowiedzi zadawane są dwa pytania, drażliwe i neutralne. Jeżeli respondent może odpowiedzieć na oba twierdząco, wpisuje do ankiety *TAK*. Jeżeli na oba może odpowiedzieć przecząco, również wpisuje *TAK*. W przeciwnym razie wpisuje *NIE*. Przy czym ważne jest, aby oba pytania były tak dobrane, aby udzielane na nie odpowiedzi respondenta były realizacjami niezależnych zmiennych losowych.

Formalnie, niech Z oznacza zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym, która przyjmuje wartość 1, gdy respondent na oba pytania udzieliłby tej samej odpowiedzi oraz 0 w przeciwnym przypadku. Niech ρ oznacza prawdo-

podobieństwo przyjęcia przez Z wartości 1. Zatem

$$\rho = q\pi + (1 - q)(1 - \pi), \quad (1)$$

gdzie π i q oznaczają prawdopodobieństwa, że respondent odpowiedziałby twierdząco odpowiednio na pytanie drażliwe oraz neutralne. Próba niezależnych zmiennych losowych Z_1, \dots, Z_n o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa, co Z , opisuje wyniki ankiet przeprowadzonych wśród reprezentatywnej próby n respondentów. Estymatorem Największej Wiarygodności (*ENW*) prawdopodobieństwa ρ jest $\hat{\rho} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$. Jest on również estymatorem nieobciążonym dla ρ . Stąd na podstawie równania (1) można przyjąć, że

$$\hat{\pi} = \frac{\hat{\rho} - (1 - q)}{2q - 1} \quad (2)$$

jest nieobciążonym estymatorem prawdopodobieństwa π o wariancji

$$Var_{\pi}(\hat{\pi}) = \frac{\rho(1 - \rho)}{n(2q - 1)^2} = \frac{\pi(1 - \pi)}{n} + \frac{(1 - q)q}{n(2q - 1)^2}. \quad (3)$$

Zwróćmy uwagę, że estymator ten nie istnieje, gdy $q = 0.5$. Jest to przypadek, w którym $\rho = 0.5\pi + 0.5(1 - \pi) = 0.5$, co oznacza, że wyniki przeprowadzonych ankiet nie zależą od odsetka pytań drażliwych i stąd nie można go na ich podstawie oszacować. Dlatego w prezentowanym modelu zakłada się, że $q \neq 0.5$. W przypadku gdy $q = 0$ lub $q = 1$, model niezrandomizowanych odpowiedzi sprowadza się do modelu jednej odpowiedzi. Dlatego przyjmuje się założenie, że $q \in (0, 1) \setminus \{0.5\}$. Zauważmy, że wariancja estymatora odsetka pytań drażliwych w modelu niezrandomizowanych odpowiedzi, w porównaniu z modelem jednej odpowiedzi, jest większa o wartość $\frac{(1 - q)q}{n(2q - 1)^2}$. Jest to cena, jaką trzeba zapłacić za wiarygodność odpowiedzi respondenta.

Yu i in. [2008] zauważyli, że estymator $\hat{\pi}$ może przyjmować wartości mniejsze od zera, gdy $\hat{\rho} < (1 - q)$ oraz wartości większe niż jeden, gdy $\hat{\rho} > q$. Stąd zaproponowali oni dość naturalną modyfikację estymatora $\hat{\pi}$, określając tym samym *ENW* dla prawdopodobieństwa π :

$$\hat{\pi}_M = \max\{0, \min\{\hat{\pi}, 1\}\} \quad (4)$$

Udowodnili również, że estymator $\hat{\pi}$ oraz $\hat{\pi}_M$ są asymptotycznie równoważne. Stąd za podstawę konstrukcji asymptotycznych przedziałów ufności przyjęli parametry estymatora $\hat{\pi}$. W jednej wersji użyli oszacowania zarówno wartości średniej oraz wariancji, a w drugiej tylko wartości średniej. Druga wersja w

stosunku do pierwszej wymaga rozwiązywania dodatkowego równania kwadratowego.

PARAMETRY ESTYMATORA UCIĘTEGO

Niech $[x]$ oznacza cechę górną, a $\lceil x \rceil$ część całkowitą liczby rzeczywistej x . Zgodnie z tymi oznaczeniami

$$\begin{aligned} E_{\pi}(\hat{\pi}_M) &= \sum_{k=0}^n \max \left\{ \min \left\{ \frac{k/n - (1-q)}{2q-1}, 1 \right\}, 0 \right\} \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor nq \rfloor} 1 \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} + \sum_{k=\lfloor nq \rfloor+1}^{\lceil n(1-q) \rceil-1} \frac{k/n - (1-q)}{2q-1} \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} + \\ &+ \sum_{k=\lceil n(1-q) \rceil}^n 0 \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} \end{aligned} \quad (5)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \pi &= \sum_{k=0}^{\lfloor nq \rfloor} \frac{k/n - (1-q)}{2q-1} \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} + \\ &+ \sum_{k=\lfloor nq \rfloor+1}^{\lceil n(1-q) \rceil-1} \frac{k/n - (1-q)}{2q-1} \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} + \\ &+ \sum_{k=\lceil n(1-q) \rceil}^n \frac{k/n - (1-q)}{2q-1} \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} \quad , \end{aligned} \quad (6)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} E_{\pi}(\hat{\pi}_M) - \pi &= \sum_{k=0}^{\lfloor nq \rfloor} \left(1 - \frac{k/n - (1-q)}{2q-1} \right) \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} - \\ &- \sum_{k=\lceil n(1-q) \rceil}^n \frac{k/n - (1-q)}{2q-1} \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k}. \end{aligned} \quad (7)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \sum_{k=\lceil n(1-q) \rceil}^n \frac{k/n - (1-q)}{2q-1} \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-k} &= \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor nq \rfloor} \frac{((n-k)/n - (1-q))}{2q-1} \binom{n}{n-k} \rho^{n-k} (1-\rho)^k, \quad (8) \end{aligned}$$

otrzymujemy równanie na obciążenie $Bias_\pi(\hat{\pi}_M)$ estymatora $\hat{\pi}_M$

$$\begin{aligned} Bias_\pi(\hat{\pi}_M) &= E_\pi(\hat{\pi}_M) - \pi = \\ &= \frac{1}{2q-1} \sum_{k=0}^{\lfloor nq \rfloor} \binom{n}{k} \left(q - \frac{k}{n} \right) \left[(1-\rho)^{n-k} \rho^k - (1-\rho)^k \rho^{n-k} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Z równania (9) wynika, że estymator $E_\pi \hat{\pi}_M$ jest obciążony. Przy założeniu że $q < 0.5$, obciążenie to jest dodatnie dla $\rho > 0.5$ i ujemne dla $\rho < 0.5$. Stąd dla $q < 0.5$ zachodzi $Bias_\pi(\hat{\pi}_M) > 0 \iff \pi < 0.5$, ponieważ z równania (1) wynika, że $\rho > 0.5 \iff \pi < 0.5$ (dla $q < 0.5$). W szczególności można pokazać, że

$$Bias_\pi(\hat{\pi}_M) = -Bias_{1-\pi}(\hat{\pi}_M) < 0 \quad (\forall \pi, q \in (0, 0.5)) \quad (10)$$

Znak obciążenia estymatora zależy więc od tego, czy wartość interesującego nas prawdopodobieństwa π jest większa, czy mniejsza od 0.5. Na przykład, jeżeli pytanie drażliwe oraz pytanie neutralne dotyczą rzadkich zjawisk, to ENW dla π będzie dawać zawyżoną wartość oszacowania. Z kolei estymator nieobciążony może w takim przypadku dawać wartości ujemne z prawdopodobieństwem $P_\pi\{\hat{\pi} < 0\} = 1 - F_{n,\rho}(\lfloor n(1-q) \rfloor)$, gdzie $F_{n,\rho}$ oznacza dystrybuantę rozkładu dwumianowego z parametrami n i ρ (prawdopodobieństwo sukcesu).

Korzystając z równości $Var_\pi(\hat{\pi}_M) = E_\pi \hat{\pi}_M^2 - (E_\pi \hat{\pi}_M)^2$ wariancję estymatora $\hat{\pi}_M$ możemy wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} Var_\pi(\hat{\pi}_M) &= F_{n,\rho}(\lfloor nq \rfloor) + \\ &+ \sum_{k=\lfloor nq \rfloor+1}^{\lfloor n(1-q) \rfloor-1} \left(\frac{\frac{k}{n} - 1 - q}{2q-1} \right)^2 \binom{n}{k} \rho^k (1-\rho)^{n-1} - (\pi + Bias(\hat{\pi}_M))^2 \end{aligned} \quad (11)$$

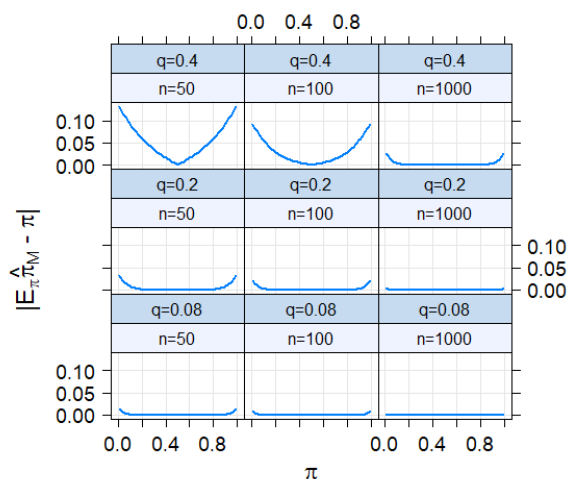
$\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x .

PORÓWNANIE PARAMETRÓW

Porównanie wartości oczekiwanych estymatorów $\hat{\pi}_M$ oraz $\hat{\pi}$ zostanie przedstawione dla kombinacji $n \in \{50, 100, 1000\}$ oraz $q \in \{0.08, 0.2, 0.4\}$ względem $\pi \in (0.1, 0.49)$. Wykres na rysunku 1 przedstawia zależność $|E_\pi \hat{\pi}_M - \pi|$ od π . Zauważmy, że $Bias_\pi(\hat{\pi}_M) = E_\pi \hat{\pi}_M - \pi = E_\pi \hat{\pi}_M - E_\pi \hat{\pi}$. Wykres na rysunku 1 jest symetryczny względem prostej $\pi = 0.5$, co wynika z równania (9). Bezwzględne obciążenie estymatora $\hat{\pi}_M$ może być problematyczne dla π bliskich wartości 0 oraz 1. To jak duży problem może stanowić takie obciążenie, zależy od badanego problemu. Z niedoszacowania lub przeszacowania

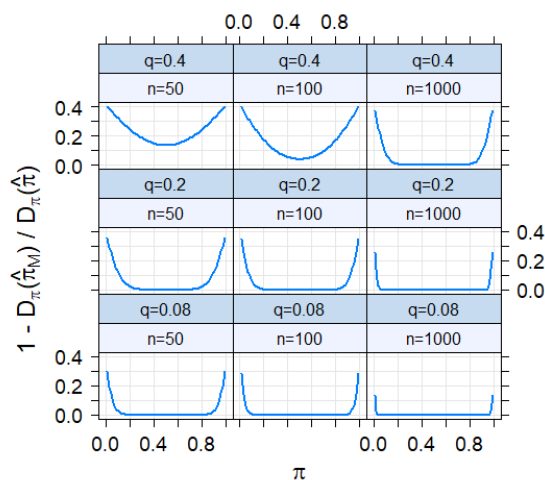
skali badanego zjawiska mogą wynikać całkiem wymierne koszty społeczne lub finansowe. Nieważne jest więc, czy obciążenie, które zostało zilustrowane na rysunku 1 wydaje się nam duże czy małe.

Rysunek 1. Wykres zbioru $\{(\pi, |E_{\pi} \hat{\pi}_M - \pi|) : \pi \in \langle 0.01, 0.99 \rangle\}$ dla $q \in \{0.08, 0.2, 0.4\}$ oraz $n \in \{50, 100, 1000\}$.



Źródło: obliczenia własne

Rysunek 2. Wykres zbioru $\{(\pi, (D_{\pi} \hat{\pi} - D_{\pi} \hat{\pi}_M) / D_{\pi} \hat{\pi}) : \pi \in \langle 0.01, 0.99 \rangle\}$ dla $q \in \{0.08, 0.2, 0.4\}$ oraz $n \in \{50, 100, 1000\}$.



Źródło: obliczenia własne

Zmodyfikowany estymator $\hat{\pi}_M$ wartości ujemne estymatora $\hat{\pi}$ zamienia na zero, a wartości powyżej jedynki na jeden. Powoduje to jego obciążenia, ale jednocześnie zmniejsza zróżnicowanie. Na rysunku 2 zilustrowano względną różnicę odchylenia standardowego $D_\pi(\hat{\pi}_M)$ estymatora uciętego względem odchylenia standardowego $D_\pi(\hat{\pi})$ estymatora nieobciążonego.

Na przykład dla wartości π zbliżonej do 0.01 lub 0.99 odchylenie standardowe estymatora ENW może być mniejsze o ok. 30% od odchylenia standardowego estymatora nieobciążonego. Mniejsze odchylenie standardowe może stanowić rekompensatę za obciążenie, co może okazać się istotne przy szacowaniu skali zjawisk rzadkich, do których często odnoszą się pytania drażliwe. Na przykład liczba zarejestrowanych w Polsce przypadków HIV w 2021 wyniosła 1173 [NIZP 2022], co stanowi ok. 3‰ populacji Polski.

PRZEDZIAŁY UFNOŚCI

Niech $CI(q, E)$ oznacza przedział ufności dla π , który jest konstruowany przy zadanym q w oparciu o estymator E . Niech $d(CI(q, E))$ oznacza długość tego przedziału oraz $\bar{d}_\pi(CI(q, E))$ jego średnią długość pod warunkiem, że przedział ten pokrywa szacowany parametr π . Dokładniej mówiąc $\bar{d}_\pi(CI(q, E))$ jest warunkową wartością oczekiwaną $E_\pi[d_\pi(CI(q, E)) | \pi \in CI(q, E)]$. W szczególności rozważymy przedziały o następującej postaci:

$$CI(0.08, \hat{\pi}) = \{\pi \in (0, 1) : (\hat{\pi} - \pi)^2 / \text{Var}_\pi(\hat{\pi}) < 1.96^2\}$$

$$CI(0.08, \hat{\pi}_M) = \{\pi \in (0, 1) : (\hat{\pi}_M - E_\pi \hat{\pi}_M)^2 / \text{Var}_\pi(\hat{\pi}_M) < 1.96^2\}.$$

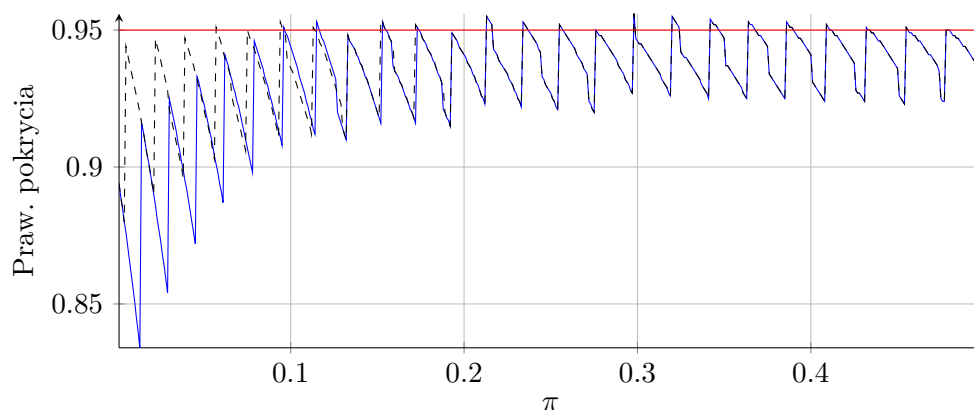
Są to asymptotyczne przedziały ufności, których konstrukcja oparta jest na Centralnym Twierdzeniu Granicznym. Jako poziom ufności przyjęto 0.95. Wartość 1.96 jest kwantylem rzędu 0.975 standardowego rozkładu normalnego. Wartość $q = 0.08$ została dobrana według przykładowego pytania neutralnego zamieszczonego w pracach takich autorów, jak Horvitz i in. [1967], Greenberg i in. [1969] oraz Yu i in. [2008].

Asymptotyczne przedziały ufności nie trzymają założonego poziomu ufności. Na rysunku 3 oraz 4 zostały pokazane rzeczywiste prawdopodobieństwa pokrycia parametru π dla rozmiaru próby $n = 50$ oraz $n = 100$.

Prawdopodobieństwa pokrycia parametru przez oba rozważane przedziały ufności są prawie identyczne od wartości ok. 0.1. Wykresy pokrycia są symetryczne względem wartości 0.5, dlatego na rysunku 3 oraz rysunku 4 przedstawiono je tylko dla $\pi \in (0, 0.5)$. Zwróćmy uwagę, że dla większości wartości prawdopodobieństwa π rzeczywiste prawdopodobieństwo pokrycia jest poniżej założonego poziomu ufności 0.95. Ma to miejsce także wtedy, gdy rozmiar próby jest stosunkowo wysoki (dla $n = 100$). Zieliński [2021] zaproponował, aby

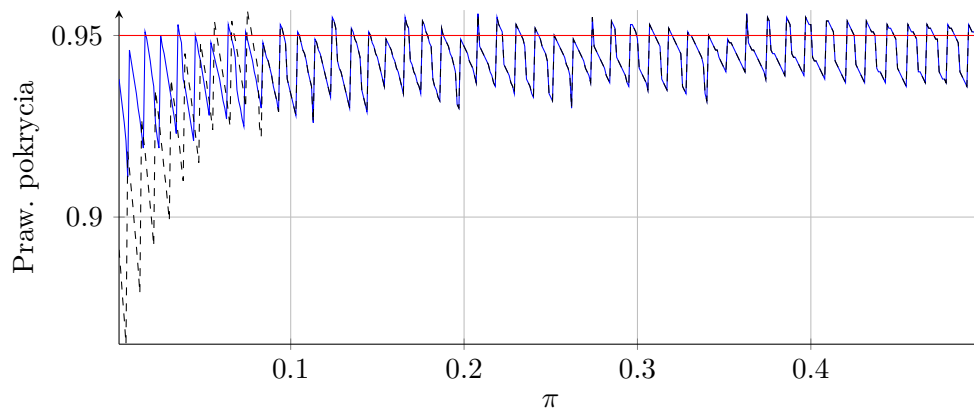
w takim przypadku stosować konstrukcję dokładnego przedziału ufności dla prawdopodobieństwa π . Ogólną konstrukcję takiego przedziału podali [Clopper i Pearson \[1934\]](#).

Rysunek 3. Prawdopodobieństwo pokrycia dla $n = 50$. Ciągła linia dla $\hat{\pi}$, przerywana dla $\hat{\pi}_M$.



Źródło: obliczenia własne

Rysunek 4. Prawdopodobieństwo pokrycia dla $n = 100$. Ciągła linia dla $\hat{\pi}$, przerywana dla $\hat{\pi}_M$.

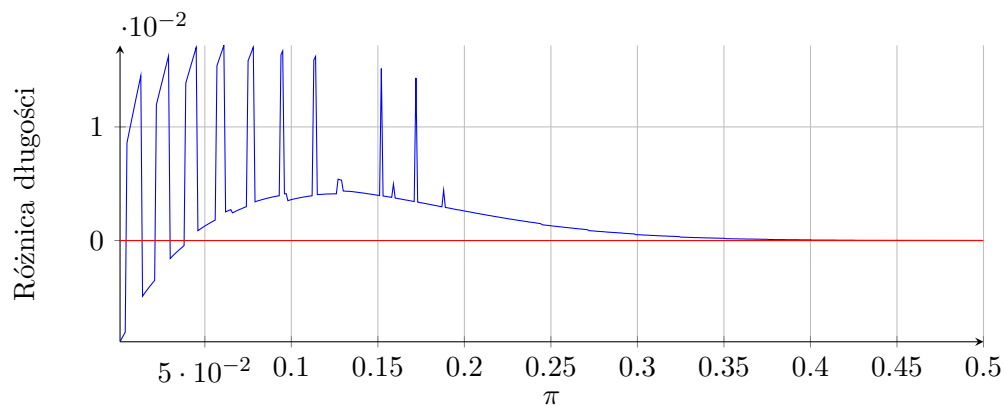


Źródło: obliczenia własne

Na rysunku 5 oraz rysunku 6 przedstawiono różnicę między średnimi długościami rozważanych przedziałów, odpowiednio dla $n = 50$ oraz $n = 100$. Średnie długości przedziałów zostały wyznaczone pod warunkiem, że dany

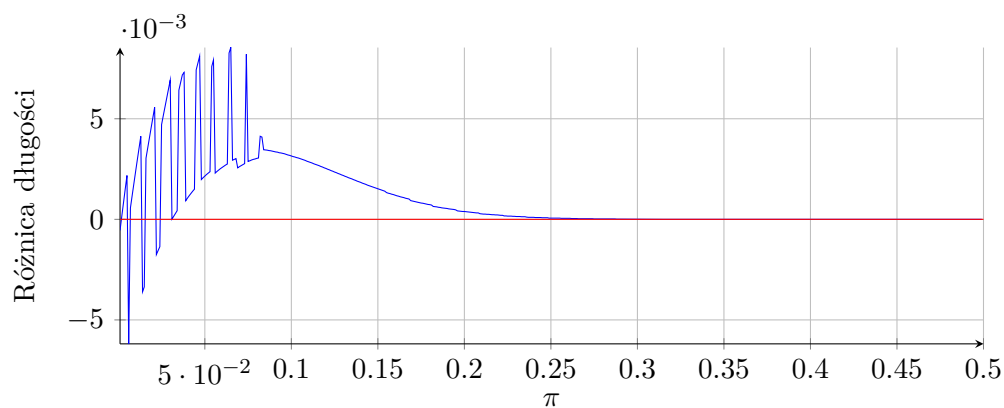
przedział pokrywa nieznaną wartość parametru π . Zauważmy, że oba przedziały dla $\pi = 0.1$ dają praktycznie to samo prawdopodobieństwo pokrycia parametru π , z tym że przedziały ufności oparte na estymatorze $\hat{\pi}_M$ dają średnio węższe przedziały niż te oparte na estymatorze $\hat{\pi}$.

Rysunek 5. Różnica $\overline{d_\pi C(0.08, \hat{\pi})} - \overline{d_\pi C(0.08, \hat{\pi}_M)}$ względem $\pi \in (0, 0.5)$, dla $n = 50$.



Źródło: obliczenia własne

Rysunek 6. Różnica $\overline{d_\pi C(0.08, \hat{\pi})} - \overline{d_\pi C(0.08, \hat{\pi}_M)}$ względem $\pi \in (0, 0.5)$, dla $n = 100$.

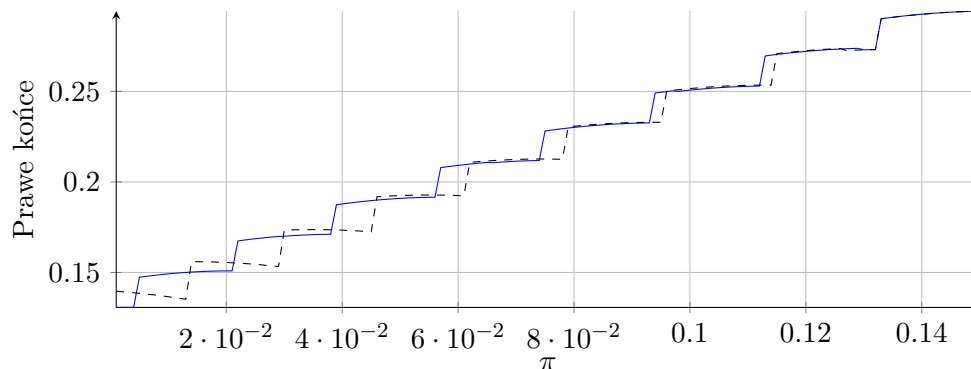


Źródło: obliczenia własne

Charakterystyczny grzebień dla różnicy przeciętnych długości wynika z tego, że mamy do czynienia z rozkładem dyskretnym. W efekcie końce przedziałów ufności obu przedziałów nie pokrywają się ze sobą w charakterystyczny

sposób (rysunek 7).

Rysunek 7. Prawe końce przedziałów ufności dla $\pi \in (0, 0.15)$ oraz dla $n = 50$. Ciągła linia dla $\hat{\pi}$, przerywana dla $\hat{\pi}_M$.



Źródło: obliczenia własne

PODSUMOWANIE

Jednym z problemów w badaniach ankietowych jest szacowanie odsetka odpowiedzi na pytania drażliwe. Respondenci albo nie chcą opowiadać na takie pytania, albo nie udzielają wiarygodnych odpowiedzi. W celu poprawy współpracy ankietera z respondentami wymyślono dla takich pytań specjalne modele. Wśród nich można wyróżnić modele zrandomizowanych i niezrandomizowanych odpowiedzi. W odróżnieniu do typowego modelu jednej odpowiedzi, w którym respondent odpowiada wprost na postawione pytanie drażliwe, respondent może ukryć swoją odpowiedź. Praca dotyczy estymatora odsetka odpowiedzi na pytania drażliwe w krzyżowym modelu niezrandomizowanych odpowiedzi. Estymator ten został zaproponowany w pracy Yu i in. [2008]. Niestety estymator ten może przyjmować wartości ujemne oraz większe od jeden, co wykracza poza zakres dopuszczalnych wartości. Naturalnym podejściem w takiej sytuacji jest obcięcie tego estymatora do przedziału wartości dopuszczalnych. W ten sposób powstaje inny estymator, którego własności mogą się różnić od jego wersji pierwotnej. Faktycznie pierwszy wymieniony estymator jest estymatorem nieobciążonym, a estymator zmodyfikowany (ucięty) jest estymatorem największej wiarygodności. W pracy wyznaczono obciążenie estymatora największej wiarygodności oraz jego wariancję. Oba estymatory zostały porównane ze względu na swoje parametry, wartość oczekiwaną oraz wariancję. Dodatkowo porównano prawdopodobieństwa pokrycia szacowanego odsetka pytań drażliwych oraz średnie długości przedziałów ufności konstruowanych

w oparciu o centralne twierdzenie graniczne. Zgodnie z oczekiwaniami *ENW* charakteryzuje się mniejszą wariancją. Dla pytań drażliwych dotyczących bardzo rzadkich zjawisk (rzadszych niż 10%) wariancja tego estymatora może być mniejsza nawet o 30% od wariancji estymatora nieobciążonego. Niestety, im rzadsze zjawisko, tym większe obciążenie *ENW*. Zmniejszenie wariancji odbywa się kosztem zwiększenia obciążenia, co może mieć zarówno korzystny, jak i niekorzystny wpływ na przedziały ufności konstruowane w oparciu o *ENW*. W pracy zbadano ten wpływ na prawdopodobieństwo pokrycia szacowanego odsetka oraz na średnią długość przedziału ufności (przy warunku, że pokrywa on szacowany parametr). Dla zjawisk drażliwych, obejmujących ok. 10% badanej populacji wpływ ten może być pozytywny, ponieważ nie zmienia prawdopodobieństwa pokrycia, za to generalnie zmniejsza długość przedziału ufności (dla próby rozmiaru $n \in \{50, 100\}$ oraz pytania neutralnego obejmującego 8% badanej populacji).

BIBLIOGRAFIA

- Clopper C. J., Pearson E. S. (1934) The Use of Confidence or Fiducial Limits Illustrated in the Case of Binomial. *Biometrika*, 26, 404-413.
- Greenberg B. G., Abu-Ela A. A., Simons W. R., Horvitz D. G. (1969) The Unrelated Question Randomized Response Model: Theoretical Framework. *Journal of the American Statistical Association*, 64, 520-539.
- NZIP (2022) Zakażenia HIV i zachorowania na AIDS w Polsce. Narodowy Instytut Zdrowia Publicznego. http://wwwold.pzh.gov.pl/oldpage/epimeld/hiv_aids/index.htm (pobrane: 27.05.2022)
- Horvitz D. G., Simons W. R. (1967) The Unrelated Question Randomized Response Model. *Proceedings of the Social Statistics Section. American Statistical Association*, 65-67.
- Warner S. L. (1965) Randomized Response: A Survey Technique for Eliminating Evasive Answer Bias. *Journal of the American Statistical Association*, 60, 63-69.
- Yu J.-W., Tian G.-L., Tang M.-L. (2008) Two New Models for Survey Sampling with Sensitive Characteristic: Design and Analysis. *Metrika* 67, 251-263.
- Zieliński W. (2021) Przedział ufności dla odsetka pytań drażliwych. *Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych*, (22)2, 51-60.



**COMPARISON OF THE MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATOR
WITH THE UNBIASED ESTIMATOR FOR THE FRACTION
OF SENSITIVE QUESTIONS IN THE NON-RANDOMIZED
CROSSWISE MODEL**

Abstract: One of the problems in surveys is estimating the fraction of responses to sensitive questions. It requires the use of special response models. The first model of this kind was the randomized response model [Warner 1965]. There are many other models nowadays. Among them is the non-randomized crosswise model [Yu i in. 2008]. The estimator of the fraction of the sensitive questions in this model can take values outside the range of the interval $\langle 0,1 \rangle$. There is shown in the paper how the truncation of the estimator to the interval is influencing its properties.

Keywords: sensitive questions, nonrandomized crosswise response model

JEL classification: C83, C99

WEKTOROWA SYNTETYCZNA MIARA EFEKTYWNOŚCI FIRMY DLA POLSKICH SPÓŁEK PUBLICZNYCH

Krzysztof Kompa  <https://orcid.org/0000-0002-2810-6654>
Dorota Witkowska  <https://orcid.org/0000-0001-9538-9589>
Industrial Psychology & People Management
College of Business & Economics
University of Johannesburg, Johannesburg, South Africa
e-mail: kkompa@uj.ac.za; mariaw@uj.ac.za

Streszczenie: Celem badań jest skonstruowanie agregatów, które będą opisywać kondycję przedsiębiorstw w wielowymiarowej przestrzeni wskaźników finansowych i będą przydatne do porównań między przedsiębiorstwami. Skonstruowano wektorowe syntetyczne miary efektywności firmy VSME. Badaniami objęto spółki z GPW w Warszawie notowane nieprzerwanie w latach 2010-2019 i posiadające pełną ewidencję wskaźników finansowych. Wybrano 90 spółek i ponad 20 wskaźników finansowych. Wykazano, że zaproponowane wektorowe miary VSME dobrze odzwierciedlały standing spółek i pozwalały na ich skuteczne porównywanie, także w czasie.

Słowa kluczowe: efektywność firmy, spółki publiczne, wielowymiarowe metody porównawcze, wskaźniki finansowe, GPW w Warszawie

JEL classification: G32, L25, M21

WSTĘP

W myśl teorii przedsiębiorstwa, głównym celem firmy jest maksymalizacja jej wartości, co kreuje jej pozycję konkurencyjną i przekłada się m. in. na wysoką cenę sprzedaży, atrakcyjną pozycję przy zakupach i fuzjach, czy ułatwiony dostęp do rynkowych źródeł finansowania. Implikuje zamożność akcjonariuszy poprzez wpływ na wartość rynkową ich portfeli i na decyzje inwestycyjne, szczególnie te podejmowane w oparciu o analizę fundamentalną [Dietrich, Krafft 2014]. W konsekwencji ocena wartości firmy na tle innych uczestników rynku cieszy się dużym zainteresowaniem nauki i praktyki gospodarczej.

<https://doi.org/10.22630/MIBE.2022.23.2.5>

Nowoczesnym podejściem do oceny kondycji ekonomiczno-finansowej przedsiębiorstw jest wielowymiarowa analiza porównawcza. Metody te pozwalają na konstruowanie miar zagregowanych z wielu różnych zmiennych, opisujących kondycję przedsiębiorstwa. Bierze się przy tym pod uwagę główne czynniki ekonomiczno-finansowe, takie jak płynność, poziom zadłużenia, efektywność zarządzania, rentowność itp. [Bacidore i in. 1997; Bulgurcu 2012].

Nasza hipoteza mówi, że przy zastosowaniu metodologii zaproponowanej przez Nermenda [2010], możliwe jest skonstruowanie klasy wektorowych miar syntetycznych, które będą opisywać pozycję firm w wielowymiarowej przestrzeni wskaźników finansowych i będą przydatne do porównań w czasie. Ze względu na charakter zmiennych objaśniających taką miarę będziemy nazywać wektorową syntetyczną miarą efektywności firmy VSME. Naszym celem jest skonstruowanie miar VSME oraz ich weryfikacja z wykorzystaniem spółek notowanych na GPW w Warszawie¹.

Badaniami objęto spółki z portfeli indeksów WIG20, WIG30, mWIG40 i sWIG80 Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Wybrano jednak tylko te spółki, które były notowane przez cały okres badania, tj. w latach 2010-2019 i posiadały pełną ewidencję finansową. Wykorzystano wielowymiarowe miary wektorowe zbudowane dla wszystkich analizowanych spółek oraz osobno – dla spółek finansowych i niefinansowych.

PRZEGLĄD LITERATURY

Istnieje wiele opracowań dotyczących ewaluacji wartości firmy. Wymieńmy przynajmniej niektóre z nich, aby umiejscowić nasze badania w takim kontekście. I tak, wiele podejść do wyceny opiera się na teoriach trade-off/trade-up, hierarchii źródeł finansowania, agencji i sygnalizacji [Sudiyatno i in. 2020], ponadto na teorii dywidendy i wróbla w garści [Winarto 2015]. Wartość firmy rozpatruje się także w kontekście teorii zasobowej i teorii wartości dodanej, teorii preferencji, teorii oczekiwań czy teorii ekonomii behawioralnej [Skrzek-Lubasińska 2020]. Szczególnie bliskie jest nam jednak podejście Thavikulwata [2004], który sprowadza typologię wyceny wartości do pięciu metodyk: wartości księgowej, wartości rynkowej, wartości skapitalizowanej, skorygowanej wartości netto i oceny dedukcyjnej.

Pierwszą propozycją wykorzystania miary taksonomicznej do porównań spółek publicznych była tzw. taksonomiczna miara atrakcyjności inwestycyjnej, użyta w procesie budowy portfela inwestycyjnego [Tarczyński 1994; Łuniewska, Tarczyński 2022]. W następstwie podjęto wiele prób budowy syntetycznych miar taksonomicznych, np.:

¹ Wybór spółek publicznych wynika z faktu, że są one zobowiązane do publikowania swoich sprawozdań finansowych. Dostawcą danych do tego badania jest Notoria Serwis.

- do oceny stanu przedsiębiorstw (m. in. [Fura 2019; Kompa 2019; Tarczyński, Tarczyńska-Łuniewska 2017]);
- do wyboru spółek do budowy portfela inwestycyjnego (m. in. [Staszak 2018; Tarczyński 2002; Witkowska, Kompa, Staszak 2021]) czy
- do objaśnienia zależności pomiędzy kondycją finansową firm, a ich wynikami (m.in. [Juszczak 2015; Witkowska, Kuźnik 2019]).

Istotną wadą tych miar jest brak możliwości rozpoznawania obiektów lepszych od wzorca, co istotnie ogranicza aplikacje w analizach przekrojowo-czasowych².

W konsekwencji skupiamy się na wykorzystaniu miar wektorowych [Nermend 2010], wolnych od w/w wad, do syntetycznego pomiaru efektywności przedsiębiorstw. W związku z tym będziemy (a) konstruować wektorowe taksonomiczne miary efektywności firm VSME, (b) wykorzystywać je do grupowania firm w homogeniczne klastry oraz (c) sprawdzać persystencję pozycjonowania firm, korzystając z syntetycznej miary odległości pomiędzy klastrami, do których sklasyfikowane są firmy w kolejnych latach badania.

DANE I METODY

Do realizacji założonego celu wykorzystano spółki notowane w latach 2010-2019 na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Uwzględniono tylko te spółki, które w dniu 30 grudnia 2019 roku tworzyły portfele indeksów: WIG20, WIG30, mWIG40, sWIG80, były notowane w całym okresie badawczym, a ich raporty roczne były dostępne w zasobach Notoria Serwis. Ostatecznie do badania wybrano 73 spółki niefinansowe i 17 spółek finansowych, w tym 8 banków.

Stan i zmiany kondycji ocenianych przedsiębiorstw odwzorowywane są w różny sposób, najczęściej za pomocą pojedynczych wskaźników finansowych, takich jak zwrot z kapitału własnego (ROE) i aktywów (ROA), zwrot ze sprzedaży (ROS), zwrot z zainwestowanego kapitału (ROIC), całkowity zwrot dla akcjonariuszy (TSR), wartość rynkowa przedsiębiorstwa czy wskaźnik Q Tobina.

W tym badaniu przyjęto, że kondycję przedsiębiorstwa w kolejnych latach wyraża wartość syntetycznej miary wektorowej w wielowymiarowej przestrzeni wybranych wskaźników finansowych. Tabela 1 zawiera listę wybranych wskaźników z zaznaczeniem stymulant (S) i destymulant (D). Zaznaczono również, które wskaźniki zostały wykorzystane do budowy miar dla banków, a które dla pozostałych przedsiębiorstw.

² Uwaga: (a) wartości miar wyznaczone w kolejnych okresach badawczych, przy wzorcach zdefiniowanych dla każdego okresu osobno, nie są porównywalne; porównywalne są tylko pozycje porządkowanych obiektów; (b) obliczanie miar z nowym wzorcem globalnym daje co prawda porównywalne wyniki dla wszystkich paneli, ale wyniki te nie są porównywalne z poprzednimi.

Tabela 1. Zestawienie wskaźników finansowych stosowanych do oceny przedsiębiorstw bankowych i niebankowych

Wskaźnik	Banki	Pozostałe niebankowe	Typ zmiennej
Płynność bieżąca		X	S
Płynność szybka		X	S
Wskaźnik zadłużenia		X	D
Udział kapitału własnego w finansowaniu majątku trwałego	X		S
Stopa zwrotu z aktywów ROA	X	X	S
Rentowność kapitału własnego ROE	X	X	S
Rentowność sprzedaży ROS	X	X	S
Marża zysku operacyjnego OPM	X	X	S
Wskaźnik aktywów przychodowych	X		S
Wskaźnik rotacji należności		X	D
Wskaźnik rotacji zapasów		X	D
Wskaźnik rotacji zobowiązań		X	D
Wskaźnik rotacji aktywów		X	S
Produktywność majątku trwałego	X		S
Koszty działania/Aktywa	X		D
Koszty działania/Wynik na działalności bankowej	X		D
Koszty działania/Dochody z działalności podstawowej	X		D
Wskaźnik P/E (Rentowność zysków)	X	X	S
Wskaźnik wartości rynkowej (market-to-book) P/BV	X	X	S
Współczynnik adekwatności kapitałowej CAR	X		S
Wskaźnik płynności MFW	X		S
EBITDA/aktywa		X	S

Uwagi: X oznacza wybór wskaźników finansowych dla banków i spółek niebankowych; dodatkowe cieniowanie oznacza zmienne wykorzystane w badaniu łącznym obejmującym wszystkie spółki; S, D oznaczają typ zmiennych odpowiednio stymulanty lub de-stymulanty.

Źródło: opracowanie własne

Należy podkreślić, że dobór zmiennych do konstrukcji miary syntetycznej jest zawsze arbitralny³. W tej pracy wykorzystano wskaźniki najczęściej stosowane w ocenie przedsiębiorstw, uwzględniając reprezentantów wszystkich grup

³ Chyba że sformułowano kryteria optymalizacyjne doboru zmiennych. Dla przykładu w pracy [Witkowska i in. 2021] zestaw wskaźników finansowych do konstrukcji miary syntetycznej jest wynikiem optymalizacji funkcji opisującej stopy zwrotu z portfela oraz jego ryzyko.

wskaźników finansowych, przy jednakowym ich wpływie na wartość miernika (brak ważenia). Takie podejście jest dobrze ugruntowane w literaturze przedmiotu.

Metodyka obliczania wektorowej syntetycznej miary efektywności (VSME) opiera się na technice Vector Measure Construction Method [Nermend 2017; Kompa, Witkowska 2021] i jest następująca. Niech sytuacja każdego z N przedsiębiorstw ($i = 1, 2, \dots, N$) opisana jest przez M zmiennych diagnostycznych x_{jt}^i (gdzie. $i = 1, 2, \dots, N$; $j = 1, 2, \dots, M$), i obserwowana w t kolejnych okresach $t = 1, 2, \dots, T$. Niech stan przedsiębiorstw będzie oceniany w kolejnych okresach względem okresu odniesienia $t_0 \in [1, T]$. Zakłada się, że oceniane obiekty są reprezentowane przez wektory $\vec{X}_t^i = (x_{1t}^i, x_{2t}^i, \dots, x_{jt}^i, \dots, x_{Mt}^i)$ w M -wymiarowej przestrzeni cech. Analizowane są rzuty tych wektorów na pewien wektor pomiarowy $\vec{\omega}_{t_0} = (\omega_{1t_0}, \omega_{2t_0}, \dots, \omega_{Mt_0})$, rozpięty pomiędzy końcami dwóch wektorów: $\vec{X}_{t_0}^p = (x_{1t_0}^p, x_{2t_0}^p, \dots, x_{Mt_0}^p)$ – wzorca oraz $\vec{X}_{t_0}^{ap} = (x_{1t_0}^{ap}, x_{2t_0}^{ap}, \dots, x_{Mt_0}^{ap})$ – anty-wzorca, wyznaczonego dla okresu odniesienia t_0 i niezmiennego w całym okresie badania. Wzorzec rozumiany jest jako obiekt hipotetycznie najlepszy według przyjętych kryteriów, a anty-wzorzec - obiekt najgorszy⁴. W rezultacie długość każdego wektora \vec{X}_t^i (wektora firmy) wzdłuż wektora $\vec{\omega}_{t_0}$ (wektor pomiarowy) jest określona krotnością długości wektora $\vec{\omega}_{t_0}$. Zatem zdefiniowana tu wektorowa syntetyczna miara efektywności VSME ma następującą postać:

$$VSME_{it} = \frac{\sum_j [(z_{jt}^i - z_{jt_0}^{ap}) \omega_{jt_0}]}{\sum_j \omega_{jt_0}} \quad \text{dla } i \in [1; N], j \in [1; M], t \in [1; T] \quad (1)$$

gdzie i oznacza numer badanej spółki (i -tą firmę), N - liczbę spółek, j - numer zmiennej objaśniającej (j -ty wskaźnik finansowy), M - liczbę wskaźników opisujących spółkę (wymiar przestrzeni wektorowej), t - rok badania, t_0 - rok referencyjny badania, T - liczba okresów, ω_{jt_0} - różnica znormalizowanych j -tych współrzędnych wzorca i anty-wzorca w M -wymiarowej przestrzeni wektorowej:

$$\omega_{jt_0} = z_{jt_0}^p - z_{jt_0}^{ap} \quad (2)$$

$z_{jt_0}^p, z_{jt_0}^{ap}, z_{jt_0}^i$ - znormalizowane j -te składowe wektorów odpowiednio wzorca, anty-wzorca i i -tej firmy dla okresu odniesienia t_0 , z_{jt}^i - j -te składowe wektora spółki znormalizowane dla pozostałych t okresów badawczych. Wszystkie składowe wyznaczone są ze zbiorów stymulant \mathbf{S} i destymulanty \mathbf{D} jako:

⁴ Bardziej szczegółowe omówienie wyboru wzorca i anty-wzorca można znaleźć w pracy [Nermend, 2010].

$$z_{jt_0}^p = (x_{jt_0}^i - \bar{x}_{jt_0}^i) / S_{jt_0} \quad z_{jt}^p = (x_{jt}^i - \bar{x}_{jt_0}^i) / S_{jt_0} \quad t \neq t_0 \quad (3a)$$

$$z_{jt_0}^p = \begin{cases} \max_{i=1,2,\dots,N} \{z_{jt_0}^i\}; & x_{jt}^i \in S \\ \min_{i=1,2,\dots,N} \{z_{jt_0}^i\}; & x_{jt}^i \in D \end{cases} \quad z_{jt_0}^{ap} = \begin{cases} \max_{i=1,2,\dots,N} \{z_{jt}^i\}; & x_{jt_0}^i \in D \\ \min_{i=1,2,\dots,N} \{z_{jt}^i\}; & x_{jt_0}^i \in S \end{cases} \quad (3b)$$

gdzie: \bar{x}_{jt_0}, S_{jt_0} - wartość średnia i odchylenie standardowe j -tej zmiennej, odpowiednio:

$$\bar{x}_{jt_0} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{jt_0}^i, \quad S_{jt_0} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{jt_0}^i - \bar{x}_{jt_0})^2} \quad (4)$$

Choć sama wartość miary nie ma interpretacji ekonomicznej, to im wyższa jej wartość, tym lepsza sytuacja ocenianego obiektu. Miara VSME jest odporna na występowanie obiektów lepszych od wzorca. Można ją zatem stosować zarówno do danych przekrojowych, jak i przekrojowo-czasowych, nie zmieniając wzorca ustalonego w pierwszym podokresie badania, a obliczone wartości zagregowane są porównywalne w całym przedziale badawczym.

Grupowanie wszystkich badanych firm w cztery klastry odbywa się według następujących reguł decyzyjnych:

Klasa	Efektywność firmy	Reguła klasyfikacji
I	bardzo wysoka	$VSME_{it} \geq \overline{VSME}_t + S_{VSMEt}$
II	wysoka	$\overline{VSME}_t + S_{VSMEt} > VSME_{it} \geq \overline{VSME}_t$
III	średnia	$\overline{VSME}_t > VSME_{it} \geq \overline{VSME}_t - S_{VSMEt}$
IV	niska	$\overline{VSME}_t - S_{VSMEt} > VSME_{it}$

gdzie dla każdego $t=2010, 2011, \dots, 2019$: $VSME_{it}$ – wartość miernika szacowana dla i -tej firmy w t -tym roku, $\overline{VSME}_t, S_{VSMEt}$ – średnia wartość i odchylenie standardowe miary w t -tym roku.

Klasyfikacja według (5) generuje cztery uporządkowane skupienia firm, przy czym każda firma może być grupowana do innego skupienia w różnych latach analizy. O przynależności firm do skupienia w całym okresie badawczym decyduje zasada majoryzacji, tj. firma należy do tego klastra, do którego należy najczęściej. Interesujące jest też, które firmy są zaliczane do tych samych skupień w kolejnych latach, a które najczęściej zmieniają swoje zaszeregowanie. Do oceny poziomu persystencji stosuje się miarę [Mazurkiewicz 2002]:

$$W = \sum_{k=0}^3 \frac{y_k}{2^k} \quad (6)$$

gdzie y_k - udział odległości równy k ($k=0, 1, 2, 3$) wśród klas. Wartość miary W jest równa 1, jeśli firma nie zmienia klasy. Mniejsza wartość W oznacza mniejszą stabilność efektywności firmy.

WYNIKI EMPIRYCZNE

Ze względu na różnorodność zbioru wskaźników opisujących firmy różnych typów, miary syntetyczne wyznaczono osobno (a) dla banków oraz dla pozostałych przedsiębiorstw w podziale na (b) przedsiębiorstwa finansowe inne niż banki oraz (c) przedsiębiorstwa niefinansowe, a także dla (d) wszystkich przedsiębiorstw łącznie. Miary syntetyczne dla firm sklasyfikowanych jako (a)-(c) obliczono przy użyciu różnych zestawów po 14 zmiennych (tabela 1) i oznaczono $VSME_{14}^b$ – dla banków oraz $VSME_{14}$ – dla pozostałych firm. Natomiast miary dla wszystkich przedsiębiorstw oparto na 6 zmiennych wspólnych (oznaczenie $VSME_6$). Wszystkie miary obliczono osobno dla każdego roku analizy 2010-2019 przy zachowaniu wzorców z pierwszego roku badania (dla każdej grupy spółek osobno).

Wartości obliczonych miar $VSME_{14}^b$ i $VSME_{14}$ zestawiono w tabelach R1, R2 i R3, a miar $VSME_6$ – w tabelach R4 i R5 zamieszczonych w repozytorium projektu⁵. Tutaj natomiast przedstawiamy wyniki grupowania firm (tabele 2-4) wg wartości VSME (1) i zasad (5).

Klasyfikację firm finansowych prezentuje tabela 2. Według obliczeń banki były najbardziej efektywne w sensie miary $VSME_{14}$ w roku 2012, a najmniej efektywne w roku 2015. Najczęściej, biorąc pod uwagę wszystkie lata badania i wszystkie banki, są one klasyfikowane do drugiego skupienia (w 34 na 80 przypadków), do trzeciego skupienia (24 przypadki) oraz pozostałych skupień (po 11 przypadków). Analogicznie wykonane grupowanie banków wg miary $VSME_6$ obliczonej dla wszystkich spółek i zestawu 6 wspólnych zmiennych, klasyfikuje te firmy w 3. skupieniu (z wyjątkiem ING klasyfikowanego do klastra 2).

Przedsiębiorstwa finansowe niebankowe, klasyfikowane wg miary $VSME_{14}$ charakteryzowały się najwyższą wartością miernika w 2010 r. i najmniejszymi w latach 2018 i 2019. Najczęściej grupowały się w 3. klastrze (27 na 80 przypadków), w drugim – 28 razy, w czwartym – 13 razy i w pierwszym – 12 razy. Wg miary $VSME_6$ 47,5% firm finansowych kwalifikowało się w klastrze 3., 26,25% – w klastrze 2., 22,5% – w klastrze 1. i 3,75% – w klastrze 4.

⁵ https://www.researchgate.net/publication/363456465_Repozytorium_do_artykulu_WEKT_OROWA_SYNTETYCZNA_MIARA_EFEKTYWNOSCI_FIRMY_DLA_POLSKICH_SPOLEK_PUBLICZNYCH#fullTextFileContent

Tabela 2. Grupowanie firm finansowych wg (5) i mierników $VSME_{14}^b$, $VSME_{14}$, $VSME_6$

Firmy Finansowe	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Banki	wg miary $VSME_{14}^b$,									
Handlowy	1	3	1	2	2	3	3	3	2	3
Millennium	4	3	3	3	3	2	2	2	2	3
BOŚ	4	1	4	4	4	4	4	4	4	4
PEKAO	1	4	1	1	2	2	3	3	2	3
ING	3	3	3	3	3	3	3	2	3	3
MBank	3	2	1	2	2	2	1	2	2	2
PKO_BP	2	1	1	2	2	3	2	2	2	2
Santander	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2
Inne Finansowe	wg miary $VSME_{14}^b$ / wg miary $VSME_6$									
ECO	2/1	2/2	2/2	2/3	1/2	1/2	2/2	3/3	3/3	4/4
GPW	1/1	1/1	2/2	2/2	2/2	2/2	2/2	2/2	2/1	2/2
Ipopema	3/2	3/3	3/4	3/4	3/4	3/4	3/4	3/4	3/4	3/4
MWTrade	3/3	3/3	3/3	3/3	3/3	3/3	3/3	3/4	3/4	3/3
Pragma_F	1/3	3/2	3/2	3/3	3/3	3/3	3/3	3/3	3/3	3/3
Pragma_I	2/2	2/2	3/3	3/3	3/3	3/3	3/3	3/3	3/4	4/4
Quercus	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	4/3	1/2
VOTUM	2/1	2/2	2/2	1/2	1/2	1/2	2/2	2/3	2/2	2/2

Źródło: opracowanie własne na podstawie tabeli R1

Tabela 3. Stabilność klasyfikacji firm finansowych wg miar $VSME_{14}^b$ i $VSME_6$ i wz. (9)

Banki	W_{14}	C_{MV}	W_6	C_{MV}	Inne	W_{14}	C_{MV}	W_6	C_{MV}
Handlowy	0,60	3	1,00	3	ECO	0,67	2	0,68	2
Millennium	0,66	3/2,5	1,00	3	GPW	0,77	2	0,82	2
BOŚ	0,83	4	1,00	3	Ipopema	0,82	4	0,90	3
PEKAO	0,51	1/ 2/ 3	1,00	3	MWTrade	0,82	3	1,00	3
ING	0,90	3	0,85	3	Pragma_F	0,71	3	1,00	3
mBank	0,73	2	1,00	3	Pragma_I	0,67	3	0,73	3
PKOBP	0,73	2	1,00	3	Quercus	0,77	1	0,83	1
Santander	0,90	2	1,00	3	VOTUM	0,90	2	0,73	2

Uwagi: W_{14} oznacza miarę persystencji klasyfikacji (wzór 9) wg miar zbudowanych z wykorzystaniem 14 wskaźników, osobno dla banków i pozostałych firm; W_6 oznacza miarę persystencji klasyfikacji wg miar zbudowanych z wykorzystaniem 6 wskaźników wspólnych dla wszystkich firm; C_{MV} oznacza klaster dominujący wg procedury majoryzacji.

Źródło: opracowanie własne

Zbadano także stabilność grupowania firm, sprawdzając jak często i w jakim stopniu zmieniają one swoje pozycje rankingowe. Wykorzystano zasadę

głosowania większościowego oraz miarę (9). Wyniki zestawiono w tabelach 3 i 4. W przypadku grupowania wg taksonomicznych miar efektywności wszystkich spółek $VSME_6$ (tj. przy zastosowaniu 6 wspólnych zmiennych) wszystkie banki z wyjątkiem ING sklasyfikowano w tych samych klastrach (trzecie skupisko). W przypadku miernika liczonego tylko dla banków $VSME_{14}^b$ (tj. z wykorzystaniem 14 zmiennych charakteryzujących banki) badane spółki są w różnych latach grupowane do wszystkich skupień. Według tych miar najbardziej stabilnie klasyfikowane są ING i Santander, a najmniej stabilnie bank PEKAO, należący do klastrów 1., 2. i 3. tyle samo razy (3 lata w każdym skupisku).

Ze względu na wartości miar $VSME_6$ obliczonych dla spółek finansowych nie będących bankami (tabela 3), dwie spółki (MWTrade i Pragma_F) pozostają w trzecim skupieniu wraz z Ipopemą, która została zaklasyfikowana do tego skupienia w ciągu dziewięciu lat oraz Pragma_I, zaklasyfikowaną do tego skupienia w ciągu siedmiu lat. Pozostałe trzy firmy finansowe – ECO, GPW i VOTUM najczęściej grupowane były w drugim klastrze, a Quertus – w pierwszym przez 9 lat. Firma ubezpieczeniowa PZU należy do drugiego i trzeciego klastra w ciągu pięciu lat. Stosując $VSME$ wyznaczone dla niebankowych firm finansowych, osiem firm zostało zaklasyfikowanych do różnych klastrów. Wśród nich najbardziej stabilny okazał się Quertus, który został zaklasyfikowany do pierwszego skupienia w ciągu 9 lat.

Tabela 4. Stabilność klasyfikacji firm niefinansowych wg $VSME_{14}^{nb}$ i $VSME_6$ i wz. (9)

Spółki	W_{14}	C_{MV}	W_6	C_{MV}	Spółki	W_{14}	C_{MV}	W_6	C_{MV}
AB	0,77	4	1,00	3	GTC	0,77	2	0,56	2 / 4
Agora	0,82	2	1,00	3	Instal Krak,	0,54	3	0,90	2
Ambra	0,73	3	1,00	3	InterCars	0,73	3	0,90	2
Amica	0,90	3	0,72	2,5	KGHM	0,90	3	0,50	3
Aparator	1,00	2	0,77	2	Kogeneracj	0,54	3	0,90	3
Asseco BS	1,00	1	1,00	2	Kruszwica	1,00	2	0,72	2,5
Asseco	1,00	2	0,90	3	Lentex	0,82	2	0,82	2
Asseco SEE	1,00	2	0,90	3	LPP	1,00	2	0,82	2
ATM	1,00	2	0,73	2	Mangata	1,00	2	0,68	2
Bioton	0,72	2,5	0,73	3	Mennica	0,65	3	0,72	2
Bogdanka	0,73	3	0,61	3	Monnari	0,62	2	0,60	3
Boryszew	0,48	4	0,90	3	Netia	0,73	2	0,90	3
BritishAH	1,00	4	0,53	3	Neuca	1,00	4	0,73	3
Budimex	0,72	2,5	0,77	2	Oponeo	0,77	3	0,65	3
CCC	0,67	1	0,73	2	Orange Pl,	0,90	3	0,90	3
CD Projekt	0,60	1	0,60	1	Orbis	1,00	2	0,90	3
CI Games	0,77	3	0,56	1	Orlen	1,00	2	0,68	3
Ciech	0,59	3	0,73	3	PGE	1,00	1	0,73	3
Cognor	0,73	3	0,62	3	PGNiG	0,90	2	0,90	3

Spółki	W_{14}	C_{MV}	W_6	C_{MV}	Spółki	W_{14}	C_{MV}	W_6	C_{MV}
Comarch	0,82	3	1,00	3	PGS Softw,	0,82	4	1,00	1
Comp	0,68	2	1,00	3	Polenergia	0,73	4	0,62	3
Cyfr, Polsat	0,82	3	0,77	3	Police	0,73	3	0,90	3
Develia	1,00	3	0,90	3	Polimex	0,90	2	0,82	3
Dębica	0,68	3	0,73	2	Polnord	0,52	2	0,73	3
Dom Dev,	0,62	2	0,77	3	PZ Cormay	0,73	4	0,65	3
Echo Invest,	0,82	3	0,77	3	Rafako	0,90	3	0,77	3
Eko Export	0,72	2,5	0,53	3	Tęcza	0,90	2	0,77	2
Elektrobud,	1,00	4	0,73	3	Guma	0,60	1,5	0,90	2
Enea	0,77	3	0,90	3	Stalexport	1,00	2	0,77	3
Eurocash	0,82	2	0,73	2	Stalprodukt	0,82	3	0,90	3
Famur	0,77	3	0,72	2,5	Śnieżka	0,82	3	0,90	2
Ferro	0,77	3	0,72	2,5	Tauron	0,77	3	0,90	3
Forte	1,00	2	0,73	3	TIM	0,73	2	0,90	3
Gr, Azoty	0,62	2	0,82	3	Trakcja	0,77	1	0,77	3
Gr, Kęty	0,77	2	0,73	2	VRG	0,82	3	1,00	3
Gr, Lotos	0,82	3	0,73	3	Wawel	0,68	2	0,90	2
GTC	0,77	2	0,56	2	Wielton	0,90	2	0,73	3

Uwaga: oznaczenia jak w tabeli 3

Źródło: opracowanie własne

Spółki niefinansowe (tabela 4) są klasyfikowane do wszystkich klas niezależnie od sposobu wyznaczenia wektorowych syntetycznych miar efektywności. Stosując VSME liczony dla wszystkich firm (miara $VSME_6$) stwierdza się, że osiem firm jest stabilnych – sześć z nich należy do klasy trzeciej, jedna do drugiej i jedna do pierwszej. Korzystając z VSME obliczanego dla przedsiębiorstw niefinansowych, można wyróżnić 16 firm, które we wszystkich 10 latach zostały zakwalifikowane do tej samej klasy. Dwie z nich należą do klasy pierwszej, dziesięć do klasy drugiej, jedna do klasy trzeciej, a trzy do klasy czwartej.

PODSUMOWANIE

Miary taksonomiczne mają charakter uniwersalny i mogą być adekwatne i wiarygodne do porządkowania firm w różnych kontekstach – wewnętrznej wartości przedsiębiorstwa, efektywności, produktywności, skuteczności itp. Mogą być również wykorzystywane w badaniach przekrojowo-czasowych.

Celem naszego projektu było skonstruowanie wektorowej syntetycznej miary efektywności firmy VSME oraz weryfikacja możliwości jej zastosowania dla wybranych spółek publicznych. Miara ta może być zastosowana do każdego z wymienionych aspektów taksonomii spółek. O jej istocie decyduje wybrany

zestaw zmiennych diagnostycznych i sposób ich traktowania. Zastosowaliśmy rygorystycznie dobrane bilansowe wskaźniki finansowe, co upoważnia nas do traktowania miary jako syntetycznej wektorowej miary efektywności firmy VSME w wielowymiarowej przestrzeni wskaźników finansowych.

Badanie wykazało, że zaproponowane wektorowe miary efektywności firm VSME dobrze odzwierciedlały kondycję finansową przedsiębiorstw i pozwalały na ich skuteczne porządkowanie. Zarazem jednak badania zmian przynależności do klastrów nie dały jednoznacznej odpowiedzi na pytanie, na ile wzbogacenie listy zmiennych diagnostycznych zmienia grupowanie wynikowe. W przypadku spółek finansowych mierniki zbudowane z użyciem 14 zmiennych częściej klasyfikowały spółki do różnych klas w różnych latach niż mierniki z 6 wspólnymi zmiennymi. Natomiast dla spółek niefinansowych sytuacja jest zgoła odmienna – stabilną pozycję ma większa liczba spółek klasyfikowanych wg miernika $VSME_{14}$ niż $VSME_6$. Ponadto grupowanie dominujące C_{MV} wg miernika $VSME_6$ jest identyczne w grupie banków – klaster 1., i dla spółek niebankowych – klaster 3. Sugeruje to potrzebę korzystania ze zbiorów zmiennych specyficznych dla badanego sektora.

BIBLIOGRAFIA

- Bacidore J. M., Boquist J. A., Milbourn T. T., Thakor A. V. (1997) The Search for the Best Financial Performance Measure. *Financial Analysts Journal*, 53(3), 11-20.
- Bulgurcu B. K. (2012) Application of TOPSIS Technique for Financial Performance Evaluation of Technology Firms in Istanbul Stock Exchange Market. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 62, 1033-1040.
- Dietrich M., Krafft J. (2014) *Handbook on the Economics and Theory of the Firm*. Edward Elgar Publishing.
- Fura B. (2019) Wykorzystanie TMAI do określenia pozycji konkurencyjnej przedsiębiorstw przemysłu chemicznego w Polsce. *Studia Ekonomiczne i Ekologiczne*, 19(1), 31-54.
- Juszczak M. (2015) Powiązanie kondycji finansowej spółek giełdowych określonej syntetycznym miernikiem atrakcyjności inwestowania (TMAI) z kształtowaniem się kursów ich akcji. *Zeszyty Naukowe SGGW - Ekonomia i Organizacja Gospodarki Żywnościowej*, 111, 81-95.
- Kompa K. (2019) Zmiany w kierownictwie spółek giełdowych a zmiany ich sytuacji finansowej. [w:] A. Śliwiński (red.), *Zarządzanie w warunkach ryzyka* (pp. 187-206), Oficyna Wydawnicza SGH.
- Kompa K., Witkowska D. (2021) Miary syntetyczne w benchmarkingu krajów Nowego Jedwabnego Szlaku. *Procedia Computer Science*, 192, 3617-3626.
- Łuniewska M., Tarczyński W. (2022) *Metody wielowymiarowej analizy porównawczej na rynku kapitałowym*. Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Mazurkiewicz A. (2002) Analiza stabilności i wrażliwości oszacowań współczynników beta przy wykorzystaniu metody opartej o przedziały kwantylowe. [w:] W. Tarczyński (red.) *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*. Cz. II. 393-401, Wyd. Uniwersytetu Szczecińskiego.

- Nermend K. (2010) *Vector Calculus in Regional Development Analysis: Comparative Regional Analysis Using the Example of Poland (Contributions to Economics)* (Softcover reprint of hardcover 1st ed. 2009 ed.). Physica.
- Nermend K. (2017) *Metody analizy wielokryterialnej i wielowymiarowej we wspomaganiu decyzji*. Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Skrzek-Lubasińska M. (2020) Konkurencyjność firmy w świetle teorii ekonomii behawioralnej Richarda H. Thaler. *Kwartalnik Nauk o Przedsiębiorstwie*, 57(4), 29-42.
- Staszak M. (2018) Eksperymentalna ocena efektywności portfela fundamentalnego dla spółek z indeksu WIG20 za lata 2004 - 2016. *MIBE*, 18(4), 672-678.
- Sudiyatno B., Puspitasari E., Suwarti T., Asyif M. M. (2020) Determinants of Firm Value and Profitability: Evidence from Indonesia. *The Journal of Asian Finance, Economics and Business*, 7(11), 769–778. <https://doi.org/10.13106/jafeb.2020.vol7.no11.769>
- Tarczyński W. (1994) Taksonomiczna miara atrakcyjności inwestycji w papierach wartościowych. *Przegląd Statystyczny*, 41(3), 275-300.
- Tarczyński W. (2002) *Fundamentalny portfel papierów wartościowych*. PWE.
- Tarczyński W., Tarczyńska-Łuniewska M. (2017) Ocena siły fundamentalnej spółek spożywczych na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie. *Acta Scientiarum Polonorum. Oeconomia*, 16(1), 93-100.
- Thavikulwat P. (2004) Determining the Value of a Firm. *Developments in Business Simulation and Experiential Learning*, 31, 210-215.
- Winarto J. (2015) The Determinants of Manufacturer Firm Value in Indonesia Stock Exchange. *Int. Journal of Information, Business and Management*, 7(4), 323-349.
- Witkowska D., Kuźnik P. (2019) Czy siła fundamentalna spółki wpływa na jej wyniki inwestycyjne? *Dynamic Econometric Models*, 19, 85-96.
- Witkowska D., Kompa K., Staszak M. (2021) Indicators for the Efficient Portfolio Construction. The case of Poland. *Procedia Computer Science*, 192, 2022-2031. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2021.08.208>

VECTOR SYNTHETIC MEASURE OF COMPANY EFFECTIVENESS FOR POLISH PUBLIC COMPANIES

Abstract: The aim of the research is to construct aggregates that will describe the condition of companies in the multidimensional space of financial indicators and will be useful for comparisons between companies. Vector synthetic measures of company effectiveness VSME were constructed. The study covers companies from the Warsaw Stock Exchange listed continuously in 2010-2019 and with full records of financial indicators. The 90 companies and more than 20 financial indicators were selected. It was shown that the proposed vector VSME measures reflected well the companies' standing and allowed them to be compared effectively, including comparisons over time.

Keywords: company effectiveness, public companies, multidimensional comparative methods, financial ratios, Warsaw Stock Exchange

JEL classification: G32, L25, M21

IDENTYFIKACJA UKRYTYCH KOMPONENTÓW W SZEREGACH CZASOWYCH METODAMI NIEUJEMNEJ FAKTORYZACJI MACIERZY

Ryszard Szupiluk  <https://orcid.org/0000-0002-4416-7131>
Kolegium Analiz Ekonomicznych
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie
e-mail: rszupi@sgh.waw.pl

Streszczenie: W niniejszym artykule przedstawimy zastosowanie metod nieujemnej faktoryzacji macierzy do identyfikacji ukrytych komponentów zawartych w ekonomicznych szeregach czasowych. Wyprowadzony zostanie nowy algorytm nieujemnej faktoryzacji macierzy oparty na dywergencji Fermiego-Diraca. Wykorzystując uzyskane ukryte komponenty dokonamy eliminacji szumów z szeregów czasowych reprezentujących wyniki predykcji. Całą koncepcję przetestujemy w problemie prognozy obciążenia systemu elektroenergetycznego.

Słowa kluczowe: nieujemna faktoryzacja macierzy, identyfikacja ukrytych komponentów, ślepa separacja, predykcja

JEL classification: C02, C50

WSTĘP

Jednym z istotnych zagadnień analizy danych empirycznych jest poszukiwanie interesujących i użytecznych metod dekompozycji oraz faktoryzacji macierzy. W obszarze ekonomii i finansów motywacją dla tych poszukiwań jest dążenie do odkrycia, identyfikacji lub rekonstrukcji niejawnych komponentów (sygnałów, szeregów czasowych) zawartych w danych rynkowych lub biznesowych. Z praktycznego punktu widzenia znajomość takich komponentów może być wykorzystana w zadaniach eliminacji szumów, redukcji wpływu niepożądanych zakłóceń, estymacji trendów lub poprawie jakości predykcji [Szupiluk 2014].

<https://doi.org/10.22630/MIBE.2022.23.2.6>

W niniejszym artykule przedstawimy zastosowanie algorytmu nieujemnej faktoryzacji macierzy (ang. Nonnegative Matrix Factorization - NMF) w dekompozycji szeregów czasowych, a następnie wykorzystanie uzyskanych komponentów w autorskim systemie poprawy predykcji. Wyprowadzony zostanie nowy algorytm nieujemnej faktoryzacji bazujący na dywergencji Fermiego-Diraca należącej do klasy dywergencji Bergmana [Cichocki et al. 2009].

Metoda NMF adresowana jest do danych nieujemnych, co w przypadku wartości rynkowych jak akcje lub indeksy giełdowe, oznacza raczej analizę wartości bazowych niż wartości zmian tych instrumentów, choć przy odpowiedniej transformacji także jest to możliwe. Ma to szczególne znaczenie dla szybkiej i bezpośredniej interpretacji sytuacji rynkowej w przypadku podejmowania decyzji inwestycyjnych, opartych na analizie technicznej. automatycznych giełdowych systemach inwestycyjnych lub systemach predykcyjnych rynku energii.

NIEUJEMNA FAKTORYZACJA MACIERZY

Problem nieujemnej faktoryzacji macierzy można opisać jako przedstawienie danej macierzy X iloczynem dwóch macierzy nieujemnych A , S [Berry et al. 2009]

$$X \cong AS, \quad (1)$$

gdzie elementy macierzy A są nieujemne $a_{ij} \geq 0$, co zapisywane jest także jako $A \geq 0$, analogiczny warunek nieujemności dotyczy macierzy S .

W praktyce zastosowań często zagadnienie NMF przedstawia się w kategoriach problemu ślepej separacji sygnałów/źródeł (ang. Blind Signal /Source Separation – ang. BSS) [Comon, Jutten 2010]. W takiej interpretacji X oznacza nieujemną macierz danych obserwowanych, macierz S zawiera wiersze stanowiące ukryte komponenty zawarte w danych obserwowanych, zaś A oznacza system mieszający. Zakłada się przy tym, że liczba wierszy macierzy X jest nie mniejsza od liczby wierszy macierzy S .

W problemie BSS bazując na samych obserwacjach staramy się wyodrębnić nieznaną macierz A oraz S , przy czym w wielu przypadkach oczekuje się, że identyfikacja ukrytych komponentów (wiersze S) jest jednoznaczna z wydzieleniem pewnych konkretnych fizycznych sygnałów jak sygnały mowy, medyczne lub geologiczne. W tak postawionym problemie oczekuje się, że niezależnie od użytych metod BSS wraz z odpowiadającymi im założeniami, otrzyma się podobny „fizyczny” efekt, np. konkretną wypowiedź wyłowioną z gwaru rozmów. W przypadku danych ekonomicznych, choć otrzymane komponenty zawarte w S stanowią zwykle raczej pewną bazę analityczną, to możemy poszukiwać lub oczekiwać wyników także o niejako fizycznym charakterze takich jak trendy lub szumy i zakłócenia.

Nieujemna faktoryzacja macierzy $X=AS$, podobnie jak inne metody BSS, charakteryzuje się naturalną niejednoznacznością rozwiązań, ze względu na

$\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}$, gdzie dowolna odwracalna macierz \mathbf{D} odpowiada za przeskalowanie i permutację sygnałów separowanych w stosunku do źródłowych. Oznacza to, że poszukując obiektywnych fizycznych sygnałów akceptujemy jako satysfakcjonujące rozwiązanie w postaci sygnałów przeskalowanych oraz występujących w zmienionej kolejności do źródłowych.

Rozwiązanie problemu NMF wiąże się z przyjęciem kryterium jakości faktoryzacji, które jednocześnie pełni rolę funkcji celu. Funkcja celu [Cichocki et al. 2009]

$$J = L(\mathbf{X}, \mathbf{AS}), \quad (2)$$

określa różnicę, podobieństwo lub odmienność między macierzą \mathbf{X} oraz jej faktoryzacją \mathbf{AS} . Przyjmowane obecnie funkcje celu opierają się zwykle na funkcjach dywergencji $J = D(\mathbf{X}, \mathbf{AS})$.

Dywergencją $D(y \| z)$, określaną jest funkcja dwóch nieujemnych zmiennych z i y , która spełnia warunek $D(y \| z) \geq 0$, gdzie $D(y \| z) = 0$, gdy $y = z$ [Csiszar 1974]. Dywergencja, nie musi spełniać nierówności trójkąta $D(y \| z) \leq D(y \| x) + D(x \| z)$, oraz nie musi być dla niej spełniony warunek symetryczności, tj. zwykle $D(y \| x) \neq D(x \| y)$. Dla niektórych dywergencji dochodzą dodatkowe warunki, np. sumowania się wartości zmiennych z i y do jedności. Jedną z szerszych rodzin dywergencji stanowią dywergencje Bregmana definiowane jako [Bregman 1967],

$$D_{\phi}(\mathbf{y} \| \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^N \left(\phi(y_i) - \phi(z_i) - \phi'(z_i)(y_i - z_i) \right), \quad (3)$$

gdzie $\phi(u)$ jest ściśle wypukłą funkcją, wszędzie różniczkowalną, posiadającą ciągłą pochodną $\phi'(u)$ [Dhillon i Tropp 2005]. Dla problemu NMF (3) można przedstawić w postaci

$$D_{\phi}(\mathbf{X} \| \mathbf{AS}) = \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^N \left(\phi(x_{it}) - \phi([\mathbf{AS}]_{it}) - \phi'(x_{it})(x_{it} - [\mathbf{AS}]_{it}) \right). \quad (4)$$

Dla nieliniowości $\phi(u) = u \ln(u) + (1-u) \ln(1-u)$, $u \in [0,1]$, otrzymuje się dywergencję Fermiego-Diraca postaci [Cichocki et al.2009]

$$D_{FD}(\mathbf{y} \| \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^N \left(y_i \ln \left(\frac{y_i}{z_i} \right) + (1-y_i) \ln \left(\frac{1-y_i}{1-z_i} \right) \right), \quad (5)$$

dla $y_i, z_i \in (0,1)$.

W praktyce wykorzystanie dywergencji może wiązać się z koniecznością przekształcenia analizowanych danych do przedziału (0,1).

ALGORYTM UCZENIA NMF

Multiplikatywny algorytm NMF dla dywergencji Bregmana o naprzemiennych iteracjach. odpowiednio dla macierzy \mathbf{A} ma postać [Dhillon i Sra 2005]

$$\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{A} \cdot \frac{(\phi''(\mathbf{AS}) \cdot \mathbf{X})\mathbf{S}^T}{(\phi''(\mathbf{AS}) \cdot (\mathbf{AS}))\mathbf{S}^T}, \quad (6)$$

a dla macierzy \mathbf{S}

$$\mathbf{S} \leftarrow \mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{A}^T(\phi''(\mathbf{AS}) \cdot \mathbf{X})}{\mathbf{A}^T(\phi''(\mathbf{AS}) \cdot (\mathbf{AS}))}, \quad (7)$$

gdzie \cdot , oznacza mnożenie element przez element.

W przypadku przyjęcia funkcji celu w postaci dywergencji Fermiego-Diraca otrzymujemy drugą pochodną funkcji $\phi(u)$ w postaci $\phi''(u) = (1-u^2)^{-1}$, co prowadzi do następującego algorytmu estymacji macierzy \mathbf{A} oraz \mathbf{S}

$$\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{A} \cdot \frac{(\mathbf{1}/(\mathbf{1} - (\mathbf{AS}) \cdot \mathbf{1}) \cdot \mathbf{X})\mathbf{S}^T}{(\mathbf{1}/(\mathbf{1} - (\mathbf{AS}) \cdot \mathbf{1}) \cdot (\mathbf{AS}))\mathbf{S}^T}, \quad (8)$$

oraz

$$\mathbf{S} \leftarrow \mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{A}^T(\mathbf{1}/(\mathbf{1} - (\mathbf{AS}) \cdot \mathbf{1}) \cdot \mathbf{X})}{\mathbf{A}^T(\mathbf{1}/(\mathbf{1} - (\mathbf{AS}) \cdot \mathbf{1}) \cdot (\mathbf{AS}))}, \quad (9)$$

Uzyskany algorytm (8)-(9) jest jednym z wielu wariantów możliwych do uzyskania na bazie funkcji celu w postaci dywergencji Fermiego-Diraca. Postacie te zależne są od przyjętej metody minimalizacji funkcji celu.

WIELOMODELOWY SYSTEM POPRAWY JAKOŚCI PREDYKCJI

Model nieujemnej faktoryzacji macierzy (1) można zinterpretować w kategoriach systemu poprawy predykcji. Przyjmijmy, że wiersze macierzy $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]^T$ zawierają wyniki prognoz z różnych modeli. Załóżmy następnie, że są one kombinacją liniową $\mathbf{X} = \mathbf{AS}$ ukrytych komponentów odpowiadających za poprawne wyniki prognoz, jak również komponentów odpowiedzialnych za błędy. Zatem możemy zapisać, że macierz

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n]^T = [\hat{\mathbf{s}}_1, \dots, \hat{\mathbf{s}}_p, \tilde{\mathbf{s}}_{p+1}, \dots, \tilde{\mathbf{s}}_{p+q}]^T, \quad (10)$$

składa się z komponentów konstruktywnych $\hat{\mathbf{s}}_i$ oraz destrukcyjnych $\tilde{\mathbf{s}}_j$, $n = p + q$. Identyfikując macierz \mathbf{A} oraz \mathbf{S} , a następnie eliminując komponenty destrukcyjne (czyli przyjmując $\hat{\mathbf{s}}_j = \mathbf{0}$) powinniśmy uzyskać poprawę jakości predykcji

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}[\hat{\mathbf{s}}_1, \dots, \hat{\mathbf{s}}_p, \mathbf{0}_{p+1}, \dots, \mathbf{0}_n]^T, \quad (11)$$

gdzie $\hat{\mathbf{X}}$ oznacza macierz której wiersze zawierają poprawione prognozy [Szupiluk et al. 2007]. Ten sam efekt zostanie osiągnięty w wyniku zastąpienia w macierzy mieszającej $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$ odpowiednich kolumn wektorami zer

$$\hat{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p, \mathbf{0}_{p+1}, \mathbf{0}_{p+2}, \dots, \mathbf{0}_n]. \quad (12)$$

Prowadzi to do analogicznej do (11) formuły na poprawione wyniki prognoz

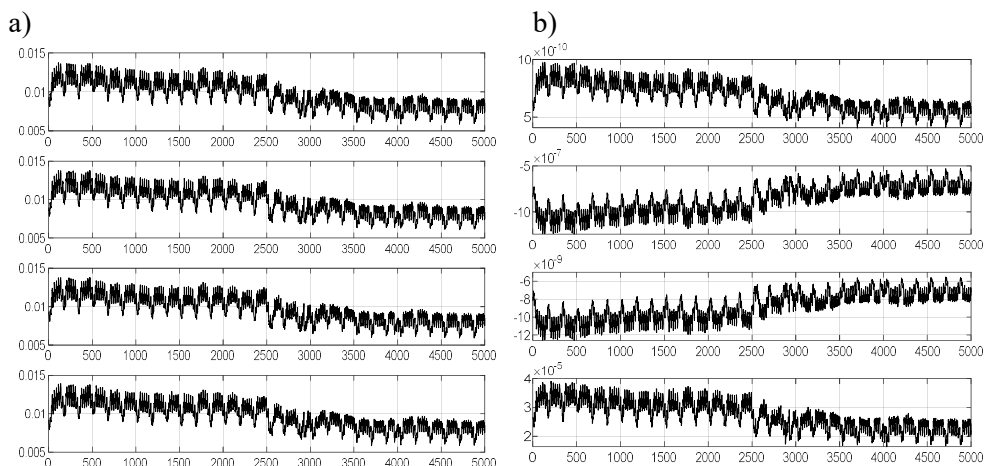
$$\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{S}. \quad (13)$$

Identyfikacja macierzy \mathbf{A} oraz \mathbf{S} , interpretowanych w kategoriach problemu BSS jako macierz mieszająca oraz macierz sygnałów źródłowych (ukrytych komponentów) zostanie dokonana metodą nieujemnej faktoryzacji macierzy. Należy zauważyć, że osiągnięcie celu stawianego zadaniom BSS oznacza eliminację komponentów zakłócających o niejako fizycznym charakterze, np. szumów w danych. Ich eliminacja powinna skutkować poprawą prognozy na ocenianą wg dowolnego kryterium matematycznego. Jednak w praktyce problemów ekonomicznych, uzyskanie czystych fizycznych komponentów może być trudne do osiągnięcia, gdyż trudno zakładać, iż określone dane jak np. szeregi zużycia energii elektrycznej, są efektem kombinacji pewnej ograniczonej liczby sygnałów źródłowych.

EKSPERYMENT PRAKTYCZNY

Obecnie przedstawimy zastosowanie opisanej wyżej metody do poprawy predykcji zużycia energii elektrycznej. Predykcja godzinnego obciążenia jest dokonywana z wyprzedzeniem 24 godzin. Dane objaśniające obejmują informacje o godzinnym zużyciu energii w ciągu ostatnich 24 godzin, jak również dane kalendarzowe typu: dzień, miesiąc. Dla tak postawionego problemu, opracowano cztery modele neuronowe MLP o 12, 18, 24, 27 neuronach w warstwie ukrytej. Na Rysunku 1 widzimy wyniki z modeli predykcyjnych oraz ukryte komponenty otrzymane po nieujemnej faktoryzacji algorytmem opartym na dywergencji Fermiego-Diraca. Tabela 1 zawiera wyniki predykcji uzyskane dla poszczególnych modeli oraz wyniki po usunięciu poszczególnych komponentów ukrytych.

Rysunek 1. Wyniki modeli predykcyjnych a) oraz ukryte komponenty b)



Źródło: opracowanie własne

Tabela 1. Przykładowy zestaw danych

MSE 10^{-3}	MLP12	MLP18	MLP24	MLP27
Modele podstawowe	8,164	7,782	7,891	8,097
Usunięty 1 komponent	97,586	7,507	7,991	7,404
Usunięty 2 komponent	8,164	98,588	7,891	8,097
Usunięty 3 komponent	8,164	7,516	97,334	7,389
Usunięty 4 komponent	7,688	7,782	7,575	99,588

Źródło: opracowanie własne

Najlepsze wyniki predykcji uzyskano, po usunięciu 2 komponentu ukrytego, uzyskano zmniejszeni błędu MSE, czyli poprawę jakości predykcji, o ok.4.8%. Uzyskane wyniki należy traktować jako poglądowe potwierdzenie poprawności działania przedstawionej koncepcji. Natomiast rzeczywisty stopień poprawy, możliwy do uzyskania może się zmienić w przypadku zwiększenia liczby modeli predykcyjnych oraz testu eliminacji nie tylko pojedynczych komponentów ale także ich kombinacji.

Jednocześnie należy wspomnieć o pewnych słabościach powyższej metody. W wyniku badań zaobserwowano stosunkowo dużą (np. w porównaniu z metodą ICA) niestabilność działania uzyskanego algorytmu. Choć od strony formalnej jego działanie jest stosunkowo skuteczne, tj. uzyskujemy nieujemną faktoryzację macierzy, zaś możliwa do uzyskania poprawa wyników stosunkowo znacząca, to jednocześnie jednak zaobserwowano znacząco wrażliwość na warunki początkowe.

PODSUMOWANIE

W niniejszej pracy zaprezentowano nowy algorytm nieujemnej faktoryzacji macierzy oparty na dywergencji Fermiego-Diraca. Został on następnie zastosowany w systemie poprawy wyników predykcji w podejściu wielomodelowym, co można jednocześnie zaklasyfikować do kategorii agregacji modeli. Przeprowadzone eksperymenty potwierdziły zasadność przyjętych koncepcji. Jednocześnie jednak ujawniły pewne trudności tego podejścia. Niestabilność i wrażliwość na warunki początkowe uzyskanego algorytmu, skłaniają do refleksji nad jakością algorytmu w jego obecnej postaci w praktycznych zastosowaniach. Poprawę efektywności można upatrywać m.in. w odmiennych sposobach optymalizacji funkcji celu.

Jednak głównym celem obecnej pracy było uzyskanie nowego algorytmu NMF i potwierdzenie skuteczności jego działania w aspekcie formalnym, czyli wykazanie, że podstawowe zadanie nieujemnej faktoryzacji jest wykonywalne, i może być zastosowane w realnych zadaniach. Dostosowanie wyprowadzonego algorytmu do praktycznego działania w ramach stabilnego systemu poprawy predykcji jest zasadniczo odrębnym zadaniem, adresowanym do możliwych kolejnych badań.

BIBLIOGRAFIA

- Bregman L. (1967) The Relaxation Method of Finding a Common Point of Convex Sets and its Application to the Solution of Problems in Convex Programming. *Comp. Math. Phys., USSR*, 7, 200-217.
- Berry M., Browne M., Langville A., Pauca P., Plemmons R. (2007) Algorithms and Applications for Approximate Nonnegative Matrix Factorization. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(1), 155-173.
- Cichocki A., Zdunek R., Phan A.-H., Amari S. (2009) *Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations: Applications to Exploratory Multi-way Data Analysis*. John Wiley.
- Csiszar I. (1974) Information Measures: A Critical Survey. *Transactions of the 7th Prague Conference*, 83-86.
- Comon P., Jutten Ch. (2010) *Handbook of Blind Source Separation: Independent Component Analysis and Applications*. Academic Press.
- Dhillon I. S., Sra S. (2005) Generalized Nonnegative Matrix Approximations with Bregman Divergences. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 283-290.
- Dhillon I. S., Tropp J. A. (2007) Matrix Nearness Problems with Bregman Divergences. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 29(4), 1120-1146.
- Gillis N. (2020) *Nonnegative Matrix Factorization*. SIAM, Philadelphia.
- Lee D. D., Seung H. S. (1999) Learning the Parts of Objects by Non-Negative Matrix Factorization, *Nature*, 401, 788-791.
- Szupiluk R. (2014) *Dekompozycje wielowymiarowe w agregacji predykcyjnych modeli Data Mining*. Szkoła Główna Handlowa. Oficyna Wydawnicza.

Szupiluk R., Wojewnik P., Ząbkowski T. (2007) Smooth Component Analysis as Ensemble Method for Prediction Improvement. Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin-Heidelberg, 4666, 277-284.

LATENT COMPONENT IDENTIFICATION IN TIME SERIES BY NONNEGATIVE MATRIX FACTORIZATION

Abstract: In this article, we present the use of non-negative matrix factorization methods to identify latent components contained in economic time series. A new non-negative matrix factorization algorithm based on Fermi-Dirac divergence is derived. Using the obtained latent components, we eliminate noise from the time series representing the prediction results. We test the entire concept in the problem of power system load prediction.

Keywords: non-negative matrix factorization, latent components identification, blind separation, prediction

JEL classification: C02, C50