

Warsaw University of Life Sciences – SGGW
Institute of Economics and Finance
Department of Econometrics and Statistics

**QUANTITATIVE METHODS
IN ECONOMICS**

**METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH
EKONOMICZNYCH**

Volume XXVI, No. 1

Warsaw 2025

EDITORIAL BOARD

Editor-in-Chief: Bolesław Borkowski

Vice-Editor-in-Chief: Hanna Dudek

Managing Editors: Michał Gostkowski, Grzegorz Koszela

Theme Editors:

Econometrics: Bolesław Borkowski

Multidimensional Data Analysis: Wiesław Szczesny

Mathematical Economy: Zbigniew Binderman

Analysis of Labour Market: Joanna Landmesser-Rusek

Financial Engineering: Monika Krawiec

Data Science: Michał Gostkowski

Theory of Risk: Marek Andrzej Kociński

Statistical Editor: Wojciech Zieliński

Technical Editors: Jolanta Kotlarska, Elżbieta Saganowska

Language Editor: Agata Cienkusz

Native Speaker: Yochanan Shachmurove

Editorial Assistant: Michał Gostkowski

SCIENTIFIC BOARD

Adnene Ajimi (University of Sousse, Tunisia)

Heni Boubaker (University of Sousse, Tunisia)

Peter Friedrich (University of Tartu, Estonia)

Paolo Gajo (University of Florence, Italy)

Agnieszka Gehringer (University of Göttingen, Germany)

Anna Maria Gil-Lafuente (University of Barcelona, Spain)

Jaime Gil-Lafuente (University of Barcelona, Spain)

Vasile Glavan (Moldova State University, Moldova)

Francesca Greselin (University of Milano-Bicocca, Italy)

Ana Kapaj (Agriculture University of Tirana, Albania)

Jirawan Kitchaicharoen (Chiang Mai University, Thailand)

Yuriy Kondratenko (Black Sea State University, Ukraine)

Vassilis Kostoglou (Alexander Technological Educational Institute of Thessaloniki, Greece)

Karol Kukula (University of Agriculture in Krakow, Poland)

Kesra Nermend (University of Szczecin, Poland)

Nikolas N. Olenev (Russian Academy of Sciences, Russia)

Alexander N. Prokopenya (Brest State Technical University, Belarus)

Yochanan Shachmurove (The City College of The City University of New York, USA)

Mirbulat B. Sikhov (al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan)

Marina Z. Solesvik (Nord University, Norway)

Ewa Syczewska (SGH Warsaw School of Economics, Poland)

Achille Vernizzi (University of Milan, Italy)

Andrzej Wiatrak (University of Warsaw, Poland)

Dorota Witkowska (University of Lodz, Poland)

ISSN 2082-792X

e-ISSN 2543-8565

© Copyright by Department of Econometrics and Statistics WULS – SGGW
(Katedra Ekonometrii i Statystyki SGGW w Warszawie)

Warsaw 2025, Volume XXVI, No. 1

Journal homepage: <https://qme.sggw.edu.pl>

Published by Warsaw University of Life Sciences Press

CONTENTS

Anna Górska, Michał Jasiński – Zastosowanie metody porządkowania liniowego TOPSIS jako uzupełniające kryterium klasyfikacji małych państw wyspiarskich Globalnego Południa	1
Stanisław Jaworski, Wojciech Zieliński – Optymalny dobór próby w modelu krzyżowym oraz trójkątnym pytań drażliwych	12
Somdeb Lahiri – Loss Aversion and State-Dependent Linear Utility Functions for Monetary Returns	22
Magdalena Kondej – Analysis of the Bankruptcy Probability of Selected Companies Listed on the Warsaw Stock Exchange and Operating in Ukraine	36

ZASTOSOWANIE METODY PORZĄDKOWANIA LINIOWEGO TOPSIS JAKO UZUPEŁNIAJĄCE KRYTERIUM KLASYFIKACJI MAŁYCH PAŃSTW WYSPIARSKICH GLOBALNEGO POŁUDNIA

Anna Górską  <https://orcid.org/0000-0003-0763-0550>

Instytut Ekonomii i Finansów
Szkół Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
e-mail: anna_gorska@sggw.edu.pl

Michał Jasiński  <https://orcid.org/0000-0002-0546-5048>

Katedra Unii Europejskiej im. J. Monneta
Kolegium Ekonomiczno-Społeczne
Szkół Główna Handlowa w Warszawie
e-mail: michal.jasinski@sgh.waw.pl

Streszczenie: Celem badania była ocena zróżnicowania poziomu rozwoju społeczno-gospodarczego w małych państwach wyspiarskich Globalnego Południa (SIDS). Badaniu poddano 38 państw w 2019 r. i 2022 r. Do oceny rozwoju społeczno-gospodarczego SIDS zastosowano metodę porządkowania liniowego TOPSIS. Konstrukcji wskaźnika syntetycznego dokonano na zbiorze 10 cech diagnostycznych. Zastosowano również wskaźnik HDI. Pomimo wystąpienia istotnych wydarzeń w gospodarce światowej między latami poddanymi analizie, w tym pandemii COVID-19, nie zauważono diametralnych różnic w kolejności (uszeregowania) stopnia rozwoju społeczno-gospodarczego w analizowanych SIDS.

Słowa kluczowe: TOPSIS, małe państwa wyspiarskie (SIDS), rozwój społeczno-ekonomiczny

JEL classification: C38, C44, F41, F63

WSTĘP

Małe państwa wyspiarskie Globalnego Południa (Small Island Developing States – SIDS) jako kategoria ekonomiczna stanowią ciekawy aspekt badawczy w kontekście klasycznego pytania stawianego przez ekonomię rozwoju: dlaczego niektóre państwa są bogate (rozwinęte) a część pozostaje uboga (zaczofana). Pomimo

<https://doi.org/10.22630/MIBE.2025.26.1.1>

specyficznych, wspólnych (geograficznych) uwarunkowań rozwoju, charakteryzuje je znaczne rozwarstwienie społeczno-gospodarcze – są państwa o wysokim poziomie rozwoju, jak również te na skrajnym jego biegunie – jedne z najbiedniejszych, najsłabiej rozwiniętych na świecie. Specyficzne niekorzystne cechy wynikające z wyspiarskiego charakteru – m.in. takie jak: niewielkie rozmiary, izolacja, ograniczone zasoby naturalne, czy szczególna podatność na kryzysy oraz klęski żywiołowe [szerzej patrz: Jasiński 2017, 2020, UNCTAD 2022], w części SIDS nie wydają się jednak przesądzać o porażce rozwojowej.

Przesłanki te stały się dla Autorów, nie tyle przyczynkiem do podjęcia próby odpowiedzi na pytanie dlaczego części z tych państw (w ostatnich dziesięcioleciach) udało się przełamać zacofanie i dokonać (często dynamicznego) progresu rozwojowego, co pretekstem do przeanalizowania rozwarstwienia społeczno-gospodarczego w tej grupie. W konsekwencji rozważenia, czy nadal zasadne jest uznawanie (klasyfikowanie) części z nich za „państwa rozwijające się” (Developing States). Autorzy mają świadomość, że takie terminy m.in. jak: Trzeci Świat, czy zasygnalizowany – państwa rozwijające się, straciły swoją aktualność. Są świadomi również niejasnych kryteriów wyodrębnienia (Globalnej) Północy i Południa we współczesnych stosunkach międzynarodowych.

W kontekście podejmowanych rozważań, Autorom zależy przede wszystkim o zabranie głosu w trwającej w literaturze przedmiotu polemice dotyczącej kryteriów wyodrębnienia SIDS jako specyficznej kategorii ekonomicznej [por. m.in. Encontre 2004, Hein 2004, UNCTAD 2022]. Sprowadzającej się – w uproszczeniu do próby odpowiedzi, co (ze współczesnej perspektywy) w większym stopniu determinuje wyzwania rozwojowe tej grupy państw – fakt bycia niewielkim (powierzchnią lądową) obszarem wyspiarskim, czy też (poza geograficzne) cechy typowe dla Południa, takie m.in. jak: niedorozwój ekonomiczny, ubóstwo, silna presja demograficzna, niedemokratyczny ustrój, czy też fakt bycia obszarami ogarniętymi wojnami, anarchią i konfliktami wewnętrznymi.

Specyfika rozwojowa SIDS, dyskusyjne elementy ich klasyfikacji, jak również dynamiczne zmiany zachodzące w gospodarce światowej (m.in. wywołane pandemią COVID-19) stały się przyczynkami do analizy zróżnicowania poziomu rozwoju społeczno-gospodarczego tych państw przy zastosowaniu (dominującego w paradygmacie ekonomii rozwoju) wskaźnika rozwoju społecznego (HDI), jak również metody porządkowania liniowego TOPSIS (na zbiorze zaproponowanych 11 cech diagnostycznych). W konsekwencji również próbą odpowiedzi na pytanie: czy pandemia znacząco wpłynęła na zróżnicowanie poziomu rozwoju społeczno-gospodarczego w SIDS.

Zgodnie ze stanem wiedzy Autorów (w momencie złożenia artykułu do druku) zastosowana metoda TOPSIS, jest pierwszą w polskiej literaturze przedmiotu próbą wyznaczenia zróżnicowania poziomu rozwoju w przypadku małych państw wyspiarskich Globalnego Południa. Przeprowadzona analiza wpisuje się nurt badań prowadzonych w zakresie island studies (studiów nad wyspami) dot. wpływu sytuacji kryzysowych (vulnerability) i odporności (resilience) SIDS. Stanowi

również próbę doboru optymalnych narzędzi i metod oceny procesów społeczno-gospodarczych zachodzących na tych (specyficznych) obszarach [por. m.in. Bertram i in. 2020].

Metody porządkowania liniowego, w tym TOPSIS, są wykorzystywane głównie w badaniach ekonomicznych w celu ustalenia kolejności lub klasyfikacji obiektów, takich jak państwa – ze względu np. na poziom rozwoju; przedsiębiorstwa – ze względu na kondycję finansową; czy też produkty – ze względu na walory użytkowe, itp. Poziom rozwoju państw jest cechą, która nie jest bezpośrednio mierzalna. Zmienna ta jest agregatem tj. zmienną syntetyczną kilku zmiennych diagnostycznych, które są bezpośrednio obserwowalne. Otrzymane realizacje zmiennej syntetycznej umożliwiają uporządkowanie i pogrupowanie obiektów wielowymiarowych w sensie relacji preferencji [Bąk 2016].

WYKORZYSTANE DANE

Zgodnie z najnowszą klasyfikacją ONZ [UN 2022, s. 9] badaniu poddano 38 SIDS (patrz: tabela 2). Do oceny poziomu rozwoju analizowanych państw w okresie przed pandemią (2019 r.) i po pandemii (2022 r.) zastosowano wskaźnik HDI oraz metodę porządkowania liniowego TOPSIS. Do konstrukcji wskaźnika syntetycznego (zwanego inaczej zmienną syntetyczną, taksonomicznym miernikiem rozwoju, agregatową miarą rozwoju), zaproponowano zbiór 11 potencjalnych cech diagnostycznych, z przewagą mierników dotyczących sfery gospodarczej. Ich dobór podyktowany był specyfiką i wąską specjalizacją gospodarek SIDS, jak również dostępnością danych statystycznych. Wykorzystane dane pochodzą z baz Banku Światowego [World Bank 2024] oraz publikacji Światowej Organizacji Turystycznej [UNWTO 2023]. W przypadku wskaźnika HDI dane pochodzą z Raportów UNDP [Human Development Report 2020, 2024].¹

METODA BADAWCZA

Konstrukcja wskaźnika syntetycznego w metodzie porządkowania liniowego TOPSIS składa się z kilku etapów [Filipińcz-Chomko 2021]. W pierwszym etapie tworzona jest ze zmiennych decyzyjnych tzw. macierz decyzyjna $X = [x_{ij}]_{m \times n}$ poprzez weryfikację i selekcję n zaproponowanych zmiennych. Elementem x_{ij} macierzy X jest wartość j -tej zmiennej dla i -tego obiektu (państwa).

Wstępna analiza danych, ze względu na wartość informacyjną zmiennych (kryterium różnicowania i skorelowania zmiennych [Malina i Zeliaś 1997]) pozwoliła na wyłączenie z koszyka zmiennych decyzyjnych jednej zmiennej: Handel (% PKB). Zmienna ta była wystarczająco zróżnicowana (współczynnik

¹ Ze względu na powszechne zastosowanie w literaturze przedmiotu wskaźnika HDI, jak i ograniczone ramy artykułu pominięto w tekście jego metodologię.

zmienności powyżej 10%), jednak zbyt silnie skorelowana z największą liczbą pozostałych zmiennych w obu analizowanych latach. Ostatecznie do konstrukcji miernika wybrano 10 zmiennych (tabela 1).

Tabela 1. Zmienne diagnostyczne przyjęte do porządkowania liniowego metodą TOPSIS z określeniem charakteru zmiennej

Symbol zmiennej	Nazwa zmiennej	Charakter zmiennej (D – destymulanta/ S – stymulanta)
x1	Eksport dóbr i usług (% w PKB)	S
x2	Zagraniczne inwestycje bezpośrednie netto (% w PKB)	S
x3	PKB na mieszkańca, w PPP (w cenach stałych, w USD)	S
x4	Import dóbr i usług (% w PKB)	S
x5	Oficjalna pomoc rozwojowa (% DNB)	D
x6	Oficjalna pomoc rozwojowa na mieszkańca (w cenach stałych, w USD)	D
x7	Populacja wiejska (% łącznej populacji)	D
x8	Usługi (% w PKB)	S
x9	Wpływy z turystyki międzynarodowej (w odsetkach w PKB)	S
x10	Wskaźnik liczby turystów zagranicznych do liczby stałych mieszkańców (w odsetkach)	S

Źródło: opracowanie własne

W kolejnym etapie, wyznacza się znormalizowaną macierz decyzyjną $N = [z_{ij}]_{m \times n}$, gdzie element z_{ij} jest znormalizowaną oceną wariantu decyzyjnego, obliczoną zgodnie z formułą (przekształcenie ilorazowe):

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ij}^2}}, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, m \text{ oraz } j = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Następnie, dla każdej zmiennej wyznacza się tzw. wzorzec – wariant idealny (A^+) i antywzorzec – wariant antyidealny (A^-) postaci:

$$A^+ = [z_1^+, \dots, z_n^+], \text{ gdzie } z_j^+ = \begin{cases} \max z_{ij}, z_{ij} \in S \\ \min z_{ij}, z_{ij} \in D \end{cases} \quad (2)$$

$$A^- = [z_1^-, \dots, z_n^-], \text{ gdzie } z_j^- = \begin{cases} \min z_{ij}, z_{ij} \in S \\ \max z_{ij}, z_{ij} \in D. \end{cases} \quad (3)$$

Określenie wzorca i antywzorca pozwala na obliczenie odległości i -tego obiektu (d_i^+) od rozwiązania idealnego A^+ i odległości (d_i^-) i -tego obiektu od rozwiązania antyidealnego A^- zgodnie z formułami (odległość euklidesowa):

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (z_{ij} - z_j^+)^2}, \quad (4)$$

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (z_{ij} - z_j^-)^2}, \text{ gdzie } i = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Na podstawie obliczonych odległości można wyznaczyć wartość syntetycznego miernika (wartość agregatową) i -tego obiektu (państwa) zgodnie z formułą:

$$S_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}, \text{ gdzie } i = 1, 2, \dots, m \text{ przy czym } 0 \leq S_i \leq 1, \quad (6)$$

gdzie $\max_i\{S_i\}$ oznacza najlepszy obiekt, a $\min_i\{S_i\}$ – najgorszy obiekt.

Ostatnim etapem jest uporządkowanie liniowe obiektów i przyporządkowanie obiektów do wyodrębnionych grup typologicznych na podstawie kryteriów statystycznych (średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe z wartości miernika syntetycznego):

- Grupa I (bardzo wysoki poziom zjawiska): $S_i \geq \bar{q} + s_q$,
- Grupa II (wysoki poziom zjawiska): $\bar{q} \leq S_i < \bar{q} + s_q$,
- Grupa III (średni poziom zjawiska): $\bar{q} - s_q \leq S_i < \bar{q}$,
- Grupa IV (niski poziom zjawiska): $S_i < \bar{q} - s_q$,

gdzie:

$\bar{q}$ – średnia arytmetyczna z wartości cechy syntetycznej,

s_q – odchylenie standardowe z wartości miernika syntetycznego,

S_i – wartość miernika syntetycznego.

WYNIKI BADAŃ

W tabeli 2. zaprezentowano wartości wskaźnika HDI w analizowanych SIDS uzyskane odpowiednio w 2019 r. i 2022 r. Wartości te (w obu latach) potwierdzają duże wewnętrzne zróżnicowanie rozwoju w badanych państwach. Wskazać można państwa, które uzyskały bardzo wysoką (powyżej 0,800), wysoką (od 0,7 do 0,799), średnią (0,550 do 0,699) oraz niską (poniżej 0,549) wartość HDI. W 2019 r. najliczniejsza (18 SIDS) była grupa o wysokim poziomie rozwoju społecznego. W 10 przypadkach był on średni, w sześciu (Singapur, Bahrajn, Palau, Bahamy, Barbados, Mauritius) bardzo wysoki, niski zaś w dwóch państwach (Haiti, Gwinea Bissau). W dwóch przypadkach (Nauru, Tuvalu) nie dało się go wyliczyć. W 2022 r. wyniki były zbliżone – najliczniejsza grupa (16 SIDS) uzyskała wysokie HDI, w 13 wskaźnik był średni, w 8 zaś bardzo wysoki (Singapur, Bahrajn, Saint Kitts i Nevis, Antigua i Barbuda, Bahamy, Trynidad i Tobago, Barbados, Seszele). W jednym państwie (Gwinea Bissau) poziom rozwoju społecznego był niski.

Tabela 2. Poziom rozwoju społecznego (HDI) w SIDS w 2019 r. i 2022 r.

Lp.	Państwo	HDI 2019	Lp.	Państwo	HDI 2022
1	Singapur	0,938	1	Singapur	0,949
2	Bahrajn	0,852	2	Bahrajn	0,888
3	Palau	0,826	3	Saint Kitts i Nevis	0,838
4	Bahamy	0,816	4	Antigua i Barbuda	0,826
5	Barbados	0,814	5	Bahamy	0,820
6	Mauritius	0,804	6	Trynidad i Tobago	0,814
7	Seszele	0,796	7	Barbados	0,809
8	Trynidad i Tobago	0,796	8	Seszele	0,802
9	Kuba	0,783	9	Palau	0,797
10	Grenada	0,779	10	Mauritius	0,796
11	Saint Kitts i Nevis	0,779	11	Grenada	0,793
12	Antigua i Barbuda	0,778	12	St. Vincent i Grenadyny	0,772
13	St. Lucia	0,759	13	Dominikana	0,766
14	Dominikana	0,756	14	Kuba	0,764
15	Fidzi	0,743	15	Malediwy	0,762
16	Dominika	0,742	16	Gujana	0,742
17	Malediwy	0,740	17	Dominika	0,740
18	St. Vincent i Grenadyny	0,738	18	Wyspy Tonga	0,739
19	Surinam	0,738	19	Wyspy Marshalla	0,731
20	Jamajka	0,734	20	Fidzi	0,729
21	Wyspy Tonga	0,725	21	St. Lucia	0,725
22	Belize	0,716	22	Jamajka	0,706
23	Samoa	0,715	23	Samoa	0,702
24	Wyspy Marshalla	0,704	24	Belize	0,700
25	Gujana	0,682	25	Nauru	0,696
26	Republika Zielonego Przylądka	0,665	26	Surinam	0,690
27	Kiribati	0,630	27	Republika Zielonego Przylądka	0,661
28	Wyspy Św. Tomasza i Książęca	0,625	28	Tuvalu	0,653
29	Federacyjne Stany Mikronezji	0,620	29	Federacyjne Stany Mikronezji	0,634
30	Vanuatu	0,609	30	Kiribati	0,628
31	Timor Wschodni	0,606	31	Vanuatu	0,614
32	Wyspy Salomona	0,567	32	Wyspy Św. Tomasza i Książęca	0,613
33	Papua Nowa Gwinea	0,555	33	Republika Komorów	0,586
34	Republika Komorów	0,554	34	Papua Nowa Gwinea	0,568
35	Haiti	0,510	35	Timor Wschodni	0,566
36	Gwinea Bissau	0,480	36	Wyspy Salomona	0,562
37	Nauru	-	37	Haiti	0,552
38	Tuvalu	-	38	Gwinea Bissau	0,483

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Human Development Report 2020, 2024]

Porównanie uzyskanych wartości dla 38 SIDS dla obu okresów czasowych (przed i po pandemicznych) wskazują, że (paradoksalnie) poziom rozwoju społecznego w 2022 r. był wyższy w 19 państwach (Antigua i Barbuda, Bahrajn, Dominikana, Federacyjne Stany Mikronezji, Grenada, Gujana, Gwinea Bissau,

Haiti, Malediwy, Papua Nowa Gwinea, Republika Komorów, Saint Kitts i Nevis, Seszele, Singapur, St. Vincent i Grenadyny, Trynidad i Tobago, Vanuatu, Wyspy Marshalla oraz Wyspy Tonga). Zmiany te (w analizowanych latach) nie wpłynęły w znacznym stopniu na zróżnicowanie poziomu rozwoju i uszeregowanie analizowanych SIDS.

W tabelach 3 i 4 zaprezentowano wyniki porządkowania liniowego metodą TOPSIS w latach 2019 i 2022. W tabeli 3 największy (w 2019 r.) wskaźnik syntetyczny (Si) był w Singapurze, na Seszelach, na Antigui i Barbudzie oraz w Bahrajnie. Wyniósł on powyżej 0,54. Państwa te zostały zaklasyfikowane do grupy typologicznej I – państw o najwyższym rozwoju. W II grupie typologicznej (wartość wskaźnika w przedziale powyżej 0,45 do 0,539) znalazło się czternaście państw (Bahamy, Malediwy, Palau, Gujana, Grenada, St. Lucia, St. Kitts i Nevis, Barbados, Fidzi, Belize, Mauritius, Jamajka, Republika Zielonego Przylądka oraz Dominikana). W trzeciej (najliczniejszej) – siedemnaście. W ostatniej grupie typologicznej (o najniższym wskaźniku) – trzy (Federacyjne Stany Mikronezji, Nauru oraz Tuvalu).

Tabela 3. Klasyfikacja typologiczna SIDS na podstawie wartości miernika syntetycznego według metody TOPSIS w 2019 r.

Państwo	Wskaźnik syntetyczny (Si)	Pozycja w rankingu	Grupa typologiczna
Singapur	0,76	1	I
Seszele	0,64	2	I
Antigua i Barbuda	0,57	3	I
Bahrajn	0,55	4	I
Bahamy	0,54	5	II
Malediwy	0,54	6	II
Palau	0,54	7	II
Gujana	0,49	8	II
Grenada	0,49	9	II
St. Lucia	0,48	10	II
St. Kitts i Nevis	0,48	11	II
Barbados	0,48	12	II
Fidzi	0,48	13	II
Belize	0,47	14	II
Mauritius	0,47	15	II
Jamajka	0,47	16	II
Republika Zielonego Przylądka	0,47	17	II
Dominikana	0,45	18	II
Vanuatu	0,44	19	III
Dominika	0,44	20	III
Surinam	0,43	21	III
Trinidad i Tobago	0,42	22	III
Kuba	0,41	23	III
Gwinea-Bissau	0,41	24	III
St. Vincent i Grenadyny	0,41	25	III
Haiti	0,41	26	III

Państwo	Wskaźnik syntetyczny (Si)	Pozycja w rankingu	Grupa typologiczna
Wyspy Św. Tomasza i Książęca	0,40	27	III
Samoa	0,40	28	III
Republika Komorów	0,40	29	III
Papua Nowa Gwinea	0,40	30	III
Kiribati	0,39	31	III
Wyspy Salomona	0,39	32	III
Timor Wschodni	0,38	33	III
Wyspy Marshalla	0,37	34	III
Wyspy Tonga	0,36	35	III
Federacyjne Stany Mikronezji	0,35	36	IV
Nauru	0,27	37	IV
Tuvalu	0,23	38	IV

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z [UNWTO 2023], [Bank Światowy 2024]

W tabeli 4 największy (w po pandemicznym 2022 r.) wskaźnik syntetyczny (Si) był w Singapurze, na Seszelach, na Antigui i Barbudzie oraz Malediwach (zaklasyfikowanych do I grupy typologicznej). W II grupie typologicznej znalazło się czternaście państw, z czego ponownie dwanaście spośród znajdujących się (w tej grupie typologicznej w 2019 r.). Malediwy zostały w 2022 r. zaklasyfikowane do I grupy typologicznej, Gujana zaś do III. Na ich miejsce w II grupie typologicznej w 2022 r. weszły Bahrajn (spadek z I grupy) oraz Wyspy Św. Tomasza i Książęca. Do ostatniej (IV grupy) zaklasyfikowano: Wyspy Marshalla, Wyspy Tonga oraz Tuvalu.

Tabela 4. Klasyfikacja typologiczna SIDS na podstawie wartości miernika syntetycznego według metody TOPSIS w 2022 r.

Państwo	Wskaźnik syntetyczny (Si)	Pozycja w rankingu	Grupa typologiczna
Singapur	0,69	1	I
Seszele	0,61	2	I
Antigua i Barbuda	0,57	3	I
Malediwy	0,54	4	I
Bahamy	0,50	5	II
Grenada	0,48	6	II
Bahrajn	0,48	7	II
St. Lucia	0,47	8	II
Belize	0,47	9	II
Republika Zielonego Przylądka	0,46	10	II
Mauritius	0,45	11	II
St. Kitts i Nevis	0,45	12	II
Barbados	0,45	13	II
Wyspy Św. Tomasza i Książęca	0,44	14	II
Dominikana	0,43	15	II
Fidżi	0,43	16	II
Palau	0,43	17	II

Państwo	Wskaźnik syntetyczny (Si)	Pozycja w rankingu	Grupa typologiczna
Jamajka	0,43	18	II
St. Vincent i Grenadyny	0,41	19	III
Kuba	0,41	20	III
Gujana	0,41	21	III
Surinam	0,40	22	III
Trinidad i Tobago	0,40	23	III
Dominika	0,40	24	III
Haiti	0,39	25	III
Gwinea-Bissau	0,39	26	III
Republika Komorów	0,38	27	III
Papua Nowa Gwinea	0,38	28	III
Vanuatu	0,38	29	III
Wyspy Salomona	0,37	30	III
Timor Wschodni	0,37	31	III
Samoa	0,37	32	III
Kiribati	0,37	33	III
Nauru	0,36	34	III
Federacyjne Stany Mikronezji	0,32	35	III
Wyspy Marshalla	0,26	36	IV
Wyspy Tonga	0,24	37	IV
Tuvalu	0,17	38	IV

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z [UNWTO 2023], [Bank Światowy 2024]

PODSUMOWANIE

Zastosowana metoda porządkowania liniowego TOPSIS, na zbiorze zaproponowanych 10 cech, jak i odwołanie się do HDI umożliwiło wykazanie zróżnicowania poziomu rozwoju społeczno-gospodarczego w 38 SIDS w 2019 i 2022 r. Pomimo faktu wystąpienia różnych zawirowań w gospodarce światowej, w tym pandemii, nie zauważono diametralnych różnic w kolejności (uszeregowaniu) stopnia rozwoju w analizowanych SIDS.

Autorzy mają świadomość, że uzyskane wyniki mogą być kontrowersyjne. Szczególnie przy odniesieniu wskaźnika syntetycznego (Si) do HDI. Dobór zmiennych diagnostycznych (TOPSIS) do przeprowadzonego badania, jakkolwiek mogący budzić wątpliwości, w odczuciu autorów wydaje się być adekwatny do specyfiki gospodarek wyspiarskich. Przesłanką była bowiem próba znalezienia optymalnych, wspólnych dla specyfiki SIDS zmiennych – dla których (dodatkowo) możliwe byłoby uzyskanie (kompletnych) danych statystycznych.

W odczuciu Autorów – mających świadomość, że brak powszechnie uzgodnionej definicji SIDS doprowadził do dużej heterogeniczności w tej grupie, w rezultacie czego pojęcie to ma bardziej charakter techniczny i polityczny (a nie

ekonomiczny) oraz, że przynależność do SIDS jest w dużej mierze określana samodzielnie² – to zastosowanie HDI umożliwia (przy pewnych założeniach) wykluczenie części analizowanych państw z grupy państw „rozwijających się”. Tego typu „odcięciem” może być uzyskanie wartości HDI powyżej np. 0,8, czyli państw o bardzo wysokim poziomie rozwoju – np. Bahamy, Bahrajn, Barbados, Mauritius, Seszele, czy Singapur. Zastosowanie zaś dodatkowo skonstruowanego przez Autorów wskaźnika syntetycznego (Si) – umożliwia doprecyzowanie – wskazanie wysokiego „wyspiarskiego” poziomu rozwoju (np. państwa z I grupy typologicznej). Odniesienie tego poziomu – nie tylko do całego świata (wszystkich państw w przypadku, których możliwe jest wyliczenie HDI), ale dodatkowo (przy zastosowaniu wskaźnika Si) do poziomu rozwoju państw o zbliżonych (specyficznych cechach i uwarunkowaniach rozwoju), czyli (w analizowanym przypadku) do 38 SIDS.

Pomimo świadomości niedoskonałości zastosowanych zmiennych diagnostycznych (TOPSIS), w odczuciu Autorów, podjęta próba wydaje się być istotna w kontekście badań nad gospodarkami SIDS – chociażby w kontekście rozważenia dalszych modyfikacji koszyka zmiennych. Stanowi jeden z głosów w dyskusji nad poszukiwaniem dalszych optymalnych narzędzi i metod do oceny procesów społeczno-gospodarczych zachodzących na obszarach wyspiarskich.

BIBLIOGRAFIA

- Bąk A. (2016) Porządkowanie liniowe obiektów metodą Hellwiga i TOPSIS – analiza porównawcza. *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu*, 426, 22-31, DOI: 10.15611/pn.2016.426.02.
- Bertram G., Poirine B. (2020) *Economics and Development*. [w:] G. Baldacchino (red.) *The Routledge International Handbook of Island Studies. A World of Islands*, Routledge, London and New York.
- Encontre P. (2004) *SIDS as a Category: Adopting Criteria Would Enhance Credibility. Is a Special Treatment of Small Island Developing States Possible?* UNCTAD, New York and Geneva.
- Filipowicz-Chomko M. (2021) Wpływ doboru technik normalizacji kryteriów decyzyjnych na stabilność rankingów uzyskanych algorytmem TOPSIS. [w:] *Wybrane zagadnienia informatyki technicznej. Modelowanie i przetwarzanie informacji w warunkach niepewności* (7-31) Politechnika Białostocka. Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej.

² Potwierdzają to liczne przykłady – m.in. obszary określane „wyspami kontynentalnymi” (Belize, Gwinea-Bissau oraz Surinam), czy też Malta, której poprawa kondycji ekonomicznej spowodowała m.in. wystąpienie (w kwietniu 2004 r.) z Sojuszu Małych Państw Wyspiarskich (Alliance of Small Island States - AOSIS) oraz akcesję (w maju 2004 r.) do Unii Europejskiej. Wydarzenia te spowodowały formalną zmianę statusu Malty – wyłączenie (usunięcie) z większości, powszechnie akceptowanych list SIDS [szerzej patrz: Jasiński 2020, s. 267; UNCTAD 2022, s. 16, 17].

- Hein P. (2004) Small Island Developing States: Origin of the Category and Definition Issues. [w:] Is a Special Treatment of Small Island Developing States Possible? UNCTAD, New York and Geneva.
- Human Development Report 2020 (2020) United Nations Development Programme, New York.
- Human Development Report 2023/2024 (2024) United Nations Development Programme, New York.
- International Tourism Highlights. The Impact of COVID-19 on Tourism (2020-2022) (2023) UNWTO, Madrid.
- Jasiński M. (2017) Modele rozwoju gospodarczego a poziom rozwoju społecznego i zamożności w małych państwach wyspiarskich na świecie. *Studia i Prace, WNEiZ US*, 49(2), 317-333.
- Jasiński M. (2020) Podwójna izolacja jako determinanta rozwoju społeczno-ekonomicznego małych państw wyspiarskich Globalnego Południa. *Studia Polityczne*, 48(2), 261-284.
- Malina A., Zeliaś A. (1997) Taksonomiczna analiza przestrzennego zróżnicowania jakości życia ludności w Polsce w 1994 r. *Przegląd Statystyczny*, 44(1), 11-27.
- Revisiting Development Strategies for Small Island Developing States in the Post-Pandemic Competitive Landscape, TD/B/C.II/EM.6/2. (2022) United Nations, Geneva.
- UNCTAD (2022) Development and Globalization: Facts and Figures 2021. Small Island Developing States. Geneva.
- World Bank (2024) <https://data.worldbank.org/>, [dostęp: 18.03.2024].

APPLICATION OF TOPSIS LINEAR ORDERING METHOD AS AN ADDITIONAL CRITERION FOR CLASSIFICATION OF SMALL ISLAND DEVELOPING STATES

Abstract: The aim of the study was to assess the differentiation of the level of socio-economic development in Small Island Developing States (SIDS). The study covered 38 countries in two years, in 2019 and 2022. The TOPSIS linear ordering method was used to assess the socio-economic development of SIDS. The construction of the synthetic variable was made on a set of 10 diagnostic features. Despite the occurrence of significant events in the global economy between the analysed years, including the COVID-19 pandemic, no drastic differences were observed in the order of the degree of socio-economic development in the analysed SIDS.

Keywords: TOPSIS, Small Island Developing States, Socio-Economic Development

JEL classification: C38, C44, F41, F63

OPTYMALNY DOBÓR PRÓBY W MODELU KRZYŻOWYM ORAZ TRÓJKĄTNYM PYTAŃ DRAŻLIWYCH

Stanisław Jaworski  <https://orcid.org/0000-0002-6169-2886>

Wojciech Zieliński  <https://orcid.org/0000-0003-0749-8764>

Instytut Ekonomii i Finansów

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

e-mail: stanislaw_jaworski@sggw.edu.pl

e-mail: wojciech_zielinski@sggw.edu.pl

Streszczenie: W pracy zajmujemy się optymalnym doбором próby w wybranych modelach: krzyżowym oraz trójkątnym. Kryterium optymalności polega na doborze rozmiaru próby, dla którego względna długość przedziału ufności nie przekracza ustalonej wartości.

Słowa kluczowe: pytania drażliwe, model nierandomizowanych odpowiedzi

JEL classification: C83, C99

WSTĘP

W wielu badaniach społecznych i ekonomicznych badacz chce uzyskać odpowiedź na pytania drażliwe dotyczące sfer intymnych, a odpowiedzi mogą stawać ich w złym świetle. Istnieje wiele zachowań, które nie są dobrze odbierane w społeczeństwie, a przyznanie się do nich wiąże się z lękiem o zdemaskowanie. Trudno się przyznać do problemów z alkoholem, przemocy w rodzinie czy nieprzestrzegania prawa. Nawet zapewnienie przez ankietera o pełnej anonimowości badania może nie być wystarczającym powodem do udzielania szczerych odpowiedzi. Dlatego też stosowane są pewne wybiegi, by mimo wszystko w miarę rzetelnie ocenić w populacji skalę zjawiska drażliwego. Ogólną ideą tych pomysłów jest zadawanie obok interesującego badacza pytania drażliwego pytania neutralnego niezwiązanego z badaną kwestią.

<https://doi.org/10.22630/MIBE.2025.26.1.2>

Pierwszy pomysł na realizację tego zadania pochodzi od Warnera [Warner 1965]. Zaproponował on stosowanie randomizacji odpowiedzi. To podejście wymaga zastosowania pewnego „urządzenia” dokonującego takiej randomizacji. Podejście Warnera było modyfikowane na wiele sposobów. Tian i in. [2007] zaproponowali inny sposób działania nie wymagający randomizacji odpowiedzi. Zaproponowali oni dwa modele zadawania pytań: model krzyżowy oraz model trójkątny. Spośród wielu prac można przykładowo wymienić Horvitz i in. [1967], Greenberg i in. [1969], Yu i in. [2008], Tan i in. [2009], Jaworski i Zieliński [2023] oraz Jaworski [2025].

Nas interesuje przedziałowa estymacja odsetka pytań drażliwych. Chcemy znaleźć minimalną wielkość próby pozwalającą na estymację względnego odsetka przy zachowaniu pewnej anonimowości badanych osób. Anonimowość ankietowanej osoby mierzona będzie prawdopodobieństwem odgadnięcia odpowiedzi na pytanie drażliwe na podstawie znajomości całościowej odpowiedzi.

Poniżej rozważymy dwa nierandomizowane modele stosowane w badaniach drażliwych: model krzyżowy oraz model trójkątny.

Model Krzyżowy. W modelu krzyżowym niezrandomizowanych odpowiedzi zadawane są dwa pytania, drażliwe i neutralne. Jeżeli respondent może odpowiedzieć na oba twierdząco, wpisuje do ankiety *TAK*. Jeżeli na oba może odpowiedzieć przecząco, również wpisuje *TAK*. W przeciwnym przypadku wpisuje *NIE*. Ważne jest by oba pytania były tak dobrane, aby udzielane na nie odpowiedzi respondenta były realizacjami niezależnych zmiennych losowych.

Formalnie, niech Z oznacza zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym, która przyjmuje wartość 1, gdy respondent na oba pytania udzieliłby tej samej odpowiedzi oraz 0 w przeciwnym przypadku:

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{gdy obie odpowiedzi są takie same,} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (1)$$

Niech ρ oznacza prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną Z wartości 1. Zatem

$$P_\pi(Z = 1) = \rho = q\pi + (1 - q)(1 - \pi), \quad (2)$$

gdzie π i q oznaczają prawdopodobieństwa, że respondent odpowiedziałby twierdząco odpowiednio na pytanie drażliwe oraz neutralne. Zakładamy, że prawdopodobieństwo q jest znane. By π było identyfikowalne, to prawdopodobieństwo q nie może być równe 0.5. Próba niezależnych zmiennych losowych $Z_1, \dots, Z_n$ o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa co Z , opisuje wyniki ankiet przeprowadzonych wśród reprezentatywnej próby n respondentów.

Estymatorem prawdopodobieństwa π uzyskanym metodą momentów jest

$$\hat{\pi}_K = \frac{\bar{Z} - (1 - q)}{2q - 1},$$

gdzie $\bar{Z} = (\sum_{i=1}^n Z_i) / n$.

Model Trójkątny. W modelu trójkątnym niezrandomizowanych odpowiedzi zadawane są dwa pytania, dokładnie tak samo jak w modelu krzyżowym. Różnica polega na tym, że respondent wpisuje do ankiety *NIE*, jeżeli na oba pytania odpowiedziałby przecząco. W przeciwnym razie wpisuje *TAK*. W szczególności:

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{jeśli obie odpowiedzi są } NIE, \\ 1, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (3)$$

W tym modelu

$$P_\pi(Z = 1) = \varrho = \pi + (1 - \pi)q, \quad (4)$$

a estymatorem prawdopodobieństwa π uzyskanym metodą momentów jest

$$\hat{\pi}_T = \frac{\bar{Z} - q}{1 - q}.$$

PRZEDZIAŁY UFNOŚCI

Rozważamy przybliżone przedziały przedziały ufności typu Walda. Są to asymptotyczne przedziały oparte na Centralnym Twierdzeniu Granicznym, które głośi, że asymptotyczny rozkład prawdopodobieństwa estymatorów $\hat{\pi}_K$ oraz $\hat{\pi}_T$ jest rozkładem normalnym. Dokładniej, gdy licznosc próby rośnie nieograniczenie, to

$$\frac{\hat{\pi}_K - \pi}{\widehat{Var\pi_K}} \rightarrow N(0, 1).$$

Tutaj $\widehat{Var\pi_K}$ jest nieobciążonym estymatorem wariancji estymatora $\hat{\pi}_K$:

$$\widehat{Var\pi_K} = \frac{\bar{Z}(1 - \bar{Z})}{(n - 1)(2q - 1)^2} = \frac{\hat{\pi}_K(1 - \hat{\pi}_K)}{n - 1} + \frac{q(1 - q)}{(n - 1)(2q - 1)^2}.$$

Przyjmując poziom ufności δ i stosując standardowe metody otrzymujemy przedział ufności dla prawdopodobieństwa drażliwego

$$\left(\hat{\pi}_K - u_{(1+\delta)/2} \sqrt{\widehat{Var\pi_K}}, \hat{\pi}_K + u_{(1+\delta)/2} \sqrt{\widehat{Var\pi_K}} \right),$$

gdzie $u_{(1+\delta)/2}$ oznacza kwantyl rozkładu $N(0, 1)$.

Podobnie mamy dla modelu trójkątnego:

$$\frac{\hat{\pi}_T - \pi}{\widehat{Var\pi_T}} \rightarrow N(0, 1).$$

W tym modelu

$$\widehat{Var\pi_T} = \frac{\bar{Z}(1 - \bar{Z})}{(n - 1)(1 - q)^2} = \frac{\hat{\pi}_T(1 - \hat{\pi}_T)}{(n - 1)} + \frac{q(1 - q)}{(n - 1)(1 - q)^2}$$

i asymptotyczny przedział ufności dla prawdopodobieństwa π ma postać

$$\left(\hat{\pi}_T - u_{(1+\delta)/2} \sqrt{\widehat{Var\pi_T}}, \hat{\pi}_T + u_{(1+\delta)/2} \sqrt{\widehat{Var\pi_T}} \right).$$

OPTYMALNY ROZMIAR PRÓBY

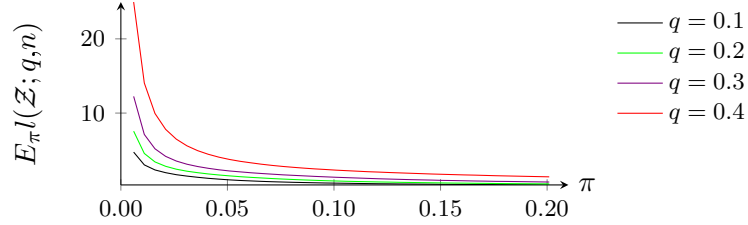
Rozważamy względną długość przybliżonego przedziału ufności

$$l(z; q, n) = \frac{\pi_G(z) - \pi_D(z)}{\pi}, \quad (5)$$

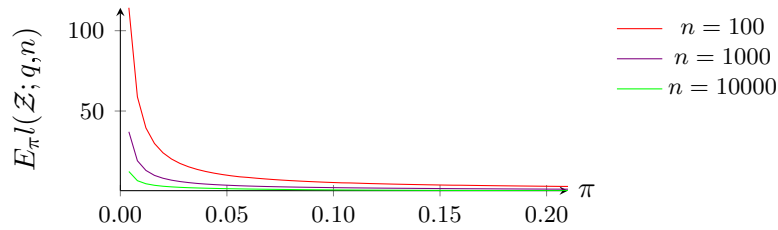
gdzie $(\pi_G(z), \pi_D(z))$ oznacza przedział ufności dla π po zaobserwowaniu wyniku z , gdzie z jest realizacją zmiennej losowej $\mathcal{Z} = \sum_i Z_i$. Naszym celem jest kontrola tej długości za pomocą rozmiaru próby. W tym celu dla danego modelu wyznaczamy

$$E_\pi \{l(\mathcal{Z}; q, n) \mathbb{1}(\pi \in (\pi_G(\mathcal{Z}), \pi_D(\mathcal{Z})))\} = \sum_{k=0}^n l(k; q, n) \mathbb{1}(\pi \in (\pi_G(k), \pi_D(k))) P_\pi\{\mathcal{Z} = k\}. \quad (6)$$

Jest to średnia względna długość przedziałów pokrywających π . Bez straty na ogólności zakładamy, że $\pi < 0.5$. Na podstawie obliczeń numerycznych można zaobserwować, że dla każdego $\pi \in (0, 0.5)$ wartość oczekiwana $E_\pi l(\mathcal{Z}; q, n)$ rośnie względem q i maleje względem n (rys. 1, 2).

Rysunek 1. Średnia długość względna dla $n = 1000$ w modelu krzyżowym

Źródło: obliczenia własne

Rysunek 2. Średnia długość względna dla $n = 1000$ w modelu trójkątnym

Źródło: obliczenia własne

Przedstawione w pracy wykresy (rys. 1, 2) zostały wykonane dla modelu krzyżowego. Wykresy dla modelu trójkątnego są podobne. Obliczenia numeryczne wykonano dla

$$(n, q) \in \{100, 1000, 10000\} \times \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}.$$

Stąd, przy ustalonej wielkości próby n jesteśmy zainteresowani, aby wartość parametru q była możliwie najmniejsza. Dla małych q uzyskujemy wysoką precyzję oszacowania. Z drugiej strony q nie może być zbyt małe. Na przykład $q = 0$ odpowiada przypadkowi, w którym nie zadajemy pytania neutralnego. Brak pytania neutralnego oznacza brak ochrony prywatności respondenta. Dlatego q powinno mieć wartość większą od zera. Dolne ograniczenie dla q powinno być wynikiem odpowiednio wysokiego poziomu ochrony prywatności respondenta.

Tan i in. [2009] zaproponowali, aby poziom prywatności respondenta kontrolować za pomocą następujących prawdopodobieństw warunkowych:

$$P_{\pi} \{Y = 1|Z = 1\} \text{ oraz } P_{\pi} \{Y = 1|Z = 0\},$$

które określają przypuszczalną przynależność respondenta do grupy wrażliwej, w zależności od wyniku jego ankiety. W modelu krzyżowym prawdopodobieństwa te przedstawiają się następująco (zastosowanie twierdzenia Bayesa):

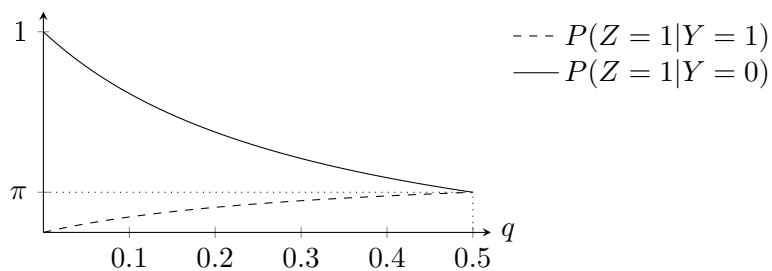
$$\begin{aligned} P_{\pi} \{Y = 1|Z = 1\} &= \frac{\pi q}{\pi q + (1 - \pi)(1 - q)}, \\ P_{\pi} \{Y = 1|Z = 0\} &= \frac{\pi(1 - q)}{\pi(1 - q) + (1 - \pi)q}, \end{aligned} \quad (7)$$

a w modelu trójkątnym

$$\begin{aligned} P_{\pi} \{Y = 1|Z = 1\} &= \frac{\pi}{\pi + (1 - \pi)q}, \\ P_{\pi} \{Y = 1|Z = 0\} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

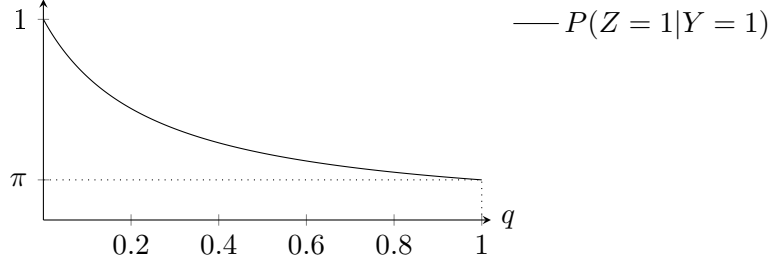
Zależność tych prawdopodobieństw od parametru q przedstawiona jest na rys. 3 dla modelu krzyżowego, a dla trójkątnego na rys. 4.

Rysunek 3. Ochrona prywatności w modelu krzyżowym



Źródło: obliczenia własne

Rysunek 4. Ochrona prywatności w modelu trójkątnym



Źródło: obliczenia własne

Z wykresów (rys. 3) oraz (rys. 4) wynika, że im mniejsza jest wartość parametru q , tym słabszy jest poziom ochrony prywatności (tym wyższe jest prawdopodobieństwo $P_\pi\{Y=1|Z=1\}$). Aby zachować odpowiedni poziom prywatności, musi być spełnione:

$$P_\pi\{Y=1|Z=1\} \leq \gamma \text{ oraz } P_\pi\{Y=1|Z=0\} \leq \gamma \quad (9)$$

dla z góry ustalonego $\gamma \in (0, 1)$ (odpowiednio dużego) oraz dowolnego $\pi \leq \pi_0$. Wartość π_0 odzwierciedla naszą wiedzę o odsetku osób należących do grupy wrażliwej. Na przykład z badań nad HIV w USA [NZIP 2022] wynika, że odsetek nowych zachorowań na tę chorobę maleje. Gdyby π oznaczał odsetek obecnie chorych na HIV, można by założyć, że $\pi_0 = 0.0036$, ponieważ 0.36% jest znanym poprzednio odsetkiem zarażonych tym wirusem.

Najmniejsze $q = q(\pi_0; \gamma)$, które spełnia nierówności (9), ma postać:

- a) $q(\pi_0; \gamma) = \frac{\pi_0(1-\gamma)}{\gamma(1-2\pi_0)+\pi_0}$ w modelu krzyżowym,
- b) $q(\pi_0; \gamma) = \frac{\pi_0(1-\gamma)}{\gamma(1-\pi_0)}$ w modelu trójkątnym.

Rozwiązanie nierówności (9) jest możliwe tylko wtedy, gdy $\gamma \geq \pi$. Zatem powinniśmy przyjąć, że $\gamma \geq \pi_0$. W przeciwnym przypadku nierówności (9) nie byłyby spełnione dla wszystkich $\pi \leq \pi_0$.

Formuły na $q(\pi_0; \gamma)$ zostały wyprowadzone w pracach Jaworski i Zieliński [2023], Jaworski [2025].

Zauważmy, że średnia długość względna rośnie nieograniczenie, gdy π zbliża się do zera. Stąd bez wiedzy o dolnym ograniczeniu parametru π nie jest możliwa kontrola długości przedziału ufności. Dlatego przyjmujemy, że $\pi \in \langle \pi_{-1}, \pi_0 \rangle$, gdzie dodatnie wartości π_{-1} oraz π_0 można określić na podstawie posiadanej wiedzy.

Uwzględniając powyższe uwagi, możemy na potrzeby tej pracy sformułować następującą definicję optymalnego rozmiaru próby.

Definicja. Zakładamy, że $\pi \in \langle \pi_{-1}, \pi_0 \rangle$, gdzie π_{-1}, π_0 są znanymi wartościami mniejszymi od 0.5. Przy ustalonym $\gamma \leq \pi_0$ oraz ustalonym d , najmniejszą liczebność próby n dla której

$$E_{\pi}l(Z; q(\pi_0, \gamma), n) \leq d \quad (\forall \pi \in \langle \pi_{-1}, \pi_0 \rangle)$$

nazywamy *optymalnym rozmiarem próby*.

Przykład numeryczny. Przyjmujemy $\gamma = 0.5$, $d = 0.5$. Niech n^* oznacza optymalny rozmiar próby. W zależności od wartości π_{-1}, π_0 wyznaczony numerycznie optymalny rozmiar próby przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Optymalny rozmiar próby

Model	π_0	$\pi_{-1} = 0, 1\pi_0$	n^*	$\pi_{-1} = 0, 2\pi_0$	n^*
Krzyżowy	0,1	0,01	83447	0,02	22214
	0,2	0,02	64327	0,04	16726
	0,3	0,03	82676	0,06	21082
	0,4	0,04	209311	0,08	52631
Trójkątny	0,1	0,01	74083	0,02	19690
	0,2	0,02	48016	0,04	12397
	0,3	0,03	46620	0,06	12421
	0,4	0,04	67870	0,08	16593

Źródło: obliczenia własne

PODSUMOWANIE

W pracy zaprezentowano optymalny dobór wielkości próby z uwzględnieniem ochrony prywatności respondenta. Dobór próby oparto na kontroli względnej długości przydziałów ufności pokrywających szacowany parametr. Zaprezentowane podejście jest podobne do tego z prac Jaworski i Zieliński [2023] oraz Jaworski [2025], w których rozważano bezwzględną długość przedziałów ufności, a nie względną. W ujęciu względnym ujawniła się konieczność kontrolowania

dolnego ograniczenia na prawdopodobieństwo π poprzez wykorzystanie dodatkowej wiedzy o odsetku osób należących do grupy wrażliwej. W przeciwnym przypadku oczekiwana precyzja, ze względu na niepraktycznie duży rozmiar próby optymalnej, mogłaby być trudna do uzyskania.

BIBLIOGRAFIA

- Greenberg B. G., Abu-Ela A. A., Simons W. R., Horvitz D. G. (1969) The Unrelated Question Randomized Response Model: Theoretical Framework. *Journal of the American Statistical Association*, 64, 520-539.
- Horvitz D. G., Simons W. R. (1967) The Unrelated Question Randomized Response Model. *Proceedings of the Social Statistics Section. American Statistical Association*, 65-67.
- Jaworski S. (2025) The Optimal Sample Size in Triangular Model for Sensitive Questions. *Statistics in Transition*, 26 (1), 221-231.
- Jaworski S., Zieliński W. (2023) The Optimal Sample Size in the Crosswise Model for Sensitive Questions. *Applicationes Mathematicae*, 50 (1), 21-34.
- NZIP (2022) Zakażenia HIV i zachorowania na AIDS w Polsce. Narodowy Instytut Zdrowia Publicznego. http://wwwold.pzh.gov.pl/oldpage/-epimeld/hiv_aids/index.htm (pobrane: 27.05.2022)
- Tan M., Tian G. L., Tang M. L. (2009) Sample Surveys with Sensitive Questions: a Non-randomized Response Approach. *The American Statistician*, 63, 9-16.
- Tian G. L., Yu J. W., Tang M. L., Geng Z. (2007). A New Nonrandomized Model for Analyzing Sensitive Questions with Binary Outcomes. *Statistics in Medicine*, 26, 4238-4252.
- Warner S. L. (1965) Randomized Response: A Survey Technique for Eliminating Evasive Answer Bias. *Journal of the American Statistical Association*, 60, 63-69.
- Yu J.-W., Tian G.-L., Tang M.-L. (2008) Two New Models for Survey Sampling with Sensitive Characteristic: Design and Analysis. *Metrika*, 67, 251-263.

OPTIMAL SAMPLE SELECTION IN THE CROSSWISE AND TRIANGULAR MODELS OF SENSITIVE QUESTIONS

Abstract: In this work, we focus on the optimal selection of a sample in selected models: the crosswise and the triangular model. The optimality criterion consists in choosing the sample size for which the relative length of the confidence interval does not exceed a predetermined value.

Keywords: sensitive questions, nonrandomized response models

JEL classification: C83, C99

LOSS AVERSION AND STATE-DEPENDENT LINEAR UTILITY FUNCTIONS FOR MONETARY RETURNS

Somdeb Lahiri  <https://orcid.org/0000-0002-5247-3497>

(Former Professor) PD Energy University, Gandhinagar (EU-G), India
e-mail: somdeb.lahiri@gmail.com

Abstract: We present a theory of expected utility with state-dependent linear utility functions for monetary returns, that incorporates the possibility of loss-aversion. Our results relate to “first order stochastic dominance”, “mean-preserving spread”, “increasing-concave linear utility profiles” and “risk aversion”. As an application of the expected utility theory developed here, we analyze the contract that a monopolist would offer in an insurance market that allowed for partial coverage of loss.

Keywords: money, utility, state-dependent linear, loss aversion, first order stochastic dominance, mean-preserving spread, risk aversion

JEL Classifications: D81

INTRODUCTION

A common argument against linear utility function for monetary returns is, that an agent with such a utility function would have no incentive to insure himself against possible “loss”. However, this argument seems to collapse if the linear utility function for monetary returns is state dependent and the “probability of the gain or loss” is spelt out as the “probability of the state of nature (SON) in which there is the gain or loss” with the constant marginal utility of monetary returns in the “worse” state being more than the constant marginal utility of money in the “better” state. In what follows we will refer to **states of nature** (SONs).

The seminal contribution of Kahneman and Tversky (Kahneman and Tversky 1979) noted the experimentally verified observation that agents tend to have a marginal utility of loss that is no less- if not higher-than the marginal utility of gain, so that a typical utility function for monetary returns $u:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ may be of the form $u(x) = u^+\max\{x,0\} + u^-\min\{x,0\}$ with $u^- \geq u^+ > 0$. This phenomenon is known as

<https://doi.org/10.22630/MIBE.2025.26.1.3>

“loss aversion”. Thus, any utility function of this form can be represented by a pair of real numbers (u^-, u^+) where $u^- \geq u^+ > 0$. Allowance is made for the possibility of $u^- = u^+$. It is generally assumed that under normal circumstances $u^- - u^+$ is a non-decreasing function of initial wealth, thereby implying that wealthier individuals are more “risk averse” than those individuals who are less wealthy.

The dominant interpretation of probability in expected utility theory, is the one due to Ramsey and de Finetti. Brief discussions along with intuitive motivation of such probabilities are available in two recent papers (Lahiri 2023a, Lahiri 2023b). The Ramsey-de Finetti subjective probability of an “event” or “state of nature” (say E) that is assessed by an agent is the price (say p) that the agent would be willing to pay for a simple bet that returns one unit of money if state of nature ‘ E ’ occurs and nothing otherwise, so that the expected monetary value of the simple bet to the agent is zero. Thus, if the average utility of money in state of nature E is a constant, say $\mu > 0$, then for one unit of money in state of nature E , the agent will be willing to forego μp units of utility and for ξ units of money in state of nature E the agent will be willing to forego $\mu p \xi$ units of utility, the latter being the utility the agent willingly forgoes for ξ simple bets of the type we have just discussed. ξ simple bets, each of which returns one unit of money if E occurs and nothing otherwise, is identical to a bet that returns ξ unit of money if E occurs and nothing otherwise. Thus, Ramsey-de Finetti subjective probability fits comfortably with “expected utility theory” based on constant average state dependent utility. On the other hand, if the average utility in state of nature E is “non-constant”, then there exists ξ such that the average utility of ξ units of money is not equal to the average utility of $p\xi$ units of money. For a bet that returns ξ units of money in state of nature E and nothing otherwise, the agent will be “willingly foregoing” the utility of $p\xi$ units of money and not ‘ p ’ times the utility of ξ units of money, the latter being the expected utility of the bet to the agent. Hence, on the face of it, there seems to be a mismatch between Ramsey-de Finetti subjective probability and expected utility theory based on such an interpretation, if state-dependent average utility of money is “non-constant”.

In this paper we attempt a reconciliation of Ramsey-de Finetti subjective probability with the kind of loss aversion that Kahneman and Tversky had suggested, by allowing an agent to sell a “simple bet on an event” at a higher price than what the agent would be willing to pay to buy it. Perhaps this price wedge reflects a “transaction cost” that the seller incurs. After all, transaction costs are not incurred in “thought experiments”- including the ones used for the purpose of evaluating Ramsey-de Finetti subjective probabilities. Alternatively, it could be the “normal profit” or “the opportunity cost of the seller’s labour time” as in microeconomics. Whether justified or not, such an argument is one way in which the conflict between “loss aversion” and Ramsey-de Finetti subjective probabilities can be resolved. This requires invoking “state-dependent linear utility functions for monetary gains and losses” while allowing for the average utility of losses to exceed the average utility of gains. This allows, decision analysis based on expected utility to fit meaningfully

with the concept of expected utility based on Ramsey-de Finetti probabilities as well as loss aversion, keeping in mind the “caveat” for the price wedge in terms of transaction costs or normal profits that we discussed earlier. A comprehensive exposition of the early stages of the analysis of decision making under uncertainty with state dependent preferences is available in the work of Karni (Karni 1985).

In the next section of the paper, we provide a motivation for our discussion in the subsequent sections, by considering a “toy model” of insurance against a risky loss. We apply expected state dependent linear utility analysis in this model and show that insurance is possible under state-dependent “risk neutrality”. In the third section, we present the formal framework for “expected utility theory with state-dependent linear utility functions for monetary returns”. Using concepts introduced in this section, in subsequent sections we introduce “first order stochastic dominance”, “mean-preserving spread”, “increasing-concave linear utility profiles” and “risk aversion”. As an application of the expected utility theory developed here, we analyze the contract that a monopolist would offer in an insurance market that allowed for partial coverage of loss.

In what follows we often refer to “monetary gains and losses” as “monetary returns”. All proofs of major results are relegated to an appendix of this paper. We hope that with this paper, we are able to provide an incremental impetus for further development for decision analysis with linear utility functions for money.

MOTIVATION- INSURING AGAINST RISKY LOSS

Consider a situation with 2 states of nature 1,2, where an agent with initial wealth $w > 0$ may face a loss of $L \in (0, w)$ units of money in the second SON. Let $p \in (0,1)$ be the probability of loss. Suppose that his utility function for monetary returns in SON i , is a function of the above form with (u_i^-, u_i^+) being the slopes for losses and gains respectively in SON ‘ i ’.

There are two ways in which insurance can be introduced in this setting. First is a variant of the traditional textbook setting where we assume $u_2^- > u_1^-$. Even an individual who is not affected by the loss, would react to the news of the loss- by leaning closer towards caution and hence a higher marginal utility of money- than in the absence of such news, however small the difference in the marginal utilities may be. If one hears about frequent bicycle thefts in the neighbourhood that one lives in, then the same person is likely to be concerned more about the safety of his/her bicycle than he/she would be in the absence of such news, regardless of whether the person has been a victim of such theft or not. For an agent with a stake in the loss, the difference gets more pronounced.

In the absence of an insurance policy the expected utility of the agent is – pu_2^-L .

An insurance policy that provides complete coverage is available for a premium π which if “actuarially fair” would satisfy $\pi = pL$.

The expected utility from buying this policy is $-(1-p)u_1^- + pu_2^- \pi = -p[(1-p)u_1^- + pu_2^-]L$.

Since $u_2^- > u_1^- > 0$ and $p \in (0,1)$, $(1-p)u_1^- + pu_2^- < u_2^-$ and so $-p[(1-p)u_1^- + pu_2^-]L > -pu_2^-L$.

Actually, it would be more realistic to consider three SONs: 1-where there is no loss, 2- where there is a loss and the agent “has not” bought the insurance policy and 3- where there is a loss and the agent “has” bought the insurance policy, with $u_2^- > u_3^- > u_1^- > 0$, since having bought the insurance policy, the agent is somewhat more relaxed than what it would be had it not purchased the insurance policy, but since recovering the insurance payment involves some transaction cost (e.g. paper work, etc.) the agent’s disutility from expenditure incurred on buying the premium could be expected to be higher than what it would be had there been no loss.

A second way in which insurance can be introduced in this context, which may be more realistic is to assume that the seller of the insurance policy has recourse to an investment opportunity, which for some $r > 0$, returns $1 + r$ units of money for every unit of money invested in the current period. In this case, we can weaken the restriction on the slopes of the utility functions and assume $u_2^- \geq u_1^-$, i.e., allow for $u_2^- = u_1^-$.

In this case an insurance policy that provides complete coverage for a premium π , yields an expected return of $(1+r)\pi - pL$ to the seller of the insurance policy which is non-negative if $\pi \geq \frac{pL}{1+r}$. Since $r > 0$, $\frac{pL}{1+r} < pL$, so that the seller of the policy can make a profit by selling it for a premium $\pi \in (\frac{pL}{1+r}, pL)$.

In this case, the expected utility from buying this policy for a premium of π is $-(1-p)u_1^- + pu_2^- \pi$ and $-(1-p)u_1^- + pu_2^- \pi > -pu_2^-L$, since $0 < (1-p)u_1^- + pu_2^- \leq u_2^-$ and $\pi < pL$.

Now let us consider an agent whose initial monetary wealth is $w > 0$ and an investible amount $I \in (0, w)$ can either be diversified equally between two-risky investment opportunities or invested entirely in one investment opportunity, with each investment opportunity having a probability $p \in (0,1)$ of failing.

This is a situation where there are three states of nature denoted by 1,2,3 with (u_i^-, u_i^+) being the slopes for losses and gains respectively in SON ‘i’ being strictly positive. SON 1 is the situation where neither investment opportunity fails, SON 2 is the situation where 50% of the invested amount is lost and SON 3 is the situation where the entire invested amount is lost.

Suppose $0 < u_1^- < u_2^- < u_3^-$.

Even if the agent was not an investor, the news of an investment opportunity crashing would very likely have the effect of increasing its disutility of expenditure and such disutility would further increase if it were to hear the news of two investment opportunities crashing simultaneously. In the case of an investor, the effect of such news could only be expected to be more pronounced.

If the agent invests the entire amount I in exactly one investment opportunity, then his expected utility is $-pu_3^-I$.

If the agent spreads his investment opportunity equally between the 2 investment opportunities, then his expected utility is $-2p(1-p)u_2^- \frac{I}{2} - p^2u_3^-I = -p[(1-p)u_2^- + pu_3^-]I$.

Since $u_3^- > (1-p)u_2^- + pu_3^-$, we have $-p[(1-p)u_2^- + pu_3^-]I > -pu_3^-I$, and hence there is always an incentive for “spreading risks”.

THE FRAMEWORK OF ANALYSIS

Let us now set up the general framework of analysis with state-dependent linear utility functions for monetary returns. For a more general framework of analysis, one may refer to the book by Bonanno (Bonanno 2019).

For some positive integer $L \geq 2$, let $\{1, 2, \dots, L\}$ denote the finite set of states of nature. As mentioned in the introduction, we will refer to a **state of nature** as **SON** and its plural as **SONs**.

A (column) vector $x \in \mathbb{R}^L$ where for each $j \in \{1, \dots, L\}$, the j^{th} coordinate of x denotes the monetary return in SON j , is said to be a **return vector**.

A (column) vector $p \in \mathbb{R}_{++}^L$ satisfying $\sum_{j=1}^L p_j = 1$, such that for $j \in \{1, \dots, L\}$, p_j is the probability of occurrence of SON j , is a **probability vector**.

Given $x, y \in \mathbb{R}^L$, let $y^T x$ denote $\sum_{j=1}^L y_j x_j$.

A **portfolio of risky assets** (briefly referred to as **PORA**) is a pair (x, p) where x is a return vector and p is a probability vector. In what follows we will refer to **portfolios of risky assets** as **PORAs**.

Given a PORA (x, p) with X denoting the random monetary return for (x, p) and $\alpha \in \mathbb{R}$, let $\{X = \alpha\}$ denote the event that the realized SON yields a monetary return of α , $\{X \leq \alpha\}$ denote the event that the realized SON yields a monetary return less than or equal to α , $\{X \geq \alpha\}$ denote the event that the realized SON yields a monetary return greater than or equal to α , $\{X < \alpha\}$ denote the event that the realized SON yields a monetary return less than α , $\{X > \alpha\}$ denote the event that the realized SON yields a monetary return greater than α .

Thus, for all $\alpha \in \mathbb{R}$, Probability of $\{X \leq \alpha\} = 1 - \text{Probability of } \{X > \alpha\}$

The **expected value** of a PORA (x, p) denoted $E(x, p)$ is $p^T x = \sum_{j=1}^L p_j x_j$.

A generalization of the concept of portfolio of risky assets that can be inferred from the solution proposed by Gilboa and Schmeidler (see Gilboa and Schmeidler 1989) as a response to the Ellsberg Paradox is the following.

A **generalized portfolio of risky assets (G-PORA)** is a pair (ξ, p) where $p \in \mathbb{R}_{++}^L$ is a probability vector and for each $j \in \{1, \dots, L\}$, ξ_j is a non-empty closed and bounded set in $\mathbb{R}$ denoting the set of possible returns in SON j , exactly one from which is realized if SON j occurs.

Unless ξ_j is a singleton, there is no known prior probability distribution over ξ_j .

In order to incorporate “ambiguity aversion” one may associate with (ξ, p) , the **min portfolio of risky assets (MIN-PORA)** $(\xi^{\min}, p)$ which is defined as follows: for each $j \in \{1, \dots, L\}$, $\xi_j^{\min} = \min\{\alpha \mid \alpha \in \xi_j\}$. For any $x \in \mathbb{R}^L$ satisfying $x_j \in \xi_j$ for all $j \in \{1, \dots, L\}$, the expected value of the PORA (x, p) can be defined as before, i.e., $E(x, p) = p^T x = \sum_{j=1}^L p_j x_j$.

Thus, $E(\xi^{\min}, p) = \sum_{j=1}^L p_j \xi_j^{\min}$.

A **linear utility profile** is an L -tuple $u = (u_1, \dots, u_L) \in (\mathbb{R}_{++}^2)^L$ where for each $j \in \{1, \dots, L\}$, u_j is a real valued function on $\mathbb{R}$ determined by an ordered pair $(u_j^-, u_j^+) \in \mathbb{R}_{++}^2$ satisfies $u_j^- \geq u_j^+ > 0$, with the interpretation that for all $j \in \{1, \dots, L\}$ and $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_j(\alpha) = u_j^- \min\{\alpha, 0\} + u_j^+ \max\{\alpha, 0\}$ is the (Bernoulli) utility for α units of monetary returns (gains or losses) in SON j .

We allow for the set $\{j \mid u_j^- = u_j^+\}$ to be $\{1, \dots, L\}$ or a proper subset of it, including the null set $\emptyset$.

A similar definition of a linear utility profile has been used in Lahiri (2024) for the purpose of extending the “Arbitrage Theorem” from its usual framework to a one in which state-dependent linear utility functions may allow loss aversion.

Given a linear utility profile $u \in (\mathbb{R}_{++}^2)^L$, we will use u^- to denote the vector $(u_1^-, \dots, u_L^-) \in \mathbb{R}_{++}^L$ and u^+ to denote the vector $(u_1^+, \dots, u_L^+) \in \mathbb{R}_{++}^L$.

Given a linear utility profile u and a PORA (x, p) the **expected utility** of (x, p) for u , denoted by $Eu(x, p)$ is $\sum_{j=1}^L p_j [u_j^- \min\{x_j, 0\} + u_j^+ \max\{x_j, 0\}]$.

Clearly $Eu(x, p) = p_1(u_1(x_1) - u_2(x_2)) + (p_1 + p_2)(u_2(x_2) - u_3(x_3)) + (p_1 + p_2 + p_3)(u_3(x_3) - u_4(x_4)) + \dots + (p_1 + \dots + p_{L-1})(u_{L-1}(x_{L-1}) - u_L(x_L)) + (p_1 + p_2 + \dots + p_L)u_L(x_L) = \sum_{j=1}^{L-1} (\sum_{k=1}^j p_k) (u_j(x_j) - u_{j+1}(x_{j+1})) + (\sum_{k=1}^L p_k) u_L(x_L) = \sum_{j=1}^{L-1} (\sum_{k=1}^j p_k) (u_j(x_j) - u_{j+1}(x_{j+1})) + u_L(x_L)$.

Given a linear utility profile u and a PORA (x, p) the **certainty equivalent** of (x, p) for u , denoted by $CE(u, x, p)$ is the scalar that satisfies $\sum_{j=1}^L p_j [u_j^- \min\{CE(u, x, p), 0\} + u_j^+ \max\{CE(u, x, p), 0\}] = Eu(x, p)$, i.e. $CE(u, x, p) = \frac{Eu(x, p)}{\sum_{j=1}^L p_j u_j^+} = \frac{Eu(x, p)}{p^T u^+}$ if $Eu(x, p) \geq 0$ and $CE(u, x, p) = \frac{Eu(x, p)}{\sum_{j=1}^L p_j u_j^-} = \frac{Eu(x, p)}{p^T u^-}$ if $Eu(x, p) < 0$.

Suppose that (x, p) is a PORA satisfying $x_j < x_{j+1}$ for all $j \in \{1, \dots, L-1\}$. Then, for all $k \in \{1, \dots, L-1\}$ and $\alpha, \beta \in (x_k, x_{k+1})$, Probability of $\{X > \alpha\} = \text{Probability of } \{X > x_k\} = \text{Probability of } \{X > \beta\}$ and Probability of $\{X \leq \alpha\} = \text{Probability of } \{X \leq x_k\} = \text{Probability of } \{X \leq \beta\}$.

FIRST ORDER STOCHASTIC DOMINANCE

Given two PORAs (x, p) and (y, q) with X denoting the random monetary return for (x, p) and Y denoting the random monetary return for (y, q) , we say that (x, p) **stochastically dominates (y, q) in the first order**, denoted by $(x, p) >_{\text{FSD}} (y, q)$ if for all $\alpha \in \mathbb{R}$, $\text{Probability of } \{X > \alpha\} \geq \text{Probability of } \{Y > \alpha\}$ and for some $\alpha \in \mathbb{R}$, $\text{Probability of } \{X > \alpha\} > \text{Probability of } \{Y > \alpha\}$.

The intuitive interpretation of $(x, p) >_{\text{FSD}} (y, q)$ is that given any monetary return α , the probability that the monetary return from (x, p) is greater than α is greater than or equal to the probability that the monetary return from (y, q) is at greater α , and for some monetary return the first probability is strictly greater than the second probability i.e., (x, p) is consistently “more likely” to yield better rewards better than (y, q) .

We know that for a linear utility profile and a PORA (x, p) , $\text{Eu}(x, p) = \sum_{j=1}^{L-1} (\sum_{k=1}^j p_k) (u_j(x_j) - u_{j+1}(x_{j+1})) + u_L(x_L)$.

Proposition 1: Let (x, p) and (x, q) be two PORAs satisfying $x_j < x_{j+1}$ for all $j \in \{1, \dots, L-1\}$. Then $(x, p) >_{\text{FSD}} (x, q)$ if and only if $[\text{Eu}(x, p) > \text{Eu}(x, q)]$ for all linear utility profile u satisfying $u_j(x_j) < u_{j+1}(x_{j+1})$ for all $j \in \{1, \dots, L-1\}$.

MEAN-PRESERVING SPREAD AND INCREASING-CONCAVE LINEAR UTILITY PROFILES:

For this section assume $L \geq 3$.

Given a return vector x satisfying $x_j < x_{j+1}$ for all $j \in \{1, \dots, L-1\}$, a linear utility profile u is said to be **increasing-concave with respect to x** , if for all $j \in \{1, \dots, L-1\}$, $u_j(x_j) < u_{j+1}(x_{j+1})$ and for all $i, j, k \in \{1, 2, \dots, L\}$ with $i < j < k$, $u_j(x_j) > (1-\delta)u_i(x_i) + \delta u_k(x_k)$ where $\delta \in (0, 1)$ satisfies $x_j = (1-\delta)x_i + \delta x_k$.

Clearly, $\delta = \frac{x_j - x_i}{x_k - x_i}$ and $0 < x_j - x_i < x_k - x_i$.

Given a return vector x satisfying $x_j < x_{j+1}$ for all $j \in \{1, \dots, L-1\}$, PORA (x, q) is said to be **obtained by a mean-preserving spread from PORA (x, p)** , denoted $(x, p) \rightarrow_{\text{MSP}} (x, q)$, if $E(x, p) = E(x, q)$ and there exists $i, j, k \in \{1, 2, \dots, L\}$ satisfying $i < j < k$ such that $q_i > p_i$, $q_j < p_j$, $q_k > p_k$ and $p_h = q_h$ for $h \in \{1, 2, \dots, L\} \setminus \{i, j, k\}$.

$[E(x, p) = E(x, q) \text{ and there exists } i, j, k \in \{1, 2, \dots, L\} \text{ satisfying } i < j < k \text{ such that } q_i > p_i, q_j < p_j, q_k > p_k \text{ and } p_h = q_h \text{ for } h \in \{1, 2, \dots, L\} \setminus \{i, j, k\}]$ if and only if $[\text{there exists } i, j, k \in \{1, 2, \dots, L\} \text{ satisfying } i < j < k \text{ such that } q_i > p_i, q_j < p_j, q_k > p_k, p_h = q_h \text{ for } h \in \{1, 2, \dots, L\} \setminus \{i, j, k\} \text{ and } (p_j - q_j)x_j = (q_i - p_i)x_i + (q_k - p_k)x_k]$

$[\text{there exists } i, j, k \in \{1, 2, \dots, L\} \text{ satisfying } i < j < k \text{ such that } q_i > p_i, q_j < p_j, q_k > p_k \text{ and } p_h = q_h \text{ for } h \in \{1, 2, \dots, L\} \setminus \{i, j, k\} \text{ and } (p_j - q_j)x_j = (q_i - p_i)x_i + (q_k - p_k)x_k]$ is

equivalent to [there exists $i, j, k \in \{1, 2, \dots, L\}$ satisfying $i < j < k$ such that $q_i > p_i$, $q_j < p_j$, $q_k > p_k$, $p_h = q_h$ for $h \in \{1, 2, \dots, L\} \setminus \{i, j, k\}$ and $x_j = \frac{q_i - p_i}{p_j - q_j} x_i + \frac{q_k - p_k}{p_j - q_j} x_k$].

Thus, $(x, p) \rightarrow_{\text{MSP}} (x, q)$ if and only if [there exists $i, j, k \in \{1, 2, \dots, L\}$ satisfying $i < j < k$ such that $q_i > p_i$, $q_j < p_j$, $q_k > p_k$, $p_h = q_h$ for $h \in \{1, 2, \dots, L\} \setminus \{i, j, k\}$ and $x_j = \frac{q_i - p_i}{p_j - q_j} x_i + \frac{q_k - p_k}{p_j - q_j} x_k$].

Proposition 2: Let (x, p) and (x, q) be two PORAs satisfying $x_j < x_{j+1}$ for all $j \in \{1, \dots, L-1\}$.

- (a) If $(x, p) \rightarrow_{\text{MSP}} (x, q)$ then $[Eu(x, p) > Eu(x, q)]$ for all linear utility profile u which is increasing-concave with respect to x .
- (b) If $L = 3$, $p_2 \neq q_2$ and $[Eu(x, p) > Eu(x, q)]$ for all linear utility profile u which is increasing-concave with respect to x then $[(x, p) \rightarrow_{\text{MSP}} (x, q)]$.

RISK AVERSION

Given a PORA (x, p) , an agent with linear utility profile u is said to be:

- (i) **Risk Averse relative to (x, p)** if $E(x, p) > CE(u, x, p)$;
- (ii) **Risk Neutral relative to (x, p)** if $E(x, p) = CE(u, x, p)$;
- (iii) **Risk Loving/Seeking relative to (x, p)** if $E(x, p) < CE(u, x, p)$.

Example 1: Let $L = 2$, $u_1 = (1, 1)$ and let $u_2 = (2, 2)$.

Let $(x, p) = ((2, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$. Thus, $E(x, p) = 1$.

In this case, $Eu(x, p) = 1$ and $p^T u^+ = \frac{3}{2}$, so that $CE(u, x, p) = \frac{2}{3} < 1 = E(x, p)$.

Thus, the agent is risk averse relative to $((2, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$.

Now let $(x, p) = ((0, 2), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$. Once again, $E(x, p) = 1$.

Now, $Eu(x, p) = 2$ and since $p^T u^+ = \frac{3}{2}$, we have $CE(u, x, p) = \frac{4}{3} > 1 = E(x, p)$.

Thus, the same agent is risk loving/seeking relative to $((0, 2), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$.

Now suppose $(x, p) = ((1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$. Once again, $E(x, p) = 1$.

Now, $Eu(x, p) = \frac{3}{2}$ and since $p^T u^+ = \frac{3}{2}$, we have $CE(u, x, p) = 1 = E(x, p)$.

Thus, the same agent is now risk neutral relative to $((1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$.

Given a PORA (x, p) and a linear utility profile u , the **risk premium relative to (x, p)** denoted $R(u, x, p) = E(x, p) - CE(u, x, p)$.

Thus, $\sum_{j=1}^L p_j u_j (E(x, p) - R(u, x, p)) = \sum_{j=1}^L p_j u_j (CE(u, x, p)) = Eu(x, p)$.

If the agent is:

- (i) Risk Averse relative to (x, p) , then $R(u, x, p) > 0$;
- (ii) Risk Loving/Seeking relative to (x, p) , then $R(u, x, p) < 0$;

(iii) Risk Neutral relative to (x, p) , then $R(u, x, p) = 0$.

Given two linear utility profiles u, v and two PORAs $(x, p), (y, q)$ we say that u relative to (x, p) is **more risk averse than** v relative to (y, q) if $R(u, x, p) > R(v, y, q)$.

INSURANCE CONTRACTS WITH THE POSSIBILITY OF PARTIAL COVERAGE

As before consider a situation with 2 states of nature 1,2, where an agent with initial wealth $w > 0$ may face a loss of $L \in (0, w)$ units of money in the second SON. Let $p \in (0,1)$ be the probability of loss. Suppose that the agent's linear utility profile is (u_1, u_2) is such that with $0 < u_1^- < u_2^-$.

The expected value of the "risk" is $-pL$

In the absence of an insurance policy the expected utility of the agent is $-pu_2^-L$.

If CE_1 is the certainty equivalent in the absence of any insurance policy, then $[(1-p)u_1^- + pu_2^-]CE_1 = -pu_2^-L$.

$$\text{Thus, } CE_1 = \frac{-pu_2^-L}{(1-p)u_1^- + pu_2^-} = -pL \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}$$

An insurance policy with a **deductible** $d \in [0, L]$ (i.e., in case of loss, the insurer pays $L-d$ to the agent) is available for a premium π .

Hence the expected profit of the insurer is $\pi - p(L-d)$.

For the insurer to voluntarily sell the insurance, it must be "**profitable**", i.e., $\pi - p(L-d) \geq 0$.

Thus, profitability is equivalent to the condition $-pL \geq -(\pi + pd)$.

The expected value of this policy to the agent is $-(\pi + pd)$.

The expected utility of the agent from buying this policy is $-(1-p)u_1^-\pi - pu_2^-(\pi + d) = -[(1-p)u_1^- + pu_2^-]\pi - pu_2^-d$.

For the agent to voluntarily buy the insurance, it must be the case that $-(1-p)u_1^- + pu_2^-]\pi - pu_2^-d \geq -pu_2^-L$, i.e., $-\pi - \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}pd \geq CE_1$.

$$-\pi - \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}pd = -(\pi + pd) + pd[1 - \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}].$$

Thus the agent will voluntarily buy the insurance policy if and only if $-(\pi + pd) + pd[1 - \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}] \geq CE_1$.

A profit maximizing insurer will choose an **insurance contract**, i.e., a pair (π, d) that maximizes $\pi - p(L-d)$, subject to $\pi - p(L-d) \geq 0$, $-(1-p)u_1^- + pu_2^-]\pi - pu_2^-d \geq -pu_2^-L$ and $d \in [0, L]$.

The above problem is equivalent to choosing a pair (π, d) that maximizes $\pi + pd$, subject to $\pi + pd \geq pL$, $[(1-p)u_1^- + pu_2^-]\pi + pu_2^-d \leq pu_2^-L$ and $d \in [0, L]$.

It is easy to see that at an optimal solution, $[(1-p)u_1^- + pu_2^-]\pi + pu_2^-d = pu_2^-L$.

$$\text{Thus, } \pi = \frac{pu_2^-(L-d)}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}.$$

$$\text{Thus, } \pi + pd = p\left[\frac{u_2^-(L-d)}{(1-p)u_1^- + pu_2^-} + d\right] = pd\left[1 - \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}\right] + \frac{pu_2^-L}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}.$$

Since $u_2^- > u_2^1$, we have $\frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-} > 1$ and hence $1 - \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-} < 0$.

$$\text{Thus, } pd\left[1 - \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}\right] + \frac{pu_2^-L}{(1-p)u_1^- + pu_2^-} \text{ is maximized at } d = 0, \text{ thereby}$$

$$\text{implying } \pi = \frac{pu_2^-L}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}.$$

Since $\frac{pu_2^-L}{(1-p)u_1^- + pu_2^-} = \left(\frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}\right)pL$ and $\frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-} > 1$, we have $\pi > pL$.

Since $d = 0$, $\pi + pd > pL$.

Hence, the optimal contract is the pair $\left(\frac{pu_2^-L}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}, 0\right)$, with the “expected profit

of the insurer” being $\frac{pu_2^-L}{(1-p)u_1^- + pu_2^-} - pL = pL\left(\frac{u_2^- - (1-p)u_1^- - pu_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}\right) = \frac{p(1-p)(u_2^- - u_1^-)L}{(1-p)u_1^- + pu_2^-} > 0$.

$$\text{Note: } \pi = \frac{pu_2^-(L-d)}{(1-p)u_1^- + pu_2^-} \text{ implies } -\pi - \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-} pd = -\frac{pu_2^-L}{(1-p)u_1^- + pu_2^-} = CE_1.$$

$$\text{We know that } -\pi - \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-} pd = -(\pi + pd) + pd\left[1 - \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}\right].$$

$$\text{Thus, at an optimal solution } -(\pi + pd) + pd\left[1 - \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}\right] = CE_1.$$

“**Strict Profitability**” is equivalent to the condition $-pL > -(\pi + pd)$ which now reduces to

$$-pL + pd\left[1 - \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}\right] > CE_1 = -\frac{pu_2^-L}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}.$$

Thus **strict profitability** is equivalent to $-pL\left[1 - \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}\right] + pd\left[1 - \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}\right] > 0$, i.e. $p(d-L)\left[1 - \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}\right] \geq 0$.

Since $d \in [0, L]$, this is possible if and only if $1 - \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-} < 0$, i.e. $1 < \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}$

Multiplying throughout by pL which is strictly positive, we get $1 < \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}$ if and only if $pL < \frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}pL$, the latter being equivalent to $-\frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}pL < -pL$.

Since $CE_1 = -\frac{u_2^-}{(1-p)u_1^- + pu_2^-}pL$ and $-pL$ is the expected value of the “risk”, the agent is risk averse relative to $((-L, 0), (p, 1-p))$.

Thus “**Strict Profitability**” is equivalent to the requirement that the agent is risk averse relative to $((-L, 0), (p, 1-p))$.

Let us now consider the somewhat more realistic situation with three SONs: 1-where there is no loss, 2- where there is a loss and the agent “has not” bought the

insurance policy and 3- where there is a loss and the agent “has” bought the insurance policy, with $u_2^- > u_3^- > u_1^- > 0$.

Then, the expected utility of the agent from buying this policy is $-(1-p)u_1^-\pi - pu_3^-(\pi + d) = -[(1-p)u_1^- + pu_3^-]\pi - pu_3^-d$.

Since $u_2^- > u_3^-$, $-(1-p)u_1^-\pi - pu_3^-(\pi + d) > -(1-p)u_1^-\pi - pu_2^-(\pi + d)$.

A profit maximizing insurer will choose an **insurance contract**, i.e., a pair (π, d) that maximizes $\pi - p(L-d)$ subject to $\pi - p(L-d) \geq 0$, $-(1-p)u_1^-\pi - pu_3^-d \geq -pu_2^-L$ and $d \in [0, L]$.

The above problem is equivalent to choosing a pair (π, d) that maximizes $\pi + pd$ subject to $\pi + pd \geq pL$, $[(1-p)u_1^- + pu_3^-]\pi + pu_3^-d \leq pu_2^-L$ and $d \in [0, L]$.

It is easy to see that at an optimal solution, $[(1-p)u_1^- + pu_3^-]\pi + pu_3^-d = pu_2^-L$.

Thus, $\pi = \frac{p(u_2^-L - u_3^-d)}{(1-p)u_1^- + pu_3^-}$.

Thus, $\pi + pd = p\left[\frac{(u_2^-L - u_3^-d)}{(1-p)u_1^- + pu_3^-} + d\right] = pd\left[1 - \frac{u_3^-}{(1-p)u_1^- + pu_3^-}\right] + \frac{pu_2^-L}{(1-p)u_1^- + pu_3^-}$.

Since $u_3^- > u_3^1$, we have $\frac{u_3^-}{(1-p)u_1^- + pu_3^-} > 1$ and hence $1 - \frac{u_3^-}{(1-p)u_1^- + pu_3^-} < 0$.

Thus, $pd\left[1 - \frac{u_3^-}{(1-p)u_1^- + pu_3^-}\right] + \frac{pu_2^-L}{(1-p)u_1^- + pu_3^-}$ is maximized at $d = 0$, thereby implying

$\pi = \frac{pu_2^-L}{(1-p)u_1^- + pu_3^-} > \frac{pu_3^-L}{(1-p)u_1^- + pu_3^-}$, since $u_2^- > u_3^-$.

Since $d = 0$, $\pi + pd = \frac{pu_2^-L}{(1-p)u_1^- + pu_3^-} > pL$.

Hence, the optimal contract is the pair $(\frac{pu_2^-L}{(1-p)u_1^- + pu_3^-}, 0)$, with the “expected profit

of the insurer” being $\frac{pu_2^-L}{(1-p)u_1^- + pu_3^-} - pL > \frac{pu_3^-L}{(1-p)u_1^- + pu_3^-} - pL$.

Thus, the expected profit of the insurer is higher in this more realistic situation than in the earlier situation.

Acknowledgment: I would like to that Subhadip Chakrabarti and Itzhak Gilboa for comments and queries about an earlier version. I would also like to apologise to R. Chandrasekar (Sekar) for claiming his valuable respite from “real-world finance” during weekends, to glance through the work of “dreamers(?)”. I hope practitioners of finance will find less dreaming here than in the eternal truth here: “<https://www.youtube.com/watch?v=hWWvTTbCGTI>”. Finally, I wish to thank two anonymous referees of this journal, for a splendid job of finding errors and suggesting improvements.

REFERENCES

- Bonanno G. (2019) Uncertainty Risk and Information.
https://faculty.econ.ucdavis.edu/faculty/bonanno/PDF/URI_book.pdf

- Gilboa I., Schmeidler D. (1989) Maxmin Expected Utility with Non-Unique Prior. *Journal of Mathematical Economics*, 18(2), 141-153.
- Kahneman D. Tversky A. (1979) Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk. *Econometrica*, 47(2), 263-291.
- Karni E. (1985) *Decision Making Under Uncertainty: The Case of State-Dependent Preferences*. Harvard University Press.
- Lahiri S. (2023a) Understanding Expected Utility for Decision Making. *Management Studies*, 11(2), 93-104.
- Lahiri S. (2023b) Understanding Ramsey-de Finetti Probabilities and the St. Petersburg Paradox. *Economics and Management Information*, 2(2), 1-4.
<https://doi.org/10.58195/emi.v2i2.91>
- Lahiri S. (2024) Weak Arbitrage Theorem Incorporating Loss Aversion. *Preprints*.
<https://doi.org/10.20944/preprints202411.0287.v1>

APPENDIX

Proof of Proposition 1: $Eu(x, p) - Eu(x, q) = [\sum_{j=1}^{L-1} (\sum_{k=1}^j p_k) (u_j(x_j) - u_{j+1}(x_{j+1})) + u_L(x_L)] - [\sum_{j=1}^{L-1} (\sum_{k=1}^j q_k) (u_j(x_j) - u_{j+1}(x_{j+1})) + (\sum_{k=1}^L q_k) u_L(x_L)] = \sum_{j=1}^{L-1} (\sum_{k=1}^j p_k - \sum_{k=1}^j q_k) (u_j(x_j) - u_{j+1}(x_{j+1}))$, since $\sum_{k=1}^L p_k = 1 = \sum_{k=1}^L q_k$.

Suppose $(x, p) \succ_{FSD} (x, q)$. Then, $\sum_{k=1}^j p_k - \sum_{k=1}^j q_k \leq 0$ for all $j \in \{1, \dots, L\}$, with strict inequality for at least one $j \in \{1, \dots, L-1\}$, since $\sum_{k=1}^L p_k = 1 = \sum_{k=1}^L q_k$.

If u is a linear utility profile satisfying $u_j(x_j) < u_{j+1}(x_{j+1})$ for all $j \in \{1, \dots, L-1\}$, then $\sum_{j=1}^{L-1} (\sum_{k=1}^j p_k - \sum_{k=1}^j q_k) (u_j(x_j) - u_{j+1}(x_{j+1})) > 0$.

Thus, $Eu(x, p) - Eu(x, q) > 0$, i.e., $Eu(x, p) > Eu(x, q)$.

Now suppose that it is not the case that $(x, p) \succ_{FSD} (x, q)$.

Thus, $\{j \in \{1, \dots, L-1\} \mid \sum_{k=1}^j p_k - \sum_{k=1}^j q_k > 0\} \neq \emptyset$. Let $\eta = \min\{\sum_{k=1}^j p_k - \sum_{k=1}^j q_k \mid \sum_{k=1}^j p_k - \sum_{k=1}^j q_k > 0\}$.

Let $u_1 = (1, 1)$. Having defined $u_j = (u_j^-, u_j^+) \in \mathbb{R}_{++}^2$ satisfying $u_j^- = u_j^+ > 0$, let $u_{j+1} = (u_{j+1}^-, u_{j+1}^+) \in \mathbb{R}_{++}^2$ satisfying $u_{j+1}^- = u_{j+1}^+ > 0$ be such that $u_{j+1}(x_{j+1}) - u_j(x_j) = \frac{2}{\eta}$

if $\sum_{k=1}^j p_k - \sum_{k=1}^j q_k > 0$ and $\frac{1}{2L} > u_{j+1}(x_{j+1}) - u_j(x_j) > 0$, otherwise. This is possible, since $x_{j+1} > x_j$ implies that it is not possible for both x_{j+1} and x_j to be zero.

Thus, $Eu(x, p) - Eu(x, q) = -\frac{2}{\eta} \sum_{h \in \{j \in \{1, \dots, L-1\} \mid \sum_{k=1}^j p_k - \sum_{k=1}^j q_k > 0\}} \sum_{k=1}^h p_k - \sum_{k=1}^h q_k + \sum_{h \in \{j \in \{1, \dots, L-1\} \mid \sum_{k=1}^j p_k - \sum_{k=1}^j q_k \leq 0\}} (\sum_{k=1}^h p_k - \sum_{k=1}^h q_k) (u_h(x_h) - u_{h+1}(x_{h+1})) = -\frac{2}{\eta} \sum_{h \in \{j \in \{1, \dots, L-1\} \mid \sum_{k=1}^j p_k - \sum_{k=1}^j q_k > 0\}} \sum_{k=1}^h p_k - \sum_{k=1}^h q_k +$

$$\sum_{h \in \{j \in \{1, \dots, L-1\} \mid \sum_{k=1}^j p_k - \sum_{k=1}^j q_k \leq 0\}} (\sum_{k=1}^h q_k - \sum_{k=1}^h p_k) (u_{h+1}(x_{h+1}) - u_h(x_h)) \leq -2 + (L-1) \frac{1}{2L} \leq -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} < 0.$$

Thus, $[Eu(x, p) > Eu(x, q)]$ for all linear utility profile u satisfying $u_j(x_j) < u_{j+1}(x_{j+1})$ for all $j \in \{1, \dots, L-1\}$ implies $(x, p) \succ_{FSD} (x, q)$. Q.E.D.

Proof of Proposition 2: (a) Suppose $(x, p) \rightarrow_{MSP} (x, q)$ and let u be an increasing-concave linear utility profile with respect to x .

Hence, there exists $i, j, k \in \{1, 2, \dots, L\}$ satisfying $i < j < k$ such that $q_i > p_i$, $q_j < p_j$, $q_k > p_k$ and $p_h = q_h$ for $h \in \{1, 2, \dots, L\} \setminus \{i, j, k\}$ and $(p_j - q_j)x_j = (q_i - p_i)x_i + (q_k - p_k)x_k$ is equivalent to [there exists $i, j, k \in \{1, 2, \dots, L\}$ satisfying $i < j < k$ such that $q_i > p_i$, $q_j < p_j$, $q_k > p_k$, $p_h = q_h$ for $h \in \{1, 2, \dots, L\} \setminus \{i, j, k\}$ and $x_j = \frac{q_i - p_i}{p_j - q_j} x_i + \frac{q_k - p_k}{p_j - q_j} x_k$].

However, $x_j = (1 - \delta)x_i + \delta x_k$ where $\delta = \frac{x_j - x_i}{x_k - x_i} \in (0, 1)$.

Further $p_i + p_j + p_k = q_i + q_j + q_k$ implies $p_j - q_j = (q_i - p_i) + (q_k - p_k)$.

Thus, $\frac{q_i - p_i}{p_j - q_j} + \frac{q_k - p_k}{p_j - q_j} = 1$ with $\frac{q_i - p_i}{p_j - q_j} > 0$ and $\frac{q_k - p_k}{p_j - q_j} > 0$.

Hence, $\frac{q_k - p_k}{p_j - q_j} = \delta$ and $\frac{q_i - p_i}{p_j - q_j} = 1 - \delta$.

Since u is increasing-concave $u_j(x_j) > (1 - \delta)u_i(x_i) + \delta u_k(x_k)$.

Thus, $(p_j - q_j)u_j(x_j) > (q_i - p_i)u_i(x_i) + (q_k - p_k)u_k(x_k)$, i.e., $p_i u_i(x_i) + p_j u_j(x_j) + p_k u_k(x_k) > q_i u_i(x_i) + q_j u_j(x_j) + q_k u_k(x_k)$.

Since, $p_h = q_h$ for $h \in \{1, 2, \dots, L\} \setminus \{i, j, k\}$, we get $Eu(x, p) > Eu(x, q)$.

(b) Now suppose $L = 3$ and $x_1 < x_2 < x_3$ and $p_2 \neq q_2$.

We have $p_1 + p_2 + p_3 = q_1 + q_2 + q_3 = 1$.

Suppose, $E(x, p) = E(x, q)$. Thus, $p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3$.

Suppose, $Eu(x, p) > Eu(x, q)$ for all linear utility profiles satisfying $u_1(x_1) < u_2(x_2) < u_3(x_3)$ and $u_2(x_2) > (1 - \delta)u_1(x_1) + \delta u_3(x_3)$, where $x_2 = (1 - \delta)x_1 + \delta x_3$.

Since $p_2 - q_2 \neq 0$, $(p_2 - q_2)x_2 = (q_1 - p_1)x_1 + (q_3 - p_3)x_3$ implies $x_2 = \frac{q_1 - p_1}{p_2 - q_2} x_1 + \frac{q_3 - p_3}{p_2 - q_2} x_3$
 $= \frac{q_1 - p_1}{p_2 - q_2} x_1 + \frac{(1 - q_1 - q_2) - (1 - p_1 - p_2)}{p_2 - q_2} x_3 = \frac{q_1 - p_1}{p_2 - q_2} x_1 + \frac{(p_2 - q_2) - (q_1 - p_1)}{p_2 - q_2} x_3 = x_3 - \frac{q_1 - p_1}{p_2 - q_2} (x_3 - x_1)$, i.e., $x_2 = x_3 - \frac{q_1 - p_1}{p_2 - q_2} (x_3 - x_1)$.

$x_2 < x_3$ and $x_3 > x_1$ implies $\frac{q_1 - p_1}{p_2 - q_2} > 0$.

Similarly, $x_2 = \frac{q_1 - p_1}{p_2 - q_2} x_1 + \frac{q_3 - p_3}{p_2 - q_2} x_3 = \frac{(1 - q_2 - q_3) - (1 - p_2 - p_3)}{p_2 - q_2} x_1 + \frac{q_3 - p_3}{p_2 - q_2} x_3 = \frac{(p_2 - q_2) - (q_3 - p_3)}{p_2 - q_2} x_1 + \frac{q_3 - p_3}{p_2 - q_2} x_3 = x_1 + \frac{q_3 - p_3}{p_2 - q_2} (x_3 - x_1)$.

$x_2 > x_1$ and $x_3 > x_1$ implies $\frac{q_3 - p_3}{p_2 - q_2} > 0$.

Thus, $x_2 = \frac{q_1 - p_1}{p_2 - q_2} x_1 + \frac{q_3 - p_3}{p_2 - q_2} x_3$, $x_2 = (1 - \delta)x_1 + \delta x_3$, $\delta > 0$, $1 - \delta > 0$, $\frac{q_3 - p_3}{p_2 - q_2} > 0$, $\frac{q_1 - p_1}{p_2 - q_2} > 0$ and $x_1 < x_2 < x_3$ implies $\delta = \frac{q_3 - p_3}{p_2 - q_2}$ and $1 - \delta = \frac{q_1 - p_1}{p_2 - q_2}$.

Thus, $u_2(x_2) > \frac{q_1 - p_1}{p_2 - q_2} u_1(x_1) + \frac{q_3 - p_3}{p_2 - q_2} u_3(x_3)$.

If $p_2 < q_2$, then $(p_2 - q_2)u_2(x_2) < (q_1 - p_1)u_1(x_1) + (q_3 - p_3)u_3(x_3)$ and thus, $Eu(x, p) = p_1 u_1(x_1) + p_2 u_2(x_2) + p_3 u_3(x_3) < q_1 u_1(x_1) + q_2 u_2(x_2) + q_3 u_3(x_3) = Eu(x, q)$, leading to a contradiction.

Thus, it must be the case that $p_2 > q_2$.

Hence, $\frac{q_1 - p_1}{p_2 - q_2} > 0$ implies $q_1 > p_1$ and $\frac{q_3 - p_3}{p_2 - q_2} > 0$ implies $q_3 > p_3$.

Thus, we have $(x, p) \rightarrow_{MSP} (x, q)$. Q.E.D.

Note: The proof of part (b) in Proposition 2, can very likely be extended to $L > 3$.

ANALYSIS OF THE BANKRUPTCY PROBABILITY OF SELECTED COMPANIES LISTED ON THE WARSAW STOCK EXCHANGE AND OPERATING IN UKRAINE

Magdalena Kondej  <https://orcid.org/0000-0002-0806-8857>

Institute of Economics and Finance
Warsaw University of Life Sciences – SGGW
e-mail: magdalena_kondej@sggw.edu.pl

Abstract: The aim of the research was to assess the bankruptcy risk of three agribusiness companies listed on the Warsaw Stock Exchange and operating in Ukraine during the 2019-2023 COVID-19 pandemic and war. An Edward Altman discriminant analysis was carried out, along with an analysis of selected financial ratios. The results of the financial analysis of Astarta Holding N.V., KSG Agro S.A., and Ovostar Union N.V. from 2019 to 2023 reveal differing trends.

Keywords: discriminant analysis, corporate bankruptcy prediction models, financial analysis, COVID-19 pandemic

JEL classification: G07, G17

INTRODUCTION

Businesses in Ukraine have been significantly impacted by external factors in recent years, predominantly the COVID-19 pandemic and the ongoing war. The initial invasion of Ukraine by the Russian Federation led to significant inflation in Ukraine, as demonstrated by a 30% reduction in real household income over the subsequent year. Ukraine worked on rebuilding its economy in 2016 and the effort continued until 2020 when the COVID-19 pandemic took precedence over economic recovery. There was an overall economic contraction of 4% tied to the pandemic, undoing much of the relief effort up to that point. Once the pandemic ended and Ukraine began to focus on rebuilding their economy once more, the Russian Federation reaggresed in February 2022 which ushered in a another economic crisis [Petryshyn 2022]. According to the Polish Economic Institute, Ukraine GDP

<https://doi.org/10.22630/MIBE.2025.26.1.4>

declined 29.1% in 2022, while the Kyiv School of Economics estimated Ukraine's losses in fixed assets at at US\$143.8 billion. The unemployment rate surged by over 160%, while real wages decreased by 15.8%. The most significant declines in employment were observed in metallurgy, transport, and agriculture. The authors of the publication "Gospodarka wojenna: Ukraina po roku od rosyjskiej inwazji" ("The War Economy: Ukraine One Year After the Russian Invasion") highlighted that Ukraine's fiscal situation was critical. The budget expenditures nearly doubled to 2,705.4 billion hryvnias, with the most substantial increase allocated to the defense sector (rising from 8.6% to 42.2% of the budget). The agricultural sector, which constitutes 14% of Ukraine's GDP, also suffered considerable losses, with cultivated land area shrinking by 30%. Another major challenge for the Ukrainian economy was the sharp rise in inflation, driven primarily by escalating energy costs [Kopiński et al. 2023]. Despite numerous adversities, Ukraine's economy remained resilient, largely due to international financial assistance and its ability to adapt to wartime conditions. According to official data from the European Council, since the onset of Russian aggression in 2022, the European Union and its Member States have provided approximately €135 billion in support to Ukraine and its citizens (as of March 1, 2025).

The ongoing full-scale armed conflict has had a particularly detrimental impact on the food sector, leading to losses caused by land occupation and the blockade of seaports - key export channels [Hamulczuk et al. 2023]. The agricultural sector experienced significant disruptions due to a 30% reduction in available farmland [Petryshyn 2022]. Conducting business under such volatile and unpredictable economic conditions necessitates continuous financial monitoring. The early identification of negative trends enables the implementation of corrective measures, thereby mitigating the risk of potential crises. Financial indicators serve as essential tools for controlling and assessing a company's financial health [Kuciński 2023].

However, every corporate decision entails inherent risks, which may lead to financial distress or even bankruptcy. In the current economic context, a bankrupt entity is defined as a company unable to meet its financial obligations on time, with insufficient assets to cover its liabilities, even if it remains operational [Schwartz 2004]. The insolvency of a business has far-reaching consequences for various stakeholders, including owners, employees, and creditors. The ramifications of bankruptcy extend beyond economic losses, encompassing social and psychological consequences as well [Boratyńska 2014].

Bankruptcy prediction remains a key element of corporate financial assessment, relevant for investors, creditors, and managers. Traditional tools, such as Altman's Z-score models, have been widely used since the early 20th century, originating in response to major financial crises [Juszczyk et al. 2014]. While the issue of corporate financial distress has been extensively studied, this paper offers a novel perspective by applying the Altman model to Ukrainian agriholdings amid severe macroeconomic and geopolitical disruptions.

RESEARCH AIM, DATA AND METHODS

The aim of this research was to assess the potential for bankruptcy of three selected companies from the agri-food sector, listed on the Warsaw Stock Exchange and operating in Ukraine. The period of analysis was 2019-2023, the time of the COVID-19 pandemic and the full-scale war in Ukraine.

The paper uses a discriminant analysis tool developed by Edward Altman [2000] for listed companies and analyses selected financial ratios, such as: return on equity, return on assets, return on sales, current and quick liquidity, overall debt and asset turnover ratios.

The Z-score model is one of the most frequently cited studies on discriminant functions in the literature and serves as the foundation for the development of numerous bankruptcy prediction models. It has been widely applied in assessing the financial condition of companies across various industries, including manufacturing, services, publicly listed firms, and financial institutions. Despite the passage of time since its inception, the Z-score model, developed by Edward Altman [1968], remains one of the most extensively referenced models for predicting financial distress and bankruptcy risk. Its proven effectiveness makes it a valuable tool for investors, regulators, and other stakeholders concerned with evaluating corporate financial stability [Rashid et al. 2023]. Over the years, Altman has introduced several variants of the Z-score model, each tailored to the specific characteristics of different types of companies, including:

- Z-Score [1968] – the original model designed for publicly listed manufacturing firms in the United States.
- Z'-Score [1983] – a modified version adapted for privately held manufacturing companies.
- ZETA Score [1977] – a model developed for large corporations to predict insolvency.
- Emerging Market Score (EMS) [2000] – a model designed for companies operating in emerging markets.

The function of the ESM model is shown below:

$$EMS = 3.25 + (6.56 \cdot X_1) + (3.26 \cdot X_2) + (6.72 \cdot X_3) + (1.05 \cdot X_4) \quad (1)$$

where:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\text{working capital}}{\text{total assets}}, \\ X_2 &= \frac{\text{retained earning}}{\text{total assets}}, \\ X_3 &= \frac{\text{operating income}}{\text{total assets}}, \\ X_4 &= \frac{\text{book value of equity}}{\text{total liabilities}}. \end{aligned}$$

Within the framework of this study, the implementation of the EMS model variant constitutes a theoretically grounded and context-sensitive methodological adjustment, appropriately reflecting the structural characteristics of emerging market economies and the inherent limitations in financial data availability.

The research material consisted of the financial data of three selected listed companies: Astarta Holding N.V., KSG Agro S.A., and Ovostar Union N.V. for the period 2019-2023. Table 1 presents the general characteristics of the companies studied.

Table 1. Characteristics and revenue of the companies under study

Company name	Revenue from sales (in thousand PLN)	Description
Astarta Holding N.V.	516,688	An agro-industrial company operating in the food processing sector. Its core business includes the production and trade of sugar derived from sugar beets.
KSG Agro S.A.	37,208	One of the largest agro-holdings in the Dnipropetrovsk region. The company's primary activities involve land cultivation and the production of agricultural commodities such as corn, wheat, barley, rapeseed, and soybeans. Additionally, KSG Agro specializes in the cultivation and processing of vegetable and fruit products.
Ovostar Union N.V.	115,077	A company engaged in the agri-food sector in Ukraine, focusing on poultry farming, the production of table eggs, and the processing of eggs into liquid and dried products.

Source: own elaboration based on publicly available data

RESULTS

Table 2 presents the calculated values of selected profitability ratios for Astarta Holding N.V., KSG Agro S.A., and Ovostar Union N.V. for the years 2019-2023.

Table 2. The calculated values of the profitability ratios for the companies analysed

Company name	Financial ratios [%]	Years				
		2019	2020	2021	2022	2023
Astarta Holding N.V.	Return on equity	1.56	2.57	27.31	13.14	11.36
KSG Agro S.A.		162.10	15.93	121.92	-16.52	11.56
Ovostar Union N.V.		-15.34	2.50	1.39	10.12	33.16

Company name	Financial ratios [%]	Years				
		2019	2020	2021	2022	2023
Astarta Holding N.V.	Return on total assets	1.56	8.64	22.35	12.81	11.36
KSG Agro S.A.		11.03	6.15	15.13	0.54	-3.50
Ovostar Union N.V.		-12.54	2.95	0.66	8.27	27.74
Astarta Holding N.V.	Return on sales	0.38	2.07	24.93	12.78	10
KSG Agro S.A.		17	6	58	-10	-6
Ovostar Union N.V.		17.27	5.96	57.59	-10.38	-6.18

Source: own research based on data from the financial statements of selected companies, obtained from the Emerging Markets Information Service (EMIS) database for the years 2019–2023

The return on equity (ROE) ratio measures the amount of net profit generated per unit of equity. The optimal value should be positive and significantly above zero, indicating effective capital utilization. In the case of Astarta Holding N.V., ROE remained positive throughout the analysed period, peaking at 27.31% in 2021. However, following this period, the ratio began to decline, largely due to the escalation of the armed conflict. The performance of KSG Agro S.A. was characterized by considerable volatility. While the company achieved exceptionally high ROE values in 2019 (162.10%) and 2020 (121.92%), a sharp decline in 2022 resulted in a negative value of -16.52%. This downturn was primarily driven by a decrease in net profit and a reduction in equity. Ovostar Union N.V., which reported a negative ROE of -15.34% in 2019, demonstrated a consistent upward trend in subsequent years, ultimately reaching 33.16% in 2023, suggesting a significant improvement in financial performance.

The return on assets (ROA) ratio assesses the efficiency of asset utilization in generating net profit. A positive value indicates the profitability of a company's operations. Astarta Holding N.V. maintained positive ROA values throughout the analyzed period, reaching its highest level in 2021, which reflects effective asset management and an increase in total assets. Conversely, KSG Agro S.A. exhibited a downward trend in ROA, which should be interpreted negatively. After relatively strong results in 2019–2020, the company recorded a negative value of -3.50% in 2023, suggesting operational inefficiencies and declining asset utilization effectiveness. A particularly notable positive development was observed in Ovostar Union N.V., where ROA improved significantly from -12.54% in 2019 to 27.74% in 2023, indicating enhanced operational efficiency.

The return on sales (ROS) ratio measures the amount of operating profit generated per unit of net sales revenue. A positive value signifies an efficient

operational structure. The declining ROS for Ovostar Union N.V. and KSG Agro S.A. should be viewed as a negative indicator, as both companies reported negative values starting in 2022, largely due to a significant drop in operating profits. In contrast, Astarta Holding N.V. experienced an upward trend in ROS until 2021, reaching 24.93%, before declining to 10% in 2023. Despite this decrease, the ratio remained positive throughout the analysed period, indicating the company's stable operational performance.

Table 3 provides an overview of the selected financial liquidity indicators computed for Astarta Holding N.V., KSG Agro S.A., and Ovostar Union N.V. over the period from 2019 to 2023. The presented data offer insights into the liquidity positions of these companies, enabling a comparative analysis of their financial stability and short-term solvency across the analysed years.

Table 3. The calculated values of the liquidity ratios for the companies analysed

Company name	Financial ratios	Years				
		2019	2020	2021	2022	2023
Astarta Holding N.V.	Current liquidity	1.40	3.21	4.44	3.38	4.44
KSG Agro S.A.		0.70	0.75	1.16	0.62	0.60
Ovostar Union N.V.		2.59	2.01	2.09	3.52	6.86
Astarta Holding N.V.	Quick liquidity	0.45	1.44	1.52	1.23	1.42
KSG Agro S.A.		0.27	0.43	0.61	0.32	0.31
Ovostar Union N.V.		1.98	1.39	1.54	2.86	5.97

Source: own research based on data from the financial statements of selected companies, obtained from the Emerging Markets Information Service (EMIS) database for the years 2019–2023

The current liquidity ratio indicates the company's ability to repay its short-term liabilities using current assets. The optimal value of this ratio ranges from 1.2 to 2.0. Astarta Holding N.V., in the years 2020–2023, exhibited ratio values well above the optimal range (3.21–4.44). An excessively high value of the indicator may suggest cash hoarding and the maintenance of a high level of receivables, which could indicate a lack of new investments in the company. Such a situation may have resulted from the uncertain future of the company, operating in a war-affected country. Similarly, the increase in the value of current liquidity ratios (from 2.59 in 2019 to 6.86 in 2023) at Ovostar Union N.V. may have been a precautionary response to the unstable political situation in Ukraine. In contrast, KSG Agro S.A., which recorded below-optimal values of the indicator in the years under review,

should be assessed negatively. This was primarily due to a significant increase in short-term liabilities accompanied by a decrease in current assets.

The quick liquidity ratio measures the extent to which short-term liabilities are covered by highly liquid assets. The optimal value of this ratio is 1.0. Astarta Holding N.V. has maintained values of this ratio higher than the recommended level since 2020. Similarly, Ovostar Union N.V. has shown significantly higher values of the indicator. A ratio value above the optimal level means that the company can quickly cover its current liabilities. In contrast, the values of the quick ratio for KSG Agro S.A., ranging from 0.27 to 0.61, should be assessed negatively. The low value of the ratio indicates a significant decrease in the company's cash reserves. Companies with elevated liquidity ratios likely prioritized maintaining financial buffers to mitigate uncertainty, whereas firms with constrained liquidity faced heightened vulnerability to short-term financial shocks.

Another financial indicator analysed was the asset turnover ratio. The calculated values are presented in Table 4.

Table 4. The calculated values of the asset turnover ratios for the companies analysed

Company name	Years				
	2019	2020	2021	2022	2023
Astarta Holding N.V.	0.59	0.81	0.71	0.72	0.87
KSG Agro S.A.	0.32	0.34	0.69	0.46	0.59
Ovostar Union N.V.	0.72	0.75	0.95	1.23	1.14

Source: own research based on data from the financial statements of selected companies, obtained from the Emerging Markets Information Service (EMIS) database for the years 2019–2023

The asset turnover ratio measures a company's ability to generate sales revenue from its assets. The increase in the ratio for Astarta Holding N.V. (from 0.59 in 2019 to 0.81 in 2020, and then ranging from 0.71 to 0.87 in 2021–2023) and Ovostar Union N.V. should be viewed positively, as it reflects an increase in sales revenue. KSG Agro S.A. achieved the highest value of the ratio in 2021 (0.69). A higher total asset turnover ratio indicates better efficiency in managing the company's assets. This upward trend may be linked to the relatively lean asset structures and export-oriented business models of Astarta and Ovostar, which allowed for more efficient utilization of resources despite external disruptions.

Furthermore, the operational resilience of Astarta and Ovostar can be attributed to their more diversified product structures and relatively advanced logistical capabilities, which likely mitigated the negative effects of supply chain disruptions. By contrast, KSG Agro's asset utilization may exhibit greater vulnerability to regional disturbances, stemming from its narrower operational scope and less diversified asset allocation.

The last financial indicator analysed in this article was the overall debt ratio. The values of the indicator are presented in Table 5.

Table 5. The calculated values of the overall debt ratios for the companies analysed

Company Name	Years				
	2019	2020	2021	2022	2023
Astarta Holding N.V.	0.45	0.40	0.30	0.33	0.28
KSG Agro S.A.	0.89	0.87	0.77	0.80	1.26
Ovostar Union N.V.	0.15	0.18	0.21	0.24	0.12

Source: own research based on data from the financial statements of selected companies, obtained from the Emerging Markets Information Service (EMIS) database for the years 2019–2023

The overall debt ratio indicates the extent to which a company's assets are financed by external capital, i.e., the share of creditors in financing total assets. The optimal value of the ratio should fall within the range of 0.57–0.67. From 2019 to 2023, the ratio values for KSG Agro S.A. were significantly higher than the recommended range, indicating a high financial risk related to the potential loss of the company's ability to repay its debt (i.e., to make timely payments of liabilities) during the analysed period. On a positive note, Astarta Holding N.V. saw a decrease in its total debt ratio from 0.45 in 2019 to 0.30 in 2021, followed by a further decrease to 0.28 in 2023, compared to 0.33 in 2022. This decline is primarily due to a reduction in the company's total liabilities. The overall debt ratio for Ovostar Union N.V. remained below the optimal range throughout the period under review.

These differences may stem from varying capital structures and financing strategies: while Astarta and Ovostar appear to rely more heavily on internal financing and reinvested earnings, KSG Agro's elevated debt levels may reflect greater exposure to short-term borrowing, compounded by limited external equity access and weaker operational cash flows amid geopolitical instability.

Table 6 shows the calculated EMS Score values for the three companies analysed. The colours used in the table correspond to the levels of bankruptcy risk. Dark grey indicates the company's risk of bankruptcy, while light grey indicates the safe zone.

Table 6. Comparison of EMS Score Values for Three Selected Companies

Company name	Years				
	2019	2020	2021	2022	2023
Astarta Holding N.V.	7.63	11.04	12.97	12.50	13.02
KSG Agro S.A.	0.77	1.00	4.65	-2.60	-2.08
Ovostar Union N.V.	13.80	13.59	12.90	15.76	23.83

Source: own research based on data from the financial statements of selected companies, obtained from the Emerging Markets Information Service (EMIS) database for the years 2019–2023

The analysis of the EMS Score function revealed that Astarta Holding N.V. exhibited a positive growth trend. The value of the calculated function in 2019 increased by more than 5 points (from 7.63 to 13.02). The value obtained in 2023

indicated an improvement in the company's financial stability and a low risk of bankruptcy in the near future. In contrast, the values for KSG Agro S.A. showed a concerning decline (from 4.65 in 2021 to -2.08 in 2023). This result pointed to serious financial problems and an increased risk of bankruptcy. From 2022 onwards, KSG Agro S.A. was in the 'danger zone'. Based on the results shown in Figure 1 above, it is evident that Ovostar Union N.V. experienced an increase in its EMS Score, reaching a value of 23.83 in 2023. This indicates the company's stable financial health. Ovostar Union N.V. remained in the 'safety zone', with results suggesting high financial stability and a low risk of bankruptcy.

These results align with the broader financial indicators analysed, confirming the divergent financial trajectories of the firms. The improvement in EMS Score for Astarta Holding N.V. and Ovostar Union N.V. corresponds with their positive profitability and liquidity trends, while the decline observed for KSG Agro S.A. reflects its deteriorating financial condition and heightened bankruptcy risk. This coherence strengthens the validity of the EMS Score as a diagnostic tool within the context of the study.

SUMMARY

The financial analysis of Astarta Holding N.V., KSG Agro S.A., and Ovostar Union N.V. from 2019 to 2023 reveals differing trends. Astarta Holding N.V. showed strong performance with positive ROE, ROA, and ROS, though liquidity ratios were above optimal levels, possibly due to cautious financial management amid political instability. Its EMS Score improved, indicating strong financial stability and low bankruptcy risk. KSG Agro S.A. had high ROE in 2019-2020 but saw a sharp decline in 2022-2023, with negative ROE and declining ROA, signaling operational inefficiencies. Its liquidity ratios and high debt ratios indicated financial stress, and its EMS Score dropped significantly, signaling increased bankruptcy risk. Ovostar Union N.V. demonstrated improved financial performance, with a strong upward trend in ROE and ROA. Despite increased liquidity ratios, it maintained a safe debt level and saw its EMS Score rise, reflecting high financial stability and low bankruptcy risk.

Variations in liquidity ratios can be attributed to firm-specific factors such as capital structure, export dependence, and geographic diversification. Companies with stronger equity positions and international exposure were better equipped to accumulate liquid assets, while firms with limited financial flexibility faced greater liquidity constraints under geopolitical and economic stress.

In summary, Astarta Holding N.V. and Ovostar Union N.V. demonstrated relatively strong financial performance, with effective asset management and solid liquidity, while KSG Agro S.A. faced significant challenges in maintaining profitability, managing debt, and ensuring liquidity, ultimately indicating a higher risk of financial distress. The results emphasize the critical role of robust capital structures and diversified export activities in enhancing corporate resilience during

periods of systemic crisis. The marked disparities in financial performance among the firms studied further illustrate the necessity for dynamic and context-sensitive financial management approaches, especially amid sustained geopolitical instability.

REFERENCES

- Altman E. I. (1968) Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Predication of Corporate Bankruptcy. *The Journal of Finance*, 23(4), 589-609.
- Altman E. I. (2005) An Emerging Market Credit Scoring System for Corporate Bonds. *Emerging Markets Review*, 6(4), 311-323.
- Boratyńska K. (2014) Przyczyny bankructwa przedsiębiorstw w wybranych branżach przemysłu spożywczego. *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu*, 361, 20-28 (in Polish).
- Hamulczuk M., Pawlak K., Stefańczyk J., Gołębiewski J. (2023) Agri-Food Supply and Retail Food Prices during the Russia–Ukraine Conflict’s Early Stage: Implications for Food Security. *Agriculture*, 13(11), 2154. <https://doi.org/10.3390/agriculture13112154>.
- Juszczyk S., Balina R. (2014) Prognozowanie zagrożenia bankructwem przedsiębiorstw w wybranych branżach [in]: *Ekonomista: czasopismo poświęcone nauce i potrzebom życia*, 1, 67-95 (in Polish).
- Kopiński D., Markiewicz J., Sierocińska K., Strzelecki J. (2023) Gospodarka wojenna: Ukraina po roku od rosyjskiej inwazji. *Polski Instytut Ekonomiczny*, Warszawa (in Polish).
- Kuciński A. (2023) Wskaźniki finansowe jako narzędzie kontrolno-ostrzegawcze w ocenie sytuacji finansowej przedsiębiorstwa. *Przedsiębiorczość - Edukacja*, 19(1), 46-58 (in Polish).
- Petryshyn H. (2022) Sytuacja gospodarcza w Ukrainie przed wybuchem wojny rosyjsko-ukraińskiej. *Społeczeństwo i Polityka* nr 3(72), 61-80 (in Polish).
- Pociecha J. (2011) Modele prognozowania bankructwa w systemie wczesnego ostrzegania przedsiębiorstw. *Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu. Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu*, 165, 124-134 (in Polish).
- Rashid F., Khan R. A., Qureshi I. H. (2023) A Comprehensive Review of the Altman Z-Score Model Across Industries. *The Business Review*.
- Schwartz A. (2004) A Normative Theory of Business Bankruptcy. *American Law & Economics Association Annual Meetings*, Paper 32, Yale University [www.law.bepress.com].